Analytische

O P T I K.

Analytische

OPTIK

von

Dr. L. J. Schleiermacher,
Grossherzoglich Hessischem Oberbaudirector und Director des Grossherzoglichen Museums, des Ludewigsordens Ritter I. Classe.

Erster Theil.

Bayerische Staatsbibliothek München

DARMSTADT, 1842.
Hofbuchhandlung von Gustav Jonghaus.

291. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Buchdruckerei von *Heinrich Brill.*

Vorrede.

Die Schrift, wovon ich dem Publicum hiermit den ersten Theil übergebe, ist diejenige, welche ich bereits im Jahre 1828 in Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie, Bd. 14 S. 1, angezeigt habe, nebst ausführlicher Angabe des dabei zu Grund gelegten Planes, der vorzüglichsten allgemeinen Resultate und der Motive, welche mich bewogen haben, diese mit bedeutendem Zeitaufwande verbundene Arbeit zu unternehmen. Später wurden die drei ersten Kapitel im 9ten und 10ten Bande der Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und v. Ettingshausen abgedruckt, und ich würde die Publication auf diese Weise fortgesetzt haben, wenn jenes Journal nicht eine abgeänderte Einrichtung erhalten hätte, wonach die Aufnahme ausgedehnterer mathematischer Arbeiten ausser seinem Plane lag.

Die Fortschritte, welche seit dieser Zeit in der Construction der optischen Instrumente stattfanden, machten eine Umarbeitung der daselbst gegebenen Formeln nothwendig, um sie in allen Fällen gebrauchen zu können, welche sich bei der Ausführung darbieten, und hierdurch haben sie ihre gegenwärtige Gestalt erhalten. Nicht nur dieser Umstand, sondern auch der Wunsch, die schon früher begonnene Anwendung der Formeln auf die gebräuchlichen Instrumente vor der endlichen Redaction des Werkes noch weiter fortzusetzen, führten die eingetretene Verzögerung in der Publication desselben herbei, zugleich aber auch den Vortheil, dass vielfältige Vergleichungen der gefundenen Resultate mit den Beobachtungen benutzt werden konnten, um sich von der Anwendbarkeit der gebrauchten Methoden zu versichern.

Was den bei der Bearbeitung befolgten Plan betrifft, so habe ich denselben in der Einleitung umständlich angegeben und glaube daher hier nur das Folgende herausheben zu müssen.

Die in der Optik bisher gebräuchlichen Näherungsformeln waren in so fern unvollständig, als darin die durch die Gestalt der brechenden und reflectirenden Flächen hervorgebrachte Abweichung der Strahlen ausserhalb der Axe unberücksichtigt blieb, die übrigen Abweichungen aber gewöhnlich nur näherungsweise und mit Vernachlässigung aller zu höheren Ordnungen gehörigen Glieder berechnet und manche Nebenumstände nicht beachtet wurden, welche einen wesentlichen Einfluss auf die Resultate äussern. Eine Folge hiervon war, dass in vielen Fällen die nach jenen Formeln berechneten Dimensionen der Instrumente nicht mit den durch die Erfahrung gefundenen übereinstimmten, wodurch sich die Verfertiger derselben bewogen fanden, in jenen Fällen bei der Bestimmung der Gestalt der Gläser allein der Erfahrung und keineswegs den Resultaten der theoretischen Rechnung zu folgen. Die neueren optischen Untersuchungen haben zwar diesem Mangel durch genaue analytische Formeln sowohl, als durch die bei der Berechnung der achromatischen Objective eingeführte trigonometrische Methode theilweise abgeholfen; die mit der Anwendung der ersteren verbundenen Schwierigkeiten verhinderten jedoch bis jetzt, einen practischen Gebrauch von denselben zu machen, und es blieb daher wünschenswerth, Näherungsformeln zu erhalten, welche bei einer einfachen Form eine für die Ausübung zureichende Genauigkeit gewähren.

Der Zweck der gegenwärtigen Schrift ist nun, zur Erfüllung dieses Bedürfnisses zuerst die allgemeinen Gleichungen der gebrochenen Strahlen unter einer für die folgenden Untersuchungen tauglichen Form und ohne Anwendung von Näherungen darzustellen, sodann aus denselben brauchbare Näherungsformeln für ein beliebiges System von sphärischen brechenden Flächen abzuleiten, wodurch nicht nur sämmtliche in und ausser der Axe stattfindende Abweichungen mit hinlänglicher Schärfe bestimmt, sondern auch die dabei in Betracht kommenden Nebenumstände auf geeignete Weise

berücksichtigt werden, endlich eine Methode aufzusuchen, welche die Anwendung in allen vorkommenden Fällen erleichtert. Aus den hierdurch gefundenen Formeln folgen sehr leicht die Auflösungen der verschiedenen Probleme, welche bei der Construction der Instrumente vorkommen, sowohl derjenigen, bei denen eine approximative Auflösung hinreicht, als derjenigen, welche eine genaue Kenntniss der Abweichungen erfordern und welche sich auf die Deutlichkeit und die Gestalt und Lage der durch die Instrumente hervorgebrachten Bilder beziehen.

Um bei den letzteren Problemen unzweideutige Resultate zu erhalten, betrachte ich alle farbige Strahlen zusammengenommen, welche entweder von einem beliebigen leuchtenden Punkte oder von dem ganzen sichtbaren Gegenstande in das Instrument fallen, und bediene mich zu dem Ende der Methode der kleinsten Quadrate, indem ich die Abweichungen der Strahlen als die Fehler ansehe, welche dadurch so klein als möglich gemacht werden sollen. Auf diese Weise gelange ich in beiden Fällen zu Formeln, welche die mit beständigen positiven Factoren multiplicirten Summen der Quadrate jener Fehler ausdrücken und die verschiedenen Abweichungen in abgesonderten Gliedern enthalten. Ihre Minima bestimmen die Lage der Bilder und diejenigen Grössen, welche bei der Construction des Instrumentes willkührlich geblieben sind; die erwähnten Formeln bilden demnach die Grundlage bei allen Untersuchungen über die Deutlichkeit.

Eine weitere Formel dient dazu, die Gestalten des Bildes und des Gegenstandes mit einander zu vergleichen und dadurch die Bedingungen zu finden, unter welchen der letztere, durch das Instrument betrachtet, so wenig wie möglich verzerrt erscheint, so wie auch die Gestalt anzugeben, welche eine auf dem Gegenstande befindliche Curve im Bilde erhält.

Obgleich die Anwendung der gefundenen Formeln den speciellen Untersuchungen vorbehalten bleiben muss, so lassen sich doch schon im Allgemeinen viele Resultate daraus herleiten, welche ich an den geeigneten Stellen ausführlich erörtert habe.

Der zweite Theil, dessen Publication ich so viel als möglich beschleunigen werde, soll ausser den erforderlichen

trigonometrischen Formeln und einigen theoretischen Untersuchungen die allgemeinen Anwendungen der im ersten Theile entwickelten Theorie auf Gläser und Spiegel, sodann die durch die Erfahrung geleiteten speciellen Anwendungen derselben auf die gebräuchlichen Instrumente enthalten, und es werden ihm die nöthigen Tafeln beigefügt werden, um die Dimensionen der Instrumente mit Leichtigkeit berechnen zu können.

Schliesslich muss ich noch mein Bedauern darüber ausdrücken, dass mir die dioptrischen Untersuchungen von Gauss zuerst nach dem Drucke des fünften Kapitels zu Gesicht kamen, daher ich von denselben keinen Gebrauch machen konnte. Indessen sind mehrere merkwürdige Resultate, welche von Möbius und Bessel in Bezug auf ein System von Linsengläsern gefunden wurden, in jenem Kapitel, auf ein System von sphärischen brechenden Flächen ausgedehnt, ebenfalls enthalten.

Mögen die Schwierigkeiten, welche eine neue Behandlung dieses ohnehin verwickelten Gegenstandes darbietet und welche durch die vielen in Betracht kommenden Nebenumstände noch vermehrt werden, bei Beurtheilung dieser Schrift billige Rücksicht finden.

Darmstadt, im August 1842.

Der Verfasser.

Inhalt.

No.		Seite
	Einleitung	1
	Erstes Kapitel. Genaue Formeln, welche sich auf die Brechung des Lichtes beziehen.	
1.	Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt .	40
2.	Brechung in sphärischen Flächen	44
3.	Integration der endlichen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung	49
	Zweites Kapitel. Entwickelung der, auf die Brechung sich beziehenden genauen Formeln in Reihen.	
4.	Glieder der ersten Ordnung oder optische Formeln mit Vernachlässigung der Abweichungen	60
5.	Glieder der höheren Ordnungen, welche sich auf die Abweichungen wegen der Gestalt beziehen, im Allgemeinen .	67
6—11.	Glieder der zweiten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen	70
12—14.	Glieder der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen	91
	Drittes Kapitel. Aenderungen, welche die Farbenzerstreuung in den auf die Brechung sich beziehenden Formeln hervorbringt.	
15.	Allgemeine Betrachtung der Farbenzerstreuung und der davon abhängenden Abweichungen	104
16—18.	Glieder, welche von der Farbenzerstreuung allein abhängen	107
19—21.	Glieder, welche von der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Gestalt zugleich abhängen	123

Viertes Kapitel.

Gleichungen der gebrochenen und einfallenden Strahlen mit Rücksicht auf die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung und einige dabei eintretende Nebenumstände.

No.		Seite
22—25.	Blendungen, Bestimmung der davon abhängenden Grössen	147
26.	Bestimmung der durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführten Constanten; hierdurch erhaltene Gleichungen der gebrochenen Strahlen	156
27—31.	Einfluss einer Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes	162
32, 33.	Einfluss einer Veränderung in der Lage des Gegenstandes bei unveränderter Einrichtung des Instrumentes	179
34.	Hauptstrahlen; Gleichungen derselben	185
35.	Coordinaten, vom Hauptstrahle an gezählt; Gleichungen der gebrochenen Strahlen bei diesem Coordinatensysteme .	187
36.	Gleichungen der einfallenden Strahlen	189
37, 38.	Bezeichnungen und Berechnung der in den Formeln enthaltenen Grössen	194

Fünftes Kapitel.

Probleme der ersten Ordnung.

No.		Seite
39.	Gleichungen der einfallenden und der gebrochenen Strahlen ohne Rücksicht auf die Abweichungen	207
40—46.	Vereinigungsweiten	212
47.	Bilder .	228
48.	Verwechselung des Gegenstandes mit dem Bilde	231
49.	Brennpunkte eines Systems von brechenden Flächen . . .	234
50.	Mittelpunkte eines Systems von brechenden Flächen . . .	237
51.	Vereinigungsweiten der Hauptstrahlen	242
52.	Gleichungen der Strahlen, durch die Coordinaten der Einfallspunkte und die Vereinigungsweiten ausgedrückt . . .	247
53.	Winkel zwischen den Projectionen der Strahlen und der als Axen angenommenen Linien	249
54.	Gleichungen und Winkel der Strahlen, durch die Winkel der einfallenden Strahlen ausgedrückt	253
55.	Gleichungen und Winkel der Strahlen, durch die mit Parenthesen bezeichneten Grössen ausgedrückt	255
56.	Entfernung des Bildes von dem Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen	259
57.	Lage der gebrochenen Strahlen	259
58.	Oeffnungen der brechenden Flächen	264
59.	Blendungen	265
60.	Eintheilung der Instrumente	271
61.	Auge .	271

No. Seite

62. Verbindung des Auges mit den Instrumenten der zweiten Art, wenn sich das erstere unveränderlich in der Axe derselben befindet 286
63. Verbindung des Auges mit den Instrumenten, wenn die Axe des ersteren jedesmal nach dem Hauptstrahle gerichtet ist 291
64. Vergrösserung 295
65. Lichtstärke 301
66. Gesichtsfeld 312
67. Oeffnungsmaasse 314

Sechstes Kapitel.

Nähere Betrachtung der Abweichungen.

68. Gleichungen der gebrochenen Strahlen mit Rücksicht auf die Abweichungen 320
69. Seitenabweichungen 325
70. Abweichungen des Hauptstrahles 329
71. Längenabweichungen 330
72. Abweichungen bei den Instrumenten der ersten Art . . . 335
73. Abweichungen bei den Instrumenten der zweiten Art, wenn sich das Auge unveränderlich in der Axe derselben befindet 336
74, 75. Abweichungen bei den Instrumenten der zweiten Art, wenn die Axe des Auges jedesmal nach dem Hauptstrahle gerichtet ist 341
76. Winkel zwischen dem Hauptstrahle und der Axe des Instrumentes, mit Rücksicht auf die Abweichungen, Winkelabweichungen 359
77. Vergleichung der für die Instrumente in Bezug auf die Abweichungen erhaltenen Resultate 369
78. Kleine Veränderungen im Instrumente und Auge 370

Siebentes Kapitel.

Undeutlichkeit und Lage des von einem leuchtenden Punkte entstehenden Bildes.

79, 80. Absolute Undeutlichkeit in dem Bilde eines Punktes, wenn der Hauptstrahl als Axe des Strahlenbündels angenommen wird 378
81. Absolute Undeutlichkeit in dem Bilde eines Punktes, wenn diejenige Linie als Axe des Strahlenbündels angenommen wird, welche die Undeutlichkeit so klein als möglich macht 395
82—84. Ort der Bilder, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören, wenn sie nach der absoluten Undeutlichkeit bestimmt werden 403
85. Relative Undeutlichkeit, Ort der Bilder, wenn sie nach derselben bestimmt werden 420
86. Undeutlichkeit nach den Winkelabweichungen geschätzt, Ort der hiernach bestimmten Bilder 425

No. Seite

87. Vergleichung der in Bezug auf die Undeutlichkeit und den Ort der Bilder erhaltenen Resultate 427
88. Undeutlichkeit und Ort der Bilder bei homogenem Lichte . 428
89. Bedeutung der verschiedenen Glieder, welche in dem Ausdrucke der Undeutlichkeit vorkommen 434

Achtes Kapitel.

Undeutlichkeit in dem Bilde des ganzen Gegenstandes.

90. Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes 442
91. Mittlerer Ort des Bildes 448
92. Bedeutung der verschiedenen Glieder, welche in dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit vorkommen 450
93. Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes, wenn dasselbe für das ganze Gesichtsfeld im Mittel eingestellt ist 451
94. Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes, wenn dasselbe für einen in der Axe liegenden Punkt eingestellt wird . . 453
95. Ungleiche Berücksichtigung der verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes 456
96. Corrigirtes Zerstreuungsverhältniss 457
97. Einfluss der verschiedenen Entfernung des Gegenstandes auf die Deutlichkeit 460
98. Mittlere Undeutlichkeit, durch die Tangente des halben vergrösserten Gesichtsfeldes ausgedrückt 466
99. Mittlere Undeutlichkeit, durch die Tangente des halben vergrösserten Gesichtsfeldes und den Oeffnungshalbmesser der letzten brechenden Fläche ausgedrückt 467
100. Mittlere Undeutlichkeit, durch die Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit und des Gesichtsfeldes ausgedrückt . . 471
101. Instrumente, welche aus zwei Systemen bestehen . . . 473
102. Vergleichung der Undeutlichkeit bei mehreren Instrumenten mit gleichen und verschiedenen Vergrösserungen 478
103. Instrumente mit mehreren Oculareinsätzen 480
104—109. Instrumente, bei welchen nicht sämmtliche Strahlenbündel ungehinderten Durchgang finden 487
110. Kreisförmige Oeffnung in der Mitte der Objectivspiegel bei Spiegeltelescopen 503

Neuntes Kapitel.

Methoden zur Erhaltung der grösstmöglichen Deutlichkeit.

111. Bestimmung der grössten Deutlichkeit vermittelst des Ausdruckes von Π 505
112, 113. Berechnung des Minimums aus mehreren numerischen Werthen von Π 506
114. Absonderung der willkührlichen Grössen 518

No. Seite

115—121. Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an dem Objective angebracht ist 521

122—124. Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an den Ocularen angebracht ist 543

125. Instrumente ohne achromatische Objective 557

126. Vortheilhafteste Stellung der Hauptblendung oder des Auges in Bezug auf die Deutlichkeit 558

127—132. Coefficienten, welche von der Farbenzerstreuung abhängen 562

133, 134. Farbiger Rand bei Instrumenten, welche denselben oder die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich vernichten 580

Zehntes Kapitel.

Gestalt des von dem Instrumente hervorgebrachten Bildes.

135—137. Verzerrung des durch das Instrument hervorgebrachten Bildes 592

138. Methoden zur Erhaltung der grösstmöglichen Aehnlichkeit zwischen dem Bilde und dem Gegenstande 597

139. Instrumente mit inneren Micrometern 599

140, 141. Gestalt, unter welcher eine auf dem Gegenstande gezogene Curve durch das Instrument erscheint 600

142. Gestalt einer durch das Instrument betrachteten geraden Linie 604

143. Gestalt eines durch das Instrument betrachteten Kreises . 607

No. Seite

115—121. Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an dem Objective angebracht ist 521

122—124. Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an den Ocularen angebracht ist 543

125. Instrumente ohne achromatische Objective 557

126. Vortheilhafteste Stellung der Hauptblendung oder des Auges in Bezug auf die Deutlichkeit 558

127—132. Coefficienten; welche von der Farbenzerstreuung abhängen 563

133, 134. Farbiger Rand bei Instrumenten, welche denselben oder die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich vernichten 580

Zehntes Kapitel.

Gestalt des von dem Instrumente hervorgebrachten Bildes.

135—137. Verzerrung des durch das Instrument hervorgebrachten Bildes 592

138. Methoden zur Erhaltung der grösstmöglichen Aehnlichkeit zwischen dem Bilde und dem Gegenstande 597

139. Instrumente mit inneren Micrometern 599

140, 141. Gestalt, unter welcher eine auf dem Gegenstande gezogene Curve durch das Instrument erscheint 600

142. Gestalt einer durch das Instrument betrachteten geraden Linie 604

143. Gestalt eines durch das Instrument betrachteten Kreises . 607

Verbesserungen.

Seite	Zeile	
32	13 v. u.	statt *Wolaston* lies: *Wollaston.*
55	31	statt (e, i) und $[e, i]$ lies: (i, e) und $[i, e]$.
55	5 v. u.	statt $\frac{(i, e)}{(i+1, e}$ lies: $\frac{(i, e)}{(i+1, e)}$.
134	13	statt W_i — lies: $W_i =$.
156	4	statt $+[P]^{(m)}S_{m-1}$ lies: $-[P]^{(m)}S_{m-1}$.
156	5	statt $-[P']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1})$ lies: $+[P']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1})$.
179	5	statt $\Delta\frac{1}{c_1} - 0$ lies: $\Delta\frac{1}{c_1} = 0$.
194		nach Zeile 3 v. u. ist einzuschalten: $\Delta\varphi_1$ eine ähnliche willkührliche Veränderung von φ_1; $\mathfrak{D}$ die Characteristik der durch $\Delta\frac{1}{c_1}$ und $\Delta\varphi_1$ hervorgebrachten Veränderungen;
195		nach der letzten Zeile ist einzuschalten: Die Coordinaten der einfallenden Strahlen werden auf dieselbe Weise, jedoch ohne Index bezeichnet.
249	10 v. u.	statt *den als* lies: *der als.*
250	5	statt *mit dieser Axe* lies: *mit den Projectionen dieser Axe.*
250	18	statt *mit dem als Axe angenommenen Hauptstrahle* lies: *mit den Projectionen des als Axe angenommenen Hauptstrahles.*
251	2	statt $tg\,\omega$ und $tg\,\omega$ lies: $tg\,\omega$ und $tg\,\omega''$.
255	5	im Nenner, statt c'_i lies: c''_i.
264	26	statt ϱ_i lies: ϱ_j.
264	2 v. u.	statt 57) lies: 58).
265	12	statt Y'_i lies: Y''_i.
265	10 v. u.	statt 58) lies: 59).
267	6	statt V_{+1} lies: V_{i+1}.
268	3	statt $\left(\frac{g-g''}{Vg}\right)_i\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j\varrho_i$ lies: $\left(\frac{g-g''}{Vg}\right)_i\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j\varrho_j$
271	15	statt 59) lies: 60).
271	4 v. u.	statt 60) lies: 61).
288	16	statt R'_i lies: R'_1.

Seite	Zeile	
311	11 v. u.	statt $\varkappa$ lies: χ.
311	5 v. u.	statt $tg^2\varkappa$ lies: $tg^2\chi$.
311	1 v. u.	statt $tg^2\varkappa$ lies: $tg^2\chi$.
312	1	statt $tg\varkappa$ lies: $tg\chi$.
378	18	am Anfang ist zuzusetzen: 79).
409	14	statt $4QK^2R^2_,$ lies: $4QK^2R^2$.
447	7	statt $6K^2\varphi^2$ lies: $3K^2\varphi^2$.
560	1 v. u.	statt *bei der zweiten* lies: *bei jeder.*
601	6	statt $y = r' \cos\psi$ lies: $y' = r' \cos\psi$.

Einleitung.

1) Die in der analytischen Optik gebräuchlichen Näherungsformeln werden nach der Einrichtung, welche ihnen Euler gegeben hat, unter der Voraussetzung entwickelt, dass der Halbmesser der wegen der Helligkeit erforderlichen Oeffnung, die Tangente des halben Gesichtsfeldes und die Unterschiede zwischen den Brechungsverhältnissen der verschiedenen farbigen Strahlen kleine Grössen sind, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Hierbei berücksichtigt man ausser den von den Abweichungen unabhängigen Gliedern gewöhnlich nur diejenigen, die sich auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe beziehen, und mit dem Quadrate oder der dritten Potenz des Oeffnungshalbmessers multiplicirt sind, je nachdem von der Längen- oder Seitenabweichung die Rede ist; sodann diejenigen Glieder, welche die erste Potenz von dem Unterschiede des Brechungsverhältnisses enthalten, und die Farbenzerstreuung in und ausserhalb der Axe näherungsweise ausdrücken. Dagegen werden nicht nur die dazu gehörigen Glieder höherer Ordnungen, sondern auch diejenigen vernachlässigt, in denen Potenzen von der Tangente des halben Gesichtsfeldes oder Producte derselben mit Potenzen des Oeffnungshalbmessers vorkommen, und welche die Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe angeben. Die Vernachlässigung der letzteren Glieder gründet sich auf eine Betrachtung, welche vorzüglich bei achromatischen Objectiven Anwendung findet. Drückt man nämlich den Oeffnungshalbmesser in Theilen der Brennweite des zusammengesetzten Objectivs aus, so ist er, obgleich selbst eine kleine Grösse, doch viel bedeutender, als die Tangente des halben Gesichtsfeldes, wodurch man veranlasst wird, die Potenzen dieser Tangente zu vernachlässigen, wenn man blos die bedeutendsten Glieder berücksichtigen will. Erscheinen nun gleich hiernach die bei der Entwickelung der Näherungsformeln angenommenen Grundsätze in Bezug auf die Objective gerechtfertigt, so sind doch jene Formeln selbst zur Berechnung der letzteren nicht vollkommen hinreichend, eines Theils, weil die Glieder höherer Ordnungen einen zu bedeutenden Einfluss haben, um bei der erforderlichen Genauigkeit der Rechnung vernachlässigt wer-

den zu können, andern Theils, weil durch die approximativen Formeln nicht alle, bei dem Objective vorkommende, willkührliche Grössen bestimmt werden, zu welchem Zwecke es nothwendig ist, die höheren Glieder zu benutzen.

Noch weit weniger kann man aber die erwähnten Grundsätze als richtig anerkennen, sobald die danach entwickelten Formeln auf die Berechnung der Oculare angewendet werden sollen. Bei jedem derselben ist nämlich das von den vorhergehenden Gläsern oder Spiegeln hervorgebrachte Bild als der Gegenstand zu betrachten, dessen Grösse und Entfernung vom Oculare das Gesichtsfeld bestimmt. Da nun die Bilder meistens sehr nahe bei den Ocularen liegen, so wird das hiernach bestimmte Gesichtsfeld bei diesen sehr gross, und bringt in den Formeln Glieder hervor, die weit bedeutender sind, als diejenigen, welche von dem Oeffnungshalbmesser abhängen. Nach der oben angeführten Verfahrungsart werden daher bei den Abweichungen der Oculare wegen der Gestalt gerade die bedeutendsten Glieder, welche die Tangente des halben Gesichtsfeldes enthalten, vernachlässigt, die minder bedeutenden, von dem Oeffnungshalbmesser abhängenden, dagegen beibehalten. Dasselbe findet auch mehr oder weniger bei den meisten übrigen Instrumenten statt; kein Wunder also, wenn die hiernach berechnete Gestalt der Gläser mit der durch die Erfahrung gefundenen nicht übereinstimmt, und Klagen der Künstler über die Unrichtigkeit der angeblichen Theorie entstehen.

2) Um diese Nachtheile zu beseitigen, hat zuerst Klügel bei den achromatischen Objectiven eine strenge trigonometrische Rechnung an die Stelle der Näherungsformeln gesetzt, welche Methode seitdem bei allen genauen Untersuchungen über diesen Gegenstand beibehalten und weiter ausgebildet wurde, wobei Klügel, Bohnenberger, Gauss, Herschel und Littrow verschiedene Bestimmungen der bei einem zweifachen Objective übrig bleibenden willkührlichen Grössen in Vorschlag brachten. Sodann haben Malus und Hamilton allgemeine analytische Formeln zur Berechnung der Lage der gebrochenen und reflectirten Strahlen gegeben, und sehr merkwürdige Eigenschaften derselben entdeckt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, genaue Rechnungen hierüber ohne Anwendung von Näherungen anzustellen, oder die letzteren, wenn man sie vorzieht, so weit zu treiben, als es die Umstände erfordern. Es unterliegt hiernach keinem Anstande, sich zur Auflösung der in der Optik vorkommenden Probleme im Allgemeinen entweder der genauen trigonometrischen Formeln zu bedienen, welche aber alsdann auch auf die nicht in einer Ebene liegenden Strahlen ausgedehnt werden müssen, oder die erwähnten analytischen Formeln anzuwenden. Beide Methoden führen indessen zu mühsamen Rechnungen und bestimmen nur die Lage einzelner Strahlen, oder die auf ihre Durchschnitte sich beziehenden Curven und Flächen, woraus es in vielen Fällen schwierig ist, die vortheilhafteste Einrichtung eines Instrumentes abzuleiten.

Diese Gründe machen es daher wünschenswerth, für den beständigen Gebrauch in der Optik Näherungsformeln zu erhalten, welche bei einer einfachen Form eine für die Ausübung hinlängliche Genauigkeit gewähren. Solche Formeln sind um so nützlicher, da in allen Fällen, in denen die Abweichungen nicht so vollkommen als möglich aufgehoben, sondern nur vermindert werden können, eine approximative Berechnung derselben hinreicht, in denjenigen Fällen dagegen, wo eine grössere Schärfe nothwendig ist, die Anwendung der genauen Formeln sehr durch eine vorläufige genäherte Rechnung erleichtert wird. Ausserdem ist es auch von Interesse, die verschiedenen Abweichungen abgesondert auszudrücken, weil hierdurch am leichtesten die Mittel zu ihrer Aufhebung oder Verminderung gefunden werden können, welches bei den genauen Formeln nicht durchgängig, wohl aber bei den Näherungsformeln statt findet.

3) Die vorhergehenden Betrachtungen haben mich schon vor geraumer Zeit veranlasst, die Formeln der analytischen Optik von Neuem und unter der Voraussetzung zu entwickeln, dass die Tangente des halben Gesichtsfeldes eben so, wie der Oeffnungshalbmesser behandelt, und diejenigen Glieder der höheren Ordnungen beibehalten werden, welche nicht als unbedeutend zu betrachten sind. Ich habe mich ferner bemüht, eine allgemeine Methode aufzusuchen, wodurch die Anwendung jener Formeln auf einzelne Fälle so viel als möglich erleichtert und das verlangte Resultat auf unzweideutige Weise erhalten wird. Da jedoch hierbei viele Nebenumstände in Betracht kommen, welche nothwendig berücksichtigt werden müssen, wenn die Untersuchungen nicht einseitig ausfallen sollen, so wird dadurch die Entwickelung etwas weitläuftig, und oft können Gegenstände, die hierauf Bezug haben, nicht an derjenigen Stelle vorgetragen werden, welche sonst für den systematischen Vortrag die passendste seyn würde, weil dazu Vorkenntnisse erforderlich sind, die erst später vorkommen. Es wird daher nicht am unrechten Orte seyn, hier eine Uebersicht über den Gang der Untersuchungen vorauszuschicken, um danach den Zusammenhang derselben desto leichter übersehen zu können.

4) Zuerst beschäftige ich mich mit der Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt, und bestimme nach der von Malus bereits angewandten Methode die Gleichungen der einfallenden und gebrochenen Strahlen, ohne dabei Näherungen zu gebrauchen. Zur leichteren Entwickelung der dadurch erhaltenen Formeln ist es jedoch nothwendig, ihnen eine etwas veränderte Gestalt zu geben, wodurch sie zugleich auf die Reflexion anwendbar werden, da sich bekanntlich die Brechung in jene verwandelt, wenn das Brechungsverhältniss $= -1$ gesetzt wird. Uebrigens sind diese Formeln von den Theorieen über die Entstehung des Lichtes völlig unabhängig, indem ihnen nur die durch die Beobachtung bestätigten Gesetze der Refraction zur Grundlage dienen.

Von dem so eben betrachteten allgemeinen Falle ist es leicht zu dem specielleren über zu gehen, in welchem sämmtliche brechende Flächen als Kugelflächen angenommen werden, deren Mittelpunkte sich in einer und derselben geraden Linie, der *Axe des Instrumentes,* befinden. Dieser Fall begreift die gewöhnlichen dioptrischen und katoptrischen Werkzeuge in sich, indem sich das System von Kugelflächen in ein System von Linsengläsern oder von sphärischen Spiegeln verwandelt, je nachdem man die Zwischenräume jener Flächen abwechselnd mit Glas und Luft ausgefüllt denkt, oder dem Brechungsverhältnisse den oben erwähnten Werth beilegt.

Nach einer schon von Biot gemachten Bemerkung werden die optischen Formeln symmetrischer, wenn man annimmt, dass die concave Seite sämmtlicher brechenden Flächen dem Gegenstande zugekehrt sey; da diese Voraussetzung keinerlei Nachtheile in der Anwendung herbeiführt, so habe ich sie hier ebenfalls zu Grund gelegt.

Sodann ist es bequem, den Formeln bei der ferneren Entwickelung die in der Optik bisher gebräuchliche Gestalt zu geben, wonach sie Functionen von den Vereinigungsweiten der Centralstrahlen sind. Ein einfaches Mittel hierzu bietet die schickliche Wahl des bei den Gleichungen der gebrochenen Strahlen angenommenen Coordinatensystems dar. Zu dem Ende lasse ich eine der Coordinatenaxen mit der Axe des Instrumentes zusammenfallen und lege eine der coordinirten Ebenen durch den leuchtenden Punkt, von welchem die Lichtstrahlen ausgehen, den Ursprung der Coordinaten aber nach jeder Brechung in den Scheitel der correspondirenden brechenden Fläche.

Bestimmt man nun die Durchschnittspunkte der gebrochenen Strahlen mit jener coordinirten Ebene, so sind ihre Abscissen von den erwähnten Vereinigungsweiten nur um kleine Grössen von der Ordnung der Abweichungen verschieden, daher es leicht wird, die letzteren statt der ersteren in den Formeln einzuführen. Obgleich das gewählte Coordinatensystem nur speciell ist, so bietet doch die Auflösung eine hinreichende Allgemeinheit dar, indem die Coordinaten sehr leicht durch die bekannten Formeln in andere beliebige verwandelt werden können; bei den Anwendungen zeigt sich jedoch jenes System als das bequemste, daher es unnütz ist, die Verwandlung im Allgemeinen vorzunehmen.

5) Bis hierher sind die Formeln vollkommen genau; zur Erhaltung bequemer Näherungsformeln ist es jedoch nöthig, sie in Reihen zu entwickeln.

Als kleine Grössen, nach denen die Reihen geordnet werden, nehme ich hierbei die Coordinaten des Einfallspunktes des Strahles auf der ersten brechenden Fläche an, sodann die Tangente des Winkels, welchen eine von dem leuchtenden Punkte nach dem Scheitel jener Fläche gezogene Linie mit der Axe des Instrumentes macht. Aus den ersteren lässt sich der Oeffnungshalbmesser leicht ableiten,

und der letztere Winkel verwandelt sich in das halbe Gesichtsfeld, wenn der leuchtende Punkt an der Grenze desselben angenommen wird, daher die Formeln hierdurch die verlangte Einrichtung erhalten. Theilt man nun die Glieder der Reihen so in Ordnungen ab, dass die Ordnungszahl jedesmal die Stelle angiebt, welche das Glied in der Reihe einnimmt, so enthalten die Glieder der ersten Ordnung genäherte Ausdrücke, ohne Rücksicht auf die Abweichungen; die Glieder der höheren Ordnungen dagegen bestimmen die Abweichungen wegen der Gestalt in und ausserhalb der Axe, deren bedeutendste Theile diejenigen der zweiten Ordnung ausmachen. Fängt man mit den Grössen der ersten Ordnung an, geht dann nach und nach zu den folgenden über, und behält in der dritten Ordnung nur diejenigen Glieder bei, welche merkliche Werthe erhalten können, so wird die Entwickelung einfach und führt zu endlichen Differenzengleichungen, deren Integrale leicht erhalten werden.

Ungeachtet der angegebenen Abkürzungen werden die Formeln doch noch sehr weitläuftig, daher es zur Erleichterung der Rechnung nothwendig ist, alle Mittel zu ihrer Vereinfachung anzuwenden. Hierzu kann vorzüglich der Umstand benutzt werden, dass es bei den meisten optischen Untersuchungen hinreicht, die Lage der gebrochenen Strahlen in der Nähe des letzten, durch sie hervorgebrachten Bildes zu kennen, um dasselbe so vollkommen als möglich zu machen, bei welcher Voraussetzung viele Glieder unmerklich sind, und daher vernachlässigt werden können.

Ausserdem ist die Berücksichtigung der zur dritten Ordnung gehörigen Grössen nur in dem Falle nothwendig, wenn durch die besondere Einrichtung des Instrumentes die Glieder der zweiten Ordnung fast gänzlich aufgehoben werden, wie es z. B. bei den achromatischen Objectiven statt findet. Bei der Entwickelung der ersteren Grössen kann man daher die letzteren als zu derselben Ordnung gehörig betrachten, wodurch sich die Formeln bedeutend simplificiren.

6) Es bleibt jetzt noch übrig, auf die verschiedene Brechbarkeit der farbigen Strahlen Rücksicht zu nehmen. In den genauen Formeln ist hierzu weiter nichts erforderlich, als bei jeder Farbe das ihr entsprechende Brechungsverhältniss zu gebrauchen; in den Näherungsformeln dagegen ist es zweckmässig, die aus diesem Umstande entspringenden Glieder von den übrigen abzusondern. Man gelangt hierzu, wenn man zuerst unter den verschiedenen farbigen Strahlen einen nach Willkühr auswählt, welchen man als den mittleren ansieht, ohne jedoch vorerst eine Bestimmung über seine Farbe, oder was hiermit einerlei ist, über seine Lage im Spectrum zu machen; wenn man sodann für einen anderen Strahl von beliebiger Farbe die Formeln so entwickelt, dass der Unterschied zwischen den Brechungsverhältnissen beider Strahlen als eine kleine Grösse betrachtet wird.

Die Erfahrung zeigt jedoch, dass sich dieser Unterschied bei verschiedenen brechenden Körpern nicht nach einerlei Gesetz verändert,

wenn man von einem farbigen Strahle zu einem andern übergeht. Um daher die Anzahl der veränderlichen Grössen so viel als möglich zu vermindern, kann man einen brechenden Körper nach Willkühr wählen, um ihn zur Vergleichung der übrigen zu gebrauchen. Sieht man alsdann bei dem ersteren den, den einzelnen farbigen Strahlen entsprechenden, Unterschied des Brechungsverhältnisses als die absolute veränderliche Grösse an, so sind die correspondirenden Unterschiede der übrigen Körper als Functionen von jenem zu betrachten, welche wegen der Kleinheit desselben in Reihen verwandelt werden können. Hierdurch entstehen in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen Glieder, welche die durch die verschiedene Brechbarkeit oder Farbenzerstreuung hervorgebrachten Abweichungen in und ausserhalb der Axe ausdrücken. Zur zweiten Ordnung werden hierbei diejenigen gerechnet, welche die erste Potenz jenes Unterschiedes enthalten, zur dritten Ordnung dagegen diejenigen, die theils von dem Quadrate desselben, theils von der Farbenzerstreuung und Abweichung wegen der Gestalt zugleich abhängen.

7) Durch die Vereinigung der nach den angegebenen Principien entwickelten Glieder werden endlich die Gleichungen der Strahlen nach den verschiedenen Brechungen und die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den brechenden Flächen erhalten, wodurch Alles gegeben ist, was auf die Lage der Strahlen Bezug hat, da hierbei auf sämmtliche Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung die geeignete Rücksicht genommen wurde.

Die Formeln enthalten jedoch mehrere Grössen, welche theils willkührlich angenommen, theils durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführt worden sind, es ist daher nothwendig, dieselben für die in der Ausübung gewöhnlich eintretenden Fälle zu bestimmen und zugleich einige Nebenumstände zu berücksichtigen, welche bei der Entwickelung der Formeln noch nicht in Betracht gezogen werden konnten.

8) Die erste Bestimmung der Art betrifft die Einfallspuncte der Strahlen auf der ersten brechenden Fläche, deren Coordinaten, nebst einer davon abhängenden Constante, in den Formeln als beliebig angenommen wurden. Da nämlich in den Instrumenten häufig Blendungen angebracht werden, welche einen Theil der einfallenden Strahlen auffangen, so ist es nöthig, jene Coordinaten auf eine solche Weise auszudrücken, dass man in den Stand gesetzt wird, die durch die Blendungen unwirksam gewordenen Strahlen auszuschliessen.

Ich setze hiernach voraus, dass an einer beliebigen Stelle, in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene, eine die Lage der Strahlen bestimmende Blendung befindlich ist, welche ich die *Hauptblendung* nenne. Führt man nun in den Formeln statt der Coordinaten der Einfallspunkte der Strahlen, die ihrer Durchschnitte mit der Ebene der Hauptblendung ein, so wird der beabsichtigte Zweck erreicht, wenn man jene Durchschnitte stets so annimmt, dass

sie innerhalb der Oeffnung der Hauptblendung liegen. Die obige Voraussetzung ist übrigens allgemein und begreift selbst diejenigen Instrumente in sich, an welchen keine eigentliche Blendungen angebracht sind, indem bei diesen entweder die Fassung des Objectivs, oder die Pupille des hinter ihnen befindlichen Auges die Stelle der Hauptblendung vertritt.

9) Eine zweite Bestimmung ist in Bezug auf diejenigen Constanten nöthig, welche durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführt werden, und kleine Aenderungen in der Lage des leuchtenden Punktes sowohl, als des Einfallspunktes ausdrücken. Sie wurden in den allgemeinen Formeln beibehalten, um dieselben auf die Verbindung des Instrumentes mit dem Auge anwenden zu können, die als zwei Instrumente von derselben Art zu betrachten sind. Sobald aber nur von einem Instrumente die Rede ist, und der leuchtende Punkt eine unveränderliche Lage behält, sind alle jene Constanten $= 0$ und fallen daher aus den Formeln weg. Dagegen ist es in Bezug auf die Fernröhre wichtig, den Einfluss zu berechnen, den eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes auf die Lage der gebrochenen Strahlen äussert. Bliebe die Einrichtung des Fernrohres stets unverändert, so würde jener Einfluss ebenfalls durch die erwähnten Constanten bestimmt werden können; sobald man aber dasselbe nach verschieden entfernten Gegenständen richtet, verschiebt man zugleich die Oculare, um das von dem Objective hervorgebrachte Bild jederzeit deutlich zu sehen, und aus diesem Grunde kann das Fernrohr keineswegs als ein unveränderliches Instrument betrachtet werden. Es ist daher nöthig, hierüber eine besondere Untersuchung mit Berücksichtigung des letzteren Umstandes anzustellen, und die dadurch entstehenden Glieder den Formeln zuzusetzen.

10) Eine weitere, unserem Zwecke entsprechende Modification der Formeln wird durch die Einführung des *Hauptstrahles* bewirkt. Man verstand bekanntlich bisher unter jenem Strahle gewöhnlich denjenigen, welcher durch die Mitte der ersten brechenden Fläche, oder des ersten Glases geht, wenn seine Dicke vernachlässigt wird. Diese Definition hatte den Zweck, den Hauptstrahl zur Bestimmung der Lage der übrigen dazu gehörigen Strahlen zu benutzen, ein Zweck, welcher in der That erreicht wird, so oft in dem Instrumente keine abgesonderte Hauptblendung angebracht ist, die Fassung des Objectivs vielmehr ihre Stelle vertritt. In diesem Falle bilden nämlich die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen, ohne Rücksicht auf die Abweichungen, nach den verschiedenen Brechungen Kegel mit kreisförmigen Basen, deren Axen mit dem Hauptstrahle zusammenfallen, und in deren Scheitel sich die nach jenen Brechungen entstehenden Bilder befinden, wonach die Lage der Strahlen allerdings von der Lage des Hauptstrahles abhängt. Anders verhält sich aber die Sache, wenn, wie wir oben gethan haben, an einer beliebigen Stelle des Instrumentes eine Hauptblendung angenommen wird. Setzt

man, wie es gewöhnlich stattfindet, voraus, dass dieselbe die Gestalt eines Kreises hat, dessen Mittelpunct in der Axe des Instrumentes liegt, so bilden die Strahlen nach den verschiedenen Brechungen zwar ebenso, wie in dem vorhergehenden Falle, Kegel mit kreisförmigen Basen; ihre Axen fallen aber nunmehr mit demjenigen Strahle zusammen, dessen Durchschnittspunkt mit der Ebene der Hauptblendung in der Axe des Instrumentes liegt. Da nun der letztere Fall der allgemeine ist, welcher den ersteren in sich begreift, und bei der Entwickelung der Formeln vorausgesetzt wurde, so ist es zweckmässig, die Definition des Hauptstrahles hiernach abzuändern, so dass unter diesem der zuletzt erwähnte Strahl verstanden wird. Die folgenden Untersuchungen zeigen ferner, dass es am bequemsten ist, den auf diese Weise bestimmten Hauptstrahl von mittlerer Brechbarkeit anzunehmen, weil hierdurch alle auf die Undeutlichkeit sich beziehende Abweichungen in einer einzigen Formel begriffen werden, was bei der später gebrauchten Methode nothwendig ist.

Sehen wir jetzt den Hauptstrahl als eine Axe an, auf welche die Lage der übrigen dazu gehörigen Strahlen bezogen wird, so ist es leicht, die Gleichungen derselben hiernach zu modificiren, wozu weiter nichts erforderlich ist, als die beiden, auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Coordinaten eines jeden Strahles von dem seiner Abscisse zugehörigen Punkte des Hauptstrahles an zu zählen. Fügt man sodann zu den auf diese Weise ausgedrückten Gleichungen noch die des Hauptstrahles, welche ohne Mühe aus den allgemeinen Gleichungen erhalten werden, so reichen dieselben hin, um die Lage der Strahlen, nicht nur gegen den Hauptstrahl, sondern auch gegen die Axe des Instrumentes zu bestimmen, und treten daher an die Stelle der ursprünglich gefundenen Gleichungen.

11) Die ohne Anwendung von Näherungen erhaltenen Gleichungen der einfallenden Strahlen können auf ähnliche Weise behandelt werden, wie es bei den gebrochenen Strahlen geschehen ist, um daraus Näherungsformeln abzuleiten. Die letzteren folgen aber auch unmittelbar aus denen der gebrochenen Strahlen, wenn man voraussetzt, dass jeder Strahl, ehe er die erste brechende Fläche trifft, durch eine eingebildete Fläche gegangen ist, welche mit jener zusammenfällt und keine brechende Kraft ausübt, bei welcher Voraussetzung der durch die eingebildete Fläche gebrochene Strahl mit dem einfallenden einerlei ist.

12) Nachdem auf diese Weise die Gleichungen der einfallenden und gebrochenen Strahlen auf eine für die Ausübung bequeme Art entwickelt worden sind, können dieselben auf die vorzüglichsten, allgemeinen Probleme der Optik angewandt werden. Diese Probleme sind von zweierlei Art; bei einigen nämlich genügt eine genäherte Auflösung, so dass die Grössen der ersten Ordnung hierzu hinreichen, andere hingegen erfordern die Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnungen. Behält man nun in den nach dem Obigen entwickelten Formeln nur die ersteren Grössen bei, so werden dadurch die Auf-

lösungen der Probleme der ersten Ordnung sehr leicht erhalten. Zu den hierdurch bestimmten Gegenständen gehören: die Vereinigungsweiten, sowohl der Hauptstrahlen, als der übrigen dazu gehörigen Strahlen, die Lage und Grösse der Bilder, die Winkel zwischen den Projectionen der Strahlen und der Axe des Instrumentes, die verschiedene Lage der gebrochenen Strahlen, die wegen der Helligkeit und des Gesichtsfeldes erforderlichen Oeffnungen der brechenden Flächen und derjenigen Blendungen, welche ausser der Hauptblendung noch im Instrumente vorhanden sind.

Eine besondere Untersuchung wird durch die verschiedene Einrichtung der Instrumente veranlasst. Einige nämlich, welche ich *Instrumente der ersten* Art nenne, z. B. die Camera obscura etc. entwerfen von dem Gegenstande ein Bild auf einer Ebene, bei andern dagegen, den *Instrumenten der zweiten Art,* fallen die Strahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das dahinter befindliche Auge. Die letzteren machen eine approximative Berechnung des Auges nothwendig, um sodann auf die Verbindung desselben mit dem Instrumente überzugehen, welche ich unter zwei verschiedenen Voraussetzungen betrachte. Es kann nämlich zuerst angenommen werden, dass sich das Auge, ohne seinen Ort zu verändern, in der Axe des Instrumentes befindet, in welchem Falle beide zusammengenommen als ein System von brechenden Flächen anzusehen sind. Da jedoch die Erfahrung zeigt, dass das Auge bei unveränderter Lage seiner Axe nur ein sehr kleines Gesichtsfeld deutlich sieht, und sich daher successiv nach den verschiedenen Punkten eines Gegenstandes richtet, den es betrachten will, so untersuche ich auch noch die der Natur mehr entsprechende Hypothese, wonach das Auge bei dem Gebrauche optischer Werkzeuge zwar in einerlei Entfernung von der letzten brechenden Fläche bleibt, dagegen bei der Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes seine Axe so richtet, dass sie mit dem jenem Punkte correspondirenden Hauptstrahle zusammenfällt. Unter beiden Voraussetzungen bestimmen die Formeln den Ort des Auges, so oft er nicht willkührlich ist, und den Halbmesser des in das Instrument fallenden, wirksamen Strahlenkegels, wenn dieser von der Oeffnung der Pupille abhängt.

Ferner werden die zur Berechnung der Vergrösserung, der Lichtstärke und des Gesichtsfeldes erforderlichen Formeln für beide Arten von Instrumenten sehr leicht erhalten und auf eine solche Weise ausgedrückt, dass sie bei den folgenden Untersuchungen brauchbar sind.

In Bezug auf das Gesichtsfeld müssen wir jedoch noch eine Bemerkung machen. Das Gesichtsfeld hängt nämlich im Allgemeinen von den Oeffnungen der brechenden Flächen ab. Sobald man nun bei den Ocularen die Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe vernachlässigt, wie es in den bisher gebräuchlichen Näherungsformeln geschah, so entsteht die Besorgniss, dass jene unbekannten

Abweichungen allzu bedeutend werden möchten, wenn die Oeffnungen die wegen des Gesichtsfeldes erforderliche Grösse erhalten. Diess veranlasste Eulern, in den Formeln die so genannten Oeffnungsmaasse (rationes aperturarum) einzuführen, worunter er die in aliquoten Theilen der Brennweiten ausgedrückten Oeffnungshalbmesser versteht; damit man in den Stand gesetzt wird, die Einrichtung des Instrumentes so zu treffen, dass bei keiner brechenden Fläche die Oeffnung einen, als zulässige Grenze angenommenen, aliquoten Theil ihres Krümmungshalbmessers übersteigt. Werden dagegen, wie es hier geschieht, die erwähnten Abweichungen berücksichtigt und in den einzelnen Fällen ihre Grösse berechnet, so fällt jene Besorgniss weg, und es zeigt sich bei der Ausübung, dass oft gerade solche Einrichtungen den Vorzug verdienen, bei denen die in aliquoten Theilen der Krümmungshalbmesser ausgedrückten Oeffnungen grössere Werthe erhalten. Hiernach hat bei der den Formeln von mir gegebenen Einrichtung die Einführung der Oeffnungsmaasse in dieselben keinen Zweck, und es ist vorzuziehen, diejenigen Bezeichnungen zu wählen, welche die Berechnung der Coefficienten am meisten erleichtern. Aus dieser Betrachtung erhellet übrigens, dass das Gesichtsfeld nur durch die Verminderung der Abweichungen ausserhalb der Axe vergrössert werden kann, deren Berechnung daher auch in dieser Beziehung sehr nothwendig ist.

13) Die Auflösung der Probleme höherer Ordnungen erfordert eine nähere Betrachtung der Abweichungen, wozu die gefundenen Gleichungen der gebrochenen Strahlen in der Nähe des Bildes ein leichtes Mittel an die Hand geben. Da wir nämlich den Hauptstrahl als eine Axe angesehen haben, von welcher die beiden, auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Coordinaten der übrigen Strahlen gezählt werden, so drücken diese Coordinaten die der Abscisse entsprechenden und parallel mit den Coordinatenaxen gemessenen Entfernungen der Strahlen von dem Hauptstrahle aus, und können die *Seitenabweichungen* derselben genannt werden. Je kleiner sie bei dem dazu gehörigen Bilde sind, desto mehr nähert sich die Lage der Strahlen derjenigen, welche einer vollkommenen Deutlichkeit entspricht, indem sie alsdann den Hauptstrahl sämmtlich in einem Punkte durchschneiden würden. Für die folgenden Untersuchungen ist es bequem, in den Ausdrücken der Seitenabweichungen die Coordinaten des Einfallspunktes auf der ersten brechenden Fläche in Polarcoordinaten zu verwandeln, deren Ursprung im Hauptstrahle liegt. Die auf diese Weise ausgedrückten Formeln enthalten entweder Potenzen von trigonometrischen Functionen des als Abscisse dienenden Winkels, oder trigonometrische Functionen der Vielfachen desselben. Da wir die Entwickelung nur bis zur dritten Ordnung fortgesetzt haben, so bestehen die Ausdrücke der Seitenabweichungen aus Gliedern, welche theils zur zweiten, theils zur dritten Ordnung gehören. Die ersteren geben die verschiedenen Abweichungen,

deren bedeutendste Theile sie ausmachen, abgesondert an, nämlich die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung in und ausser der Axe; die letzteren enthalten kleine Correctionen, welche zur genaueren Berechnung der Abweichungen an jenen angebracht werden müssen. Uebrigens gelten diejenigen Glieder, welche sich auf die Abweichungen in der Axe beziehen, auch für die ausserhalb derselben liegenden Punkte, und es kommen bei diesen nur noch die übrigen hinzu, die für sie allein gültig sind. Ferner müssen wir bemerken, dass die Formeln, nach der ihnen gegebenen Einrichtung, ausser den eigentlichen Abweichungen auch noch die zur ersten Ordnung gehörigen Glieder enthalten, welche in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen vorkommen, und um desswillen berücksichtigt werden müssen, weil es erforderlich ist, die Entfernung der Strahlen von dem Hauptstrahle in der Nähe des letzten Bildes zu berechnen, diese aber ebenso von jenen Gliedern, wie von den eigentlichen Abweichungen abhängt, mit denen sie daselbst von einerlei Ordnung sind.

Betrachten wir insbesondere diejenigen Strahlen, welche in gleicher Entfernung von dem Hauptstrahle auf die erste brechende Fläche fallen, denken wir uns sodann dieselben in der durch die Abscisse ausgedrückten Entfernung durch eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene geschnitten, so können wir die auf derselben stattfindenden Seitenabweichungen durch eine geometrische Construction versinnlichen. Die Ausdrücke der beiden Seitenabweichungen enthalten nämlich mehrere Paare von Gliedern, die von demselben Vielfachen des bei den Polarcoordinaten als Abscisse angenommenen Winkels abhängen. Wäre nur eines dieser Paare vorhanden, so würden die Durchschnittspuncte aller Strahlen mit der erwähnten Ebene in dem Umfange einer Ellipse liegen, welche sich bei einigen derselben in einen Kreis verwandelt. Wir können uns daher die Werthe der Seitenabweichungen aus der Summe der Coordinaten der den einzelnen Gliedern zugehörigen Ellipsen und Kreise zusammengesetzt denken, wozu ausserdem noch einige beständige Glieder kommen.

Die Abweichungen des Hauptstrahles können auf ähnliche Weise vermittelst seiner Gleichungen bestimmt werden, wie es bei den übrigen Strahlen geschehen ist; sie beziehen sich aber blos auf die Gestalt, da wir den Hauptstrahl von mittlerer Brechbarkeit angenommen haben. Dagegen sind die von der Farbenzerstreuung abhängigen Abweichungen desselben unter den Seitenabweichungen enthalten und bilden denjenigen Theil der letzteren, durch welchen der farbige Rand hervorgebracht wird.

14) Befindet sich der leuchtende Punkt in der Axe des Instrumentes, so schneiden sich bekanntlich alle in einerlei Entfernung von derselben einfallende, gleich gefärbte Strahlen in einem ihr zugehörigen Punkte, dessen Entfernung von dem Vereinigungs-

punkte der Centralstrahlen mittlerer Brechbarkeit die *Längenabweichung* genannt wird. Liegt dagegen der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, so tritt der Hauptstrahl an die Stelle der letzteren. Die Formeln zeigen aber, dass alsdann die auf ähnliche Weise einfallenden Strahlen sowohl den Hauptstrahl als sich wechselseitig nur in einzelnen Fällen durchschneiden, daher die Benennung *Längenabweichung* in dem angegebenen Sinne nicht hierauf ausgedehnt werden kann. Will man sie daher allgemein gebrauchen, so muss man ihr eine andere, auf alle Fälle passende, Bedeutung geben, welche die bisher gebräuchliche in sich begreift. Diess geschieht z. B. wenn man durch die Längenabweichung eines Strahles den Unterschied zwischen den, mit und ohne Rücksicht auf die Abweichungen berechneten, Abscissen seines Duchschnittspunktes mit derjenigen coordinirten Ebene bezeichnet, in welcher sich der leuchtende Punkt befindet. Uebrigens werden bei den Anwendungen nach der von mir gewählten Methode nur die Seitenabweichungen, und keineswegs die Längenabweichungen gebraucht, daher es unnütz ist, sich mit diesen weiter zu beschäftigen.

15) Um die für die Seitenabweichungen gefundenen Formeln auf die verschiedenen Instrumente anzuwenden, ist es nothwendig, die beiden Classen zu unterscheiden, in welche wir dieselben abgetheilt haben.

Bei den Instrumenten der ersten Art, die ein Bild des Gegenstandes auf einer Projectionsebene entwerfen, finden die erwähnten Formeln unmittelbar ihre Anwendung, wenn man unter der Abscisse den Abstand der Projectionsebene von der letzten brechenden Fläche versteht, indem alsdann nicht nur die Coordinaten des Durchschnittes des Hauptstrahles mit jener Ebene, sondern auch die auf derselben stattfindenden Seitenabweichungen der übrigen Strahlen durch die Formeln ausgedrückt werden.

16) In Bezug auf die Intrumente der zweiten Art, bei denen die Lichtstrahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das Auge fallen, müssen wir die Durchschnittspunkte derselben mit der Netzhaut suchen, um die auf dieser entstehenden Abweichungen zu bestimmen. Wegen der Kleinheit der von dem Auge herrührenden Theile der letzteren ist es erlaubt, die brechenden Flächen desselben und die Netzhaut als sphärisch zu betrachten. Nimmt man nun, wie es oben geschehen ist, zuerst an, dass sich das Auge, ohne seinen Ort zu verändern, in der Axe des Instrumentes befindet, so geben die Formeln sehr leicht die Seitenabweichungen der Strahlen auf der Netzhaut.

Mühsamer wird die Untersuchung bei der zweiten, oben gemachten Hypothese, wonach das Auge bei der Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes stets seine Axe nach dem dazu gehörigen Hauptstrahle richtet. Da nämlich bei dieser Voraussetzung die Axen des Instrumentes und des Auges nicht in eine gerade Linie

fallen, so ist es zuerst nothwendig, die Coordinaten der Strahlen nach ihrer letzten Brechung durch das Instrument in andere zu verwandeln, welche mit denen im Auge einerlei Ursprung und Coordinatenaxen haben. Hierdurch bestimmen sich in Bezug auf das Auge die Constanten, welche in den Ausdrücken der Seitenabweichungen vorkommen, so dass durch die letzteren die auf der Netzhaut entstehenden Abweichungen berechnet werden können. In beiden Fällen bleiben die allgemeinen Formeln der Form nach ungeändert, indem nur ihr gemeinschaftlicher Factor eine Aenderung erleidet und einige Glieder hinzukommen, welche grösstentheils von den Brechungen im Auge und von der Krümmung der Netzhaut herrühren und sich mit denen vereinigen, die sich auf das Instrument beziehen und gleiche Argumente haben.

17) In den vorhergehenden Auflösungen haben wir bei den Instrumenten der zweiten Art die Abweichungen auf die Netzhaut des Auges bezogen, es kann jedoch auch von Interesse sein, sie unmittelbar kennen zu lernen. Um dieses auf eine bequeme Weise zu bewerkstelligen, nehme ich einen beliebigen, vorerst noch unbestimmten Punkt des Hauptstrahles in der Nähe des letzten, im Instrumente entstehenden Bildes, und ziehe von demselben nach den Einfallspunkten der Strahlen auf der Hornhaut des Auges in Gedanken Linien, welche ich die *hypothetischen Strahlen* nenne. Fielen nun mit diesen die wirklichen Strahlen zusammen, so würde eine vollkommene Deutlichkeit statt finden. Bestimmt man daher die Winkel zwischen beiden, und projicirt sie auf zwei, durch den Hauptstrahl gelegte coordinirte Ebenen, so sind diese projicirten Winkel diejenigen, um welche die Projectionen der Strahlen von der Lage abweichen, die einer vollkommenen Deutlichkeit entsprechen würde. Sie können mithin die *Winkelabweichungen* genannt werden. Auch ihre Ausdrücke haben dieselbe Form, wie die der Seitenabweichungen, so dass die letzteren mit einigen Modificationen auf alle betrachtete Fälle anwendbar sind.

18) Sowohl bei den Instrumenten der ersten, als der zweiten Art ist es eine nothwendige Bedingung, dass das Bild, welches entweder auf der Projectionsebene, oder der Netzhaut entworfen wird, so genau wie möglich mit diesen zusammenfällt, welche ich mit dem gemeinschaftlichen Namen *Projectionsfläche* bezeichne. Ist bei der Construction der optischen Werkzeuge schon darauf Rüchsicht genommen, dass jener Bedingung sehr nahe Genüge geleistet wird, so kann eine vollkommene Erfüllung derselben durch kleine, bei dem Gebrauche vorgenommene Veränderungen, sey es durch eine Verschiebung der Projectionsfläche, oder durch Abänderungen in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen, bei Microscopen auch durch eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes, bewirkt werden. Solche Veränderungen bringen in den Formeln Glieder hervor, welche mit den ursprünglich zur ersten

Ordnung gehörigen einerlei Argumente haben, und daher mit diesen vereinigt werden können. Ihre Grösse würde sich jedoch nur dann berechnen lassen, wenn die vorgenommenen Veränderungen genau bekannt wären, was aber, namentlich bei dem Auge, nicht der Fall ist; die folgenden Untersuchungen zeigen indessen, dass eine solche genaue Kenntniss jener Glieder für die Ausübung kein Interesse hat, und dass es genügt, die Form zu kennen, unter welcher sie in den Formeln vorkommen.

19) Eines der wichtigsten, zu den höheren Ordnungen gehörigen Probleme ist die Bestimmung der grösstmöglichen Deutlichkeit bei den optischen Instrumenten. Obgleich die für die Berechnung der Abweichungen gefundenen Formeln die Grundlagen zur Auflösung jenes Problemes bilden, so ist es doch schwierig, daraus unmittelbar unzweideutige Resultate zu erhalten, weil sich die Formeln nur auf einen leuchtenden Punkt und einen von ihm ausgehenden Lichtstrahl beziehen, und sich daraus nicht leicht übersehen lässt, auf welche Weise man dazu gelangen kann, die Abweichungen bei allen, den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Strahlen so klein als möglich zu machen. Es ist daher nothwendig, eine Methode aufzusuchen, wodurch jene Schwierigkeiten beseitigt werden. Keine erfüllt diesen Zweck leichter als die in so vielen anderen Fällen mit grossem Vortheil gebrauchte Methode der kleinsten Quadrate, über deren Anwendung in dem vorliegenden Falle jedoch einige Bemerkungen gemacht werden müssen. Wären keine Abweichungen vorhanden, so würden alle von einem Punkte des Gegenstandes ausgehende Strahlen den ihm entsprechenden Hauptstrahl in einem Punkte durchschneiden, und in diesem ein vollkommen deutliches Bild des ersteren hervorbringen. Könnte nun die Projectionsfläche eine solche Gestalt und Lage erhalten, dass die Bilder von sämmtlichen Punkten des Gegenstandes auf dieselbe fielen, so würde darauf eine vollkommen deutliches Bild des ganzen Gegenstandes entstehen. Anders verhält sich aber die Sache in der Wirklichkeit. Die demselben leuchtenden Punkte zugehörigen Strahlen durchschneiden wegen ihrer Abweichungen die Projectionsfläche, welche Lage ihr auch gegeben wird, in verschiedenen, mit dem Durchschnittspunkte des Hauptstrahles nicht zusammenfallenden Punkten, und bringen dadurch einen kleinen erleuchteten Raum, statt eines einzigen Punktes, mithin ein undeutliches Bild hervor.

Hiernach können wir bei jedem Strahle die Entfernung zwischen seinem Durchschnittspunkte mit der Projectionsfläche und dem des entsprechenden Hauptstrahles als den Fehler betrachten, welcher Undeutlichkeit verursacht. Nach der Methode der kleinsten Quadrate wird daher diejenige Einrichtung des Instrumentes in Bezug auf die Deutlichkeit den Vorzug verdienen, bei welcher die Summe der Quadrate jener Fehler der sämmtlichen Strahlen so klein als möglich wird, welches durch eine vermittelst jener Methode zu erhaltende

Bestimmung der bei seiner Construction willkührlich gebliebenen Grössen zu bewirken ist. Von der gewöhnlichen Anwendung der erwähnten Methode unterscheidet sich aber dieser Fall dadurch, dass die Summe der Quadrate der Fehler, welche sonst eine endliche Summe ist, hier wegen der unzähligen Menge der Strahlen durch die Integralrechnung gesucht werden muss.

Da wir den Hauptstrahl als eine Axe angenommen haben, auf welche die Lage der übrigen, dazu gehörigen Strahlen bezogen wird, so sind die auf der Projectionsfläche entstehenden Seitenabweichungen als zwei, auf jener Fläche gezogene, rechtwinkelige Coordinaten zu betrachten, wodurch die Lage des Durchschnittspunktes eines jeden Strahles gegen den Durchschnittspunct des Hauptstrahles bestimmt wird; es ist daher leicht, das Quadrat der als Fehler betrachteten Entfernung zwischen beiden Durchschnittspunkten aus den Seitenabweichungen zu berechnen.

20) Betrachten wir zuerst nur einen einfallenden Strahl, welchen ich von weisser Farbe annehme. Um die unzähligen, verschieden gefärbten Strahlen, woraus ein weisser zusammengesetzt ist, von einander zu unterscheiden, hatten wir oben einen von ihnen nach Willkühr ausgewählt und ihn den mittleren genannt, ohne jedoch eine Bestimmung über seine Farbe, oder, was hiermit einerlei ist, über seine Lage im prismatischen Farbenbilde zu machen, in Bezug auf die übrigen farbigen Strahlen dagegen hatten wir den Unterschied zwischen ihrem Brechungsverhältnisse und dem des mittleren Strahles in den Formeln eingeführt. Jedem dieser farbigen Strahlen gehört das Quadrat eines Fehlers, nach der obigen Definition, zu, dessen Werth aus den allgemeinen Formeln erhalten wird, wenn man dem erwähnten Unterschiede des Brechungsverhältnisses denjenigen Werth beilegt, welcher der jedesmaligen Farbentinte des Strahles entspricht. Da nun jener Unterschied als eine stetige, veränderliche Grösse zu betrachten ist, so erhält man sehr leicht, vermittelst der Integralrechnung, die Summe der Quadrate der Fehler für sämmtliche, zu einem einfallenden Strahle gehörige farbige Strahlen. Hierbei ist es jedoch nothwendig, auf den durch die Erfahrung constatirten Umstand Rücksicht zu nehmen, dass die verschiedenen farbigen Strahlen eine sehr ungleiche Wirkung in unserem Auge hervorbringen. Zur Erreichung dieses Zweckes wird weiter nichts erfordert, als das einem jeden Strahle zugehörige Quadrat des Fehlers vor der Integration mit einem Factor zu multipliciren, welcher eine Function von der Lage des Strahles im Spectrum ist, und hier die Stelle der bei der Methode der kleinsten Quadrate gebräuchlichen Gewichte vertritt, vorerst aber noch unbestimmt gelassen wird.

Eine bemerkenswerthe Vereinfachung der Formeln bietet eine schickliche Bestimmung der nach dem Obigen bis jetzt noch unbestimmt gebliebenen Lage des mittleren Strahles im prismatischen

Farbenbilde dar. Da uns nämlich die Sache selbst keine Gründe hierzu an die Hand giebt, so ist es erlaubt, diejenige Wahl zu treffen, welche die Rechnung am meisten erleichtert. Diese besteht darin, dass man als mittleren Strahl denjenigen annimmt, dessen Brechungsverhältniss das arithmetische Mittel aus den Brechungsverhältnissen sämmtlicher farbigen Strahlen, mit Rücksicht auf ihre verschiedene Wirksamkeit, ist. Bei jener Annahme fallen alle Glieder weg, welche nach der Entwickelung des Quadrates des Fehlers mit der ersten Potenz des Unterschiedes des Brechungsverhältnisses multiplicirt sind; dagegen verwandeln sich die Potenzen desselben nach der Integration in Zahlencoefficienten, welche jedoch erst berechnet werden können, wenn der als Gewicht dienende Factor zuvor eine Bestimmung erhalten hat.

21) Nachdem auf diese Weise die Summe der Quadrate der Fehler für einen einfallenden Strahl gefunden worden ist, so können wir sie für sämmtliche Strahlen berechnen, welche von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehen. Mit Vernachlässigung derjenigen Grössen, welche hierbei nicht in Betracht kommen, bilden die Durchschnittspunkte jener Strahlen mit der ersten brechenden Fläche einen Kreis, auf dessen Fläche sie gleichförmig vertheilt sind, und dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt des Hauptstrahles ist. Theilt man daher diese Fläche in unendlich kleine Elemente, so ist die Anzahl der auf eines derselben fallenden Strahlen seinem Flächeninhalte proportional. Für jeden Strahl ist aber die Summe der Quadrate der von seinen verschiedenen farbigen Strahlen herrührenden Fehler durch die vorhergehende Rechnung bekannt, es ist daher leicht, jene Summe zuerst auf das Element, und dann vermittelst der Integralrechnung auf die ganze Fläche des Kreises auszudehnen, innerhalb welches die Strahlen auf die erste brechende Fläche fallen. Die letztere Rechnung wird durch die Form sehr erleichtert, welche wir den Ausdrücken der Seitenabweichungen gegeben haben, wonach die Einfallspuncte der Strahlen durch Polarcoordinaten bestimmt wurden. Eines Theils verwandelt sich nämlich der Radius vector nach der Integration in den Halbmesser des erwähnten Kreises, anderen Theils fallen alle Glieder weg, welche nach der Integration trigonometrische Functionen des als Abscisse dienenden Winkels enthalten, wodurch die zuletzt gefundene Formel sehr vereinfacht wird.

Da es bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf beständige Factoren nicht ankommt, so kann man statt der Grösse, welche durch jene Formel ausgedrückt wird, eine andere einfachere einführen. Nach der obigen Auseinandersetzung ist nämlich dieselbe die Summe der Quadrate der Fehler sämmtlicher Strahlen, welche von dem angenommenen Punkte des Gegenstandes in das Instrument fallen, mit Rücksicht auf ihre verschiedene Wirksamkeit. Dividirt man nun jene Summe durch die Anzahl der erwähnten Strahlen,

ebenfalls mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit, so erhält man das arithmetische Mittel aus den Quadraten der Fehler dieser Strahlen, welches ich zur Abkürzung die *absolute Undeutlichkeit* des in dem Gegenstande gewählten Punktes nennen werde.

22) Die oben gemachte Annahme, wonach der Ursprung der Seitenabweichungen stets in den entsprechenden Punkt des Hauptstrahles gelegt wurde, ist rein willkührlich; es giebt jedoch eine andere gerade Linie, deren Lage durch die Methode der kleinsten Quadrate leicht bestimmt werden kann, und welche die Eigenschaft hat, dass die auf die angegebene Weise berechnete Summe der Quadrate der Fehler so klein als möglich wird, wenn jedesmal der, der Abscisse zugehörige Punkt derselben den Ursprung der Coordinaten bildet. Diese Linie nenne ich die *Axe des Strahlenbündels.* Sie befindet sich, ebenso wie der Hauptstrahl, in der durch den leuchtenden Punkt und die Axe des Instrumentes gelegten Ebene, und unterscheidet sich von dem letzteren nur durch Grössen von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen, daher ihre Gleichungen aus denen des Hauptstrahles, und die ihr entsprechende absolute Undeutlichkeit aus dem nach dem Obigen gefundenen Ausdrucke derselben, durch kleine Modificationen erhalten werden. Auch kann sich das Auge eben so gut nach ihr richten, als nach dem Hauptstrahle, wie es bei den Instrumenten der zweiten Art vorausgesetzt wurde. Da nun der Zweck der gegenwärtigen Untersuchung der ist, die Bedingungen zu finden, unter welchen die Undeutlichkeit möglichst vermindert wird, so dürfen wir nicht ihren Werth durch eine willkührliche Annahme des Ursprungs der Seitenabweichungen vergrössern, und müssen daher denjenigen wählen, welcher sich auf die Axe des Strahlenbündels bezieht.

23) Wir haben bereits oben angeführt, dass die demselben Punkte des Gegenstandes zugehörigen Strahlen sich nach der letzten Brechung nicht in einem Punkte vereinigen, mithin kein Bild der Art hervorbringen, wie es bei einer vollkommenen Deutlichkeit statt finden würde. Es entsteht daher die Frage, welche Definition des Bildes wir bei unvollkommener Deutlichkeit aufstellen müssen, wozu sich mehrere Ideen darbieten.

Verstehen wir zuerst unter dem Bilde denjenigen Raum, in welchem die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen so nahe wie möglich bei einander liegen, so dient der Ausdruck der absoluten Undeutlichkeit dazu, den Ort desselben zu bestimmen, wozu weiter nichts erforderlich ist, als diejenige Abscisse zu suchen, bei welcher jener Ausdruck ein Minimum wird. Da hiernach an dieser Stelle die sämmtlichen zu dem Strahlenbündel gehörigen Strahlen so nahe wie möglich bei seiner Axe liegen, so ist der entsprechende Punkt der letzteren als ein Mittelpunkt des Bildes zu betrachten, welcher mit dem Bilde selbst verwechselt werden kann, wenn man von der durch die Abweichungen entstehenden Grösse desselben abs-

trahirt. Unter dieser Voraussetzung erhält man die übrigen Coordinaten des Bildes aus den für die Axe des Strahlenbündels gefundenen Gleichungen.

Betrachten wir den Gegenstand als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene, und nehmen wir an, dass das Instrument für alle Punkte desselben eine ungeänderte Einrichtung behält, so liegen die Bilder dieser Punkte in einer krummen Fläche, welche ich die *Bildfläche* nenne. Sie ist eine Revolutionsfläche, deren Umdrehungsaxe mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, und deren erzeugende Curve leicht bestimmt werden kann.

Bei der Entwickelung der auf die Lage der Bilder sich beziehenden Formeln müssen wir jedoch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die ohne Rücksicht auf die Abweichungen berechnete Entfernung des Bildes nur mässig ist, oder eine sehr bedeutende Grösse erhält. Sind in dem ersten Falle die zur dritten Ordnung gehörigen Glieder, welche in den Formeln vorkommen, so klein, dass sie vernachlässigt werden können, so ist die erzeugende Curve der Bildfläche sehr nahe ein Kegelschnitt. Bei bedeutenden Werthen jener Glieder dagegen ist die Curve von der vierten Ordnung und hat eine Gestalt, welche von den Zeichen der in ihrer Gleichung enthaltenen Grössen abhängt. Bisweilen ist nämlich die der letzten brechenden Fläche zugekehrte Seite derselben entweder ganz convex, oder ganz concav, bisweilen aber aus convexen und concaven Theilen zusammengesetzt.

Im zweiten, oben erwähnten Falle geben die Formeln ein für die Ausübung unbrauchbares Resultat, indem die dadurch bestimmte Entfernung der Bilder in gewisse Grenzen eingeschlossen ist, innerhalb deren sie alle mögliche positive und negative Werthe erhalten und selbst verschwinden kann, welches geschieht, wenn die Strahlen nach der letzten Brechung im Mittel sehr nahe parallel werden. Es ist aber leicht einzusehen, dass alsdann in einer kleinen Entfernung von der letzten brechenden Fläche kein brauchbares Bild entstehen kann, indem die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder, wovon jedes einen merklichen Raum einnimmt, sich mit einander vermischen. Die natürliche Camera obscura zeigt uns jedoch schon, dass in manchen Fällen ein brauchbares Bild möglich ist, wenn auch die vorhergehende Methode kein solches zu erkennen giebt. Setzen wir nämlich voraus, dass in dem Laden eines verfinsterten Zimmers eine kreisförmige Oeffnung angebracht ist, durch welche die von einem entfernten Gegenstande ausgehenden Strahlen auf eine Projectionsebene fallen, so entsteht der Erfahrung zu Folge auf jener ein Bild, welches, abgesehen von der Verminderung der Lichtstärke, bei grösserer Entfernung der Projectionsebene an Distinctheit gewinnt. Nach der obigen Definition würde aber dasselbe unmittelbar hinter der Oeffnung des Ladens angenommen werden müssen, weil an dieser Stelle die zu einem Strahlenbündel gehörigen Strahlen am nächsten bei einander und bei ihrer Axe liegen, mit

zunehmender Entfernung der Projectionsebene aber ihr Abstand sich ebenfalls vergrössert. Da jedoch alsdann die wechselseitigen Entfernungen der den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entsprechenden Bilder in einem stärkeren Verhältnisse zunehmen, so ist eine nothwendige Folge hiervon, dass sich die Bilder bei einer grösseren Entfernung der Projectionsebene mehr von einander trennen, und daher besser unterschieden werden können, so dass das ganze Bild distincter wird, obgleich die absolute Deutlichkeit seiner einzelnen Punkte abnimmt. Etwas Aehnliches tritt auch in dem oben untersuchten zweiten Falle ein.

24) Die vorhergehenden Betrachtungen zeigen uns deutlich, dass es bei der Bestimmung des Ortes des Bildes erforderlich ist, nicht nur auf die absolute Deutlichkeit seiner einzelnen Punkte, sondern auch auf die möglichste Absonderung der ihnen zugehörigen Bilder Rücksicht zu nehmen. Ein einfaches Mittel hierzu besteht darin, dass man den Ausdruck der absoluten Undeutlichkeit mit einem Factor multiplicirt, welcher der Anzahl von Punkten proportional ist, deren Bilder bei dem Bilde des Gegenstandes auf die Einheit des Flächenmaasses fallen. Dieses Product nenne ich die *relative Undeutlichkeit*. Sie unterscheidet sich von der absoluten Undeutlichkeit nur durch einen veränderten gemeinschaftlichen Factor.

Bestimmen wir jetzt den Ort des Bildes auf ähnliche Weise, wie es oben geschehen ist, indem wir die Abscisse suchen, bei welcher der Ausdruck der relativen Undeutlichkeit ein Minimum wird, so erhalten wir für dieselbe einen Werth, welcher mit demjenigen vollkommen übereinstimmt, den wir oben in Bezug auf die absolute Undeutlichkeit bei mässigen Entfernungen des Bildes gefunden haben, so dass die daraus abgeleiteten Resultate im gegenwärtigen Falle allgemein gültig sind, und die bei sehr grossen Entfernungen bemerkten Nachtheile gänzlich wegfallen.

Auch auf die natürliche Camera obscura angewandt liefert diese Methode das mit der Erfahrung übereinstimmende Resultat, dass die Distinctheit des Bildes zugleich mit der Entfernung der Projectionsebene zunimmt.

Wenn daher gleich die relative Undeutlichkeit bei der Bestimmung der Lage der Bilder den Vorzug verdient, so würde man doch meistens unbrauchbare Resultate erhalten, wenn man sich ihrer allein bei den Untersuchungen über die Deutlichkeit der Instrumente bedienen wollte, indem die absoluten Fehler nur dann dem Auge erträglich werden, wenn sie eine gewisse, durch die Erfahrung zu bestimmende Grenze nicht übersteigen, welches allein nach der absoluten Undeutlichkeit bemessen werden kann.

25) Nach einer bereits oben gemachten Bemerkung sind die Ausdrücke der Seitenabweichungen mit einigen Modificationen auch auf die Winkelabweichungen anwendbar. Eine Folge hiervon ist, dass auch die für die absolute Undeutlichkeit gefundene Formel

vermittelst jener Modificationen auf die Winkelabweichungen bezogen werden kann, wenn man unter den Fehlern der Strahlen die Winkel versteht, welche sie mit den, einer vollkommenen Deutlichkeit entsprechenden, hypothetischen Strahlen machen. Den unbestimmt gebliebenen Vereinigungspunkt der letzteren hatten wir in dem Hauptstrahle angenommen; da jedoch dieser später mit der Axe des Strahlenbündels verwechselt wurde, so findet dasselbe auch bei dem erwähnten Vereinigungspunkte statt. Bestimmen wir nun seine Abscisse dadurch, dass wir die auf die Winkelabweichungen sich beziehende Undeutlichkeit zu einem Minimum machen, so geben wir ihm dadurch eine solche Lage, dass die am Auge gebildeten Winkel zwischen den wirklichen und hypothetischen Strahlen im Mittel so klein als möglich werden, die ersteren daher dem Auge aus dem Vereinigungspunkte der letzteren zu kommen scheinen, so gut es wegen der Abweichungen geschehen kann. Hiernach ist jener Vereinigungspunkt als das Bild zu betrachten, wenn die Undeutlichkeit nach den Winkelabweichungen geschätzt wird. Die Rechnung zeigt, dass der Ort dieses Bildes vollkommen mit demjenigen übereinstimmt, welchen wir vermittelst der absoluten Undeutlichkeit bei mässigen Entfernungen des Bildes, vermittelst der relativen Undeutlichkeit aber allgemein erhalten haben.

Ueber die Beschaffenheit jenes Bildes müssen wir noch eine Bemerkung hinzufügen. Wir haben nämlich oben gesehen, dass die Fläche, in welcher sich dasselbe befindet, bisweilen zum Theil convex, zum Theil concav ist. Durch diese Gestalt wird in dem Auge ein ähnliches unangenehmes Gefühl hervorgebracht, als wenn man die Gegenstände durch nicht geschliffene, wellenförmige Fensterscheiben betrachtet. So oft daher jener Fall eintritt, ist es nothwendig, die Einrichtung des Instrumentes so weit abzuändern, dass der erwähnte Nachtheil beseitigt wird, wozu die Theorie die nöthigen Mittel an die Hand giebt. Er ist übrigens bei Instrumenten mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, deren Fassung die Stelle der Hauptblendung vertritt, nie zu befürchten.

26) Die in Bezug auf die Undeutlichkeit und die Lage der Bilder erhaltenen Resultate setzen weisses Licht voraus, es ist jedoch von Interesse, die Aenderungen kennen zu lernen, welche sie bei homogenem Lichte erleiden würden. Die hierzu erforderlichen Formeln lassen sich aus den vorhergehenden leicht ableiten und geben das Resultat, dass nicht nur der Ausdruck der Undeutlichkeit, sondern auch die Entfernung des Bildes und die Lage der Axe des Strahlenbündels sich abändern, wenn an die Stelle des weissen Lichtes homogenes von einer bestimmten Farbe gesetzt wird.

27) Der Ausdruck der absoluten Undeutlichkeit, welcher, wie wir oben gesehen haben, auch auf die relative und die den Winkelabweichungen entsprechende Undeutlichkeit angewandt werden kann, bildet hiernach die Grundlage der weiteren Untersuchungen über die Deutlichkeit, daher wir uns mit der Form und Bedeutung seiner ver-

schiedenen Glieder etwas näher beschäftigen wollen. Zuerst zeigt die Vergleichung desselben mit den Ausdrücken der Seitenabweichungen, dass er aus der Summe mehrerer quadratischer Glieder mit positiven Coefficienten besteht, welche sich im Wesentlichen auf eine der Abweichungen besonders beziehen, und aus den correspondirenden Gliedern der Seitenabweichungen durch Combinationen und Anbringung von Correctionen erhalten werden. Die bedeutendsten unter ihnen sind diejenigen, in welchen die Grössen der zweiten Ordnung vorkommen, und von denen sich eines auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe, zwei auf dieselbe ausserhalb der Axe, eines auf die Farbenzerstreuung in der Axe und eines auf den farbigen Rand beziehen. Hierauf folgen mehrere, von den Grössen der dritten Ordnung allein abhängige Glieder, welche kleine Correctionen der verschiedenen Abweichungen ausdrücken, und eines, welches von den kleinen Veränderungen im Instrumente und Auge herrührt.

Ferner zeigen die für das homogene Licht erhaltenen Resultate, dass die der Abweichung wegen der Gestalt entsprechenden Glieder bei jeder Farbentinte besondere Werthe erhalten, daher es nicht möglich ist, sie für alle farbige Strahlen zugleich, sondern nur für einen gewissen mittleren Werth des Brechungsverhältnisses, so klein als möglich zu machen. Die Methode der kleinsten Quadrate thut dieses in den erwähnten Gliedern, indem sie hierzu das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles nimmt, und nur noch eine kleine Correction der dritten Ordnung hinzufügt. Was sodann diejenigen Glieder betrifft, welche sich auf die Farbenzerstreuung in der Axe und den farbigen Rand beziehen, so drückt das erste derselben aus, dass das nach der obigen Methode bestimmte Bild, welches einer gewissen Gattung von farbigen Strahlen zugehört, einerlei Entfernung mit dem Bilde der mittleren Strahlen erhalten, das zweite Glied dagegen, dass jenes Bild in die Axe des Strahlenbündels fallen muss, wenn die davon herrührende Undeutlichkeit so klein als möglich werden soll. Es folgt aber aus den Formeln für homogenes Licht, dass dasselbe nicht bei allen farbigen Strahlen zugleich statt finden kann, daher durch die Erfüllung der erwähnten Bedingungen nur bewirkt wird, dass die sämmtlichen farbigen Bilder, so gut es im Mittel geschehen kann, einerlei Entfernung erhalten und so nahe wie möglich bei der Axe des Strahlenbündels liegen. Endlich drückt das von den kleinen Veränderungen im Instrumente und Auge abhängige Glied aus, dass, zur Erhaltung der grössten Deutlichkeit, das Bild vermittelst jener Veränderungen entweder an diejenige Stelle gebracht werden muss, wo sich die Projectionsfläche befindet, oder in die als gegeben betrachtete Entfernung von dem Auge, wenn von dem letzten, durch ein Instrument der zweiten Art entworfenen Bilde die Rede ist.

28) Wir haben in dem Vorhergehenden angenommen, dass die sämmtlichen Strahlen von einem bestimmten Punkte des Gegenstandes ausgehen, die für die Undeutlichkeit erhaltene Formel bezieht sich daher ebenfalls auf jenen Punkt, und kann dazu gebraucht werden, die willkührlichen Grössen des Instrumentes so zu bestimmen, dass das dazu gehörige Bild die möglichste Vollkommenheit erhält. Die Undeutlichkeit hängt aber von der Lage des Punktes gegen die Axe des Instrumentes ab, daher jene Bestimmungen nur für Punkte von gleicher Lage gültig sind. Da jedoch das Instrument nicht nur für diese, sondern für sämmtliche, innerhalb des Gesichtsfeldes liegende, Punkte gebraucht werden soll, so wird diejenige Einrichtung den Vorzug verdienen, bei welcher die Summe der Quadrate der Fehler, für die letzteren Punkte zusammengenommen, so klein als möglich wird. Um diese Summe zu erhalten, nehme ich den Gegenstand als eine kreisförmige Ebene an, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und gleichförmig mit leuchtenden Punkten übersäet ist. Wird diese Ebene in unendlich kleine Elemente getheilt, so ist die in jedem derselben befindliche Anzahl von leuchtenden Punkten seinem Flächeninhalte proportional. Da ferner durch die Berechnung der absoluten Undeutlichkeit die jedem Punkte entsprechende Summe der Quadrate der Fehler bekannt ist, so lässt sich dieselbe zuerst auf das Element, und dann vermittelst der Integralrechnung auf den ganzen Gegenstand ausdehnen, eben so wie es oben in Ansehung der auf die erste brechende Fläche fallenden Strahlen geschehen ist. Dividirt man sodann die auf diese Weise erhaltene Summe durch die nach denselben Grundsätzen berechnete Anzahl sämmtlicher Strahlen, welche von allen Punkten des Gegenstandes in das Instrument fallen, so erhält man das arithmetische Mittel aus den Quadraten der Fehler dieser Strahlen mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit, welches ich zur Abkürzung die *mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes* nenne. Ihr Ausdruck kann durch eine leichte Rechnung aus dem für einen einzelnen Punkt geltenden Ausdruck der absoluten Undeutlichkeit abgeleitet, und durch die oben erwähnten Modificationen auch auf die relative und die den Winkelabweichungen entsprechende Undeutlichkeit angewandt werden, wobei die Gestalt desselben und die Bedeutung seiner Glieder im Wesentlichen ungeändert bleiben.

29) Nach derselben Methode, welche wir bei der Bestimmung des einem einzelnen Punkte zugehörigen Bildes gebraucht haben, können wir den Ausdruck der mittleren Undeutlichkeit dazu benutzen, um in Bezug auf das ganze Bild des Gegenstandes diejenige Entfernung zu suchen, welche seinen verschiedenen Punkten zusammengenommen im Mittel so gut wie möglich entspricht, und welche ich die *mittlere Entfernung des Bildes* nenne. Die Rechnung zeigt, dass man das Reciproke derselben erhält, wenn man

aus den Reciproken der den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Entfernungen der Bilder das arithmetische Mittel nimmt.

30) Bei der einem einzelnen Punkte entsprechenden Undeutlichkeit wurde bereits bemerkt, dass das letzte Glied in dem Ausdrucke derselben von den kleinen Veränderungen im Instrumente und Auge abhängt. Ein ähnliches Glied kommt auch bei der mittleren Undeutlichkeit vor. Obgleich jene Veränderungen nicht mit der zur Rechnung erforderlichen Genauigkeit bekannt sind, so ist doch leicht einzusehen, dass sie für die in der Ausübung vorkommenden Fälle durch bekannte Grössen ausgedrückt werden können. Die Instrumente werden nämlich, eben so wie das Auge, bei dem jedesmaligen Gebrauche so gestellt, dass man die grösstmögliche Deutlichkeit erhält; es ist daher anzunehmen, dass jene Veränderungen hierbei durch Tâtonnement so bestimmt werden, wie sie dem Minimum der Undeutlichkeit entsprechen, wonach ihre Werthe durch den Ausdruck des letzteren gefunden werden können. Je nachdem man nun voraussetzt, dass durch das Einstellen des Instrumentes entweder für das ganze Gesichtsfeld im Mittel, oder für den in der Axe liegenden Punkt die grösstmögliche Deutlichkeit bewirkt werden soll, enstehen zwei verschiedene Ausdrücke der mittleren Undeutlichkeit, welche jedoch einerlei Form haben, und worin die erwähnten Veränderungen nicht mehr enthalten sind. Der erste derselben berücksichtigt alle Punkte des Gesichtsfeldes in gleichem Maasse, der zweite dagegen mehr die ausserhalb der Axe liegenden Punkte. Da nun das Höchste, was in Bezug auf die letzteren Punkte geschehen kann, darin besteht, dass die Abweichungen ausserhalb der Axe bei einer mittleren Einstellung des Instrumentes den in der Axe statt findenden gleich geachtet werden, so verdient die erste Formel den Vorzug und ist als die Grundformel zu betrachten, welche in Ansehung der Deutlichkeit bei der Construction der optischen Instrumente angewendet werden muss.

Wollte man noch weiter gehen und die verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes nicht auf gleiche Weise berücksichtigen, so könnte diess leicht durch die Einführung eines veränderlichen Factors vor der Integration geschehen, welcher das jedem Punkte beigelegte Gewicht ausdrückte. Da jedoch dieses der Willkühr überlassen bliebe, so ist es zweckmässiger, die erwähnte Formel ungeändert beizubehalten, indem es wegen der darin entstandenen Absonderung der verschiedenen Abweichungen leicht ist, jede derselben mehr oder weniger zu beachten.

31) Es bleibt jetzt noch übrig, einige Modificationen anzugeben, welche an dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit angebracht werden können, um ihn den einzelnen Fällen, die bei seiner Anwendung vorkommen, besser anzupassen.

Zuerst müssen wir bemerken, dass die früher in den Formeln enthaltenen Coordinaten des leuchtenden Punktes und des Einfalls-

punktes auf der ersten brechenden Fläche durch die Integrationen weggefallen sind, welche dazu dienten, die durch jenen Ausdruck bestimmte Summe zuerst auf alle, von einem Punkte in das Instrument fallende Strahlen, und dann auf sämmtliche Punkte des Gegenstandes auszudehnen, wogegen derselbe eine Function von dem Oeffnungshalbmesser der ersten brechenden Fläche wegen der Helligkeit und von der Tangente des halben Gesichtsfeldes geworden ist. Beide sind bisweilen nicht unmittelbar gegeben und es ist daher oft bequemer, statt des ersteren den correspondirenden Halbmesser der letzten brechenden Fläche, statt der letzteren aber die Tangente des halben, durch das Instrument vergrösserten Gesichtsfeldes, oder auch den wegen des Gesichtsfeldes erforderlichen Oeffnungshalbmesser einzuführen, was keinen Schwierigkeiten unterworfen ist.

Ausserdem wird bei zusammengesetzten Instrumenten die Rechnung oft dadurch erleichtert, dass man das Instrument in mehrere Systeme, z. B. Objectiv und Oculare, theilt und jedes System abgesondert berechnet. Die Formeln können in diesem Falle eine solche Einrichtung erhalten, dass es leicht wird, die Resultate jener abgesonderten Rechnungen zu verbinden und dadurch zu dem ganzen Instrumente überzugehen.

32) Wir haben bei der Entwickelung der die Farbenzerstreuung betreffenden Glieder dadurch eine Vereinfachung bewirkt, dass wir bei den verschiedenen brechenden Körpern den Unterschied zwischen den Brechungsverhältnissen eines beliebigen farbigen Strahles und des mittleren als eine Function des correspondirenden Unterschiedes in Bezug auf einen zur Vergleichung der übrigen dienenden Körper betrachtet haben. Hierdurch entstanden in den Ausdrücken der Seitenabweichungen Glieder, welche theils die erste, theils die zweite Potenz des letzteren Unterschiedes enthielten, und analoge Glieder in dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit hervorbrachten. Die abgesonderte Berechnung eines Theiles der letzteren kann dadurch erspart werden, dass man statt derselben eine Correction an dem Zerstreuungsverhältnisse anbringt. Dieses, welches ich das *corrigirte Zerstreuungsverhältniss* nenne, drückt alsdann den Quotienten aus, welchen man erhält, wenn man bei jedem brechenden Körper den Unterschied zwischen den Brechungsverhältnissen eines gewissen, durch die Theorie bestimmten, farbigen Strahles und des mittleren durch den correspondirenden Unterschied in Bezug auf den zur Vergleichung dienenden Körper dividirt.

33) Ein weiterer Umstand, auf welchen zuerst Herschel aufmerksam gemacht hat, kommt in Bezug auf die Deutlichkeit bei Fernröhren in Betracht. Diese können nämlich nur für eine gewisse, als gegeben betrachtete, Entfernung des Gegenstandes berechnet werden, welche man wegen des Gebrauches in der Astronomie gewöhnlich unendlich annimmt. Soll nun ein solches Fernrohr für Gegenstände in anderen Entfernungen verwendet werden, so sind

die Abweichungen nicht so genau aufgehoben, als bei derjenigen Entfernung, für welche das Instrument berechnet wurde. Es entsteht daher die Frage, ob es nicht möglich ist, durch eine besondere Einrichtung desselben jenen Fehler grösstentheils zu beseitigen. Um die nöthigen Untersuchungen hierüber anstellen zu können, haben wir bei der Entwickelung der Formeln sogleich auf eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes Rücksicht genommen, wodurch der Ausdruck der mittleren Undeutlichkeit auf die in der Ausübung vorkommenden Entfernungen angewandt werden kann. Beabsichtigt man nun, dieselben zwar alle, jedoch nicht in gleichem Maasse zu berücksichtigen, so gelangt man zu diesem Zwecke nach den obigen Principien dadurch, dass man den Ausdruck der mittleren Undeutlichkeit mit einem Factor multiplicirt, welcher das der jedesmaligen Entfernung beigelegte Gewicht ausdrückt, und ihn sodann vermittelst der Integralrechnung auf sämmtliche Entfernungen ausdehnt, bei denen das Instrument gebraucht werden soll. Hierdurch werden in der Formel statt jener Entfernungen zwei Grössen eingeführt, die sich aus der grössten und kleinsten derselben und den angenommenen Gewichten leicht berechnen lassen.

34) Da, wie wir oben gesehen haben, dieselbe Formel sowohl auf die absolute, als auch auf die relative und die den Winkelabweichungen entsprechende Undeutlichkeit angewendet werden kann, so ist eine Untersuchung darüber nöthig, in welchen Fällen die eine oder die andere jener Methoden, die Undeutlichkeit zu schätzen, den Vorzug verdient. Diese Untersuchung liefert das Resultat, dass es bei der Vergleichung mehrerer Instrumente mit gleichen Vergrösserungen einerlei ist, welche Methode man wählt, wenn nur bei allen dieselben Bilder, seyen es die letzten der Instrumente, oder die auf der Netzhaut entstehenden, unter sich verglichen werden. Soll dagegen untersucht werden, ob eine stärkere Vergrösserung in Vergleichung mit einer, als brauchbar befundenen, schwächeren von Nutzen seyn kann, so ist eine gleiche relative Deutlichkeit die geringste, und eine gleiche absolute Deutlichkeit die grösste Forderung, welche man an die stärkere Vergrösserung machen darf, so dass beide als die Grenzen zu betrachten sind, innerhalb welcher die Deutlichkeit der letzteren fallen muss. Diese Grenzen kehren sich um, wenn eine stärkere Vergrösserung zu Grund gelegt und danach eine schwächere construirt werden soll.

35) Hat das Instrument eine solche Einrichtung, dass zu demselben Objective mehrere Oculareinsätze gebraucht werden, so ist es nicht möglich, das erstere so anzuordnen, dass es jedem der letzteren so gut als möglich entspricht, weil die von ihnen hervorgebrachten Abweichungen verschieden sind, bei der Berechnung des Objectivs aber nur ein bestimmter Werth jeder Abweichung zu Grund gelegt werden kann. Es bleibt daher nichts Anderes übrig, als das Objectiv so zu construiren, wie es sämmtliche Oculareinsätze

im Mittel erfordern, wobei jedoch eine ungleiche Berücksichtigung derselben statt finden kann. Die hierzu nöthigen Formeln erhält man nach derselben Methode, welche bereits bei den verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes gebraucht wurde, indem man nämlich den Ausdruck der mittleren Undeutlichkeit zuerst auf einen Oculareinsatz bezieht, ihn dann mit einem Factor multiplicirt, welcher das demselben beigelegte Gewicht ausdrückt, und endlich die Summe in Bezug auf sämmtliche Oculareinsätze sucht. Hierdurch werden die von den Ocularen herrührenden Glieder durch andere ersetzt, die so zu betrachten sind, als gehörten sie einem mittleren Oculareinsatze zu, welcher bei der Berechnung des Objectivs gebraucht werden muss, damit dasselbe den sämmtlichen Oculareinsätzen zusammengenommen im Mittel so gut als möglich entspricht; wobei es nach dem oben Gesagten in der Willkühr steht, entweder die absolute oder die relative Deutlichkeit zu berücksichtigen.

36) Den bisherigen Untersuchungen lag die Voraussetzung zu Grund, dass die durch die Hauptblendung gehenden Strahlenbündel, welche sämmtlichen, innerhalb des Gesichtsfeldes liegenden Punkten des Gegenstandes zugehören, ungehinderten Durchgang durch das Instrument finden. Jene Annahme ist jedoch in zwei Fällen unstatthaft. Der erste derselben tritt bei denjenigen Instrumenten ein, in welchen kein wirkliches Bild zu Stande kommt. Da es nämlich alsdann nicht möglich ist, die Grenze des Gesichtsfeldes, wie es sonst geschieht, durch eine an dem letzten wirklichen Bilde angebrachte Blendung zu bestimmen, so wird dieses durch eine andere Blendung bewirkt, welche nach Umständen auch durch die Fassung von einer der brechenden Flächen ersetzt werden kann. Eine nothwendige Folge hiervon ist, dass dieselbe von den äussersten Strahlenbündeln, welche an der Stelle, wo sie sich befindet, einen merklichen Durchmesser haben, einen Theil abschneidet, der desto bedeutender wird, je weniger der entsprechende Punkt des Gegenstandes von der Grenze des Gesichtsfeldes entfernt ist; daher die Lichtstärke daselbst von der Grösse, welche sie im Innern des Gesichtsfeldes hat, nach und nach bis zu 0 abnimmt. Der zweite Fall kommt bisweilen bei Instrumenten vor, in denen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen, wenn eine darin abgesondert angebrachte, oder durch die Fassung einer brechenden Fläche gebildete Blendung keine hinlängliche Oeffnung hat, um alle Strahlen durchzulassen, welche durch die Hauptblendung und durch die am letzten wirklichen Bilde angebrachte Blendung gehen, so dass auch hier an der Grenze des Gesichtsfeldes ein Theil von jedem Strahlenbündel durch die Blendung abgeschnitten wird.

In beiden Fällen kann die oben gebrauchte Methode nur im inneren Theile des Gesichtsfeldes angewendet werden, wo dem Durchgange der Strahlenbündel kein Hinderniss im Wege steht; am Rande hingegen muss man die Grenzen der Integrale so be-

stimmen, dass sie sich blos auf die von der Blendung nicht aufgehaltenen Theile der Strahlenbündel beziehen. Die meisten Schwierigkeiten bieten dabei die durch die Bestimmung der Axe des Strahlenbündels eingeführten Glieder dar, indem ihre Integration, welche bei der Berechnung der mittleren Undeutlichkeit erforderlich ist, nach den bekannten Methoden nicht im Allgemeinen ausgeführt werden kann. Diess hindert jedoch nicht, in einzelnen Fällen nützliche Anwendungen hiervon zu machen.

Eine weitere Aenderung in den Grenzen der Integrale findet bei Spiegeltelescopen statt, wenn der Objectivspiegel in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung hat, wie es bei dem Gregorianischen und Cassegrain'schen Telescope der Fall ist, indem die Integrale alsdann nur auf den wirksamen Theil des Spiegels ausgedehnt werden dürfen. Da jedoch die Oeffnung gewöhnlich sehr klein ist, so hat dieselbe in der Regel nur einen unbedeutenden Einfluss auf das Resultat.

37) Nachdem wir in dem Vorhergehenden die Abänderungen angeführt haben, welche bei dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit vorgenommen werden können, um seine Anwendung in den verschiedenen Fällen möglich zu machen, können wir zu den Methoden übergehen, deren man sich bedienen muss, um dadurch die bei der Construction des Instrumentes willkührlich gebliebenen Grössen zu bestimmen. Da nun derselbe, wie wir oben gesehen haben, weiter nichts ist, als die mit einem beständigen Factor multiplicirte Summe der Quadrate der Fehler sämmtlicher Strahlen, so erreicht man den beabsichtigten Zweck nach der Methode der kleinsten Quadrate dadurch, dass man den erwähnten Ausdruck in Bezug auf jene willkührlichen Grössen zu einem Minimum macht, wodurch man auf die gewöhnliche Weise, vermittelst der Differentialrechnung, die erforderliche Anzahl von Gleichungen erhält. Diese Verfahrungsart ist jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, wenn die zu bestimmenden Grössen auf eine sehr complicirte Art in dem Ausdrucke der Undeutlichkeit vorkommen. Ausserdem treten auch bisweilen noch andere Rücksichten ein, wodurch man abgehalten wird, genau bei dem Minimum stehen zu bleiben. Man gelangt dann gewöhnlich am leichtesten zum Ziele, wenn man die Undeutlichkeit für mehrere Einrichtungen in der Nähe des Minimums numerisch berechnet, indem man hierdurch in den Stand gesetzt wird, nicht nur zu beurtheilen, wie weit man sich ohne Nachtheil von dem Minimum entfernen kann, sondern auch selbst dieses mit hinlänglicher Genauigkeit zu berechnen, wozu die Theorie die nöthigen Formeln an die Hand giebt.

Eine Erleichterung der Rechnung bietet in manchen Fällen die Absonderung der willkührlichen Grössen dar, sobald ein Theil von ihnen nur in einigen, zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten vorkommt, und diese durch einerlei Werthe derselben so klein werden können, dass sie den Grössen der dritten Ordnung gleich zu achten sind. Die Gleichungen des Minimums vereinfachen sich als-

dann dadurch, dass die von den Differentialen der letzteren abhängigen Glieder unmerkliche Werthe erhalten, daher es erlaubt ist, sie in jenen Gleichungen zu vernachlässigen.

Welche der angegebenen Methoden in jedem einzelnen Falle die zweckmässigste ist, lässt sich zuerst nach der Entwickelung der Formeln und nach der Erörterung der dabei eintretenden Nebenumstände beurtheilen; bei einigen Classen von Instrumtenen kann diess jedoch schon jetzt geschehen, wodurch für dieselben mehrere allgemeine Resultate erhalten werden.

38) Die ersten Instrumente, welche eine solche allgemeine Behandlung zulassen, sind diejenigen, welche mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven versehen und so eingerichtet sind, dass die brechenden Flächen des Objectivs nur sehr geringe Entfernungen von einander haben, und dass die Fassung des letzteren die Stelle der Hauptblendung vertritt. Hat das Instrument ausser dem Objective auch noch Oculare, so sondern sich die bedeutenderen Glieder von beiden so von einander ab, dass die oben erwähnte Erleichterung der Rechnung statt findet. Es hängen nämlich diejenigen Glieder, die sich auf die Abweichung wegen der Gestalt und auf die Farbenzerstreuung in der Axe beziehen, hauptsächlich von dem Objective, diejenigen dagegen, welche den beträchtlichsten Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe und den farbigen Rand betreffen, hauptsächlich von den Ocularen ab. Hierzu kommt noch ein Glied, welches den minder beträchtlichen Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe ausmacht und durch das Objectiv und die Oculare gemeinschaftlich hervorgebracht wird. Dieser Umstand macht es möglich, die Rechnung so abzutheilen, dass man vermittelst der Oculare die zum grössten Theil durch sie entstehenden Abweichungen zu heben oder zu vermindern sucht, durch das Objectiv dagegen diejenigen, auf welche die Oculare wenig Einfluss haben.

Sind die Oculare so beschaffen, dass dadurch der farbige Rand gehoben werden kann, so giebt die Theorie eine Gleichung, welche die möglichst vollkommene Vernichtung desselben bezweckt, mit Rücksicht auf die dabei anzubringenden Correctionen der dritten Ordnung.

Eine ähnliche Aufhebung kann aber in Ansehung der hauptsächlich von den Ocularen herrührenden Abweichnng wegen der Gestalt ausserhalb der Axe nicht statt finden, es bleibt daher nichts Anderes übrig, als sie so klein als möglich zu machen.

Haben die Oculare eine Einrichtung, welche die Vernichtung des farbigen Randes nicht gestattet, so fällt die hierzu erhaltene Gleichung weg, und man kann nur die Summe der hauptsächlich von den Ocularen abhängenden Glieder zu einem Minimum machen.

Sollen bei unverändertem Objective mehrere Oculareinsätze angebracht werden, so müssen diese Rechnungen für jeden derselben besonders geführt werden, worauf man diejenigen Grössen berechnen kann, welche sich auf einen ihnen entsprechenden mittleren Ocular-

einsatz beziehen und bei der Berechnung des Objectives zu Grund gelegt werden müssen.

Für das Objectiv erhält man hierauf zwei Gleichungen, welche die möglichst vollkommene Aufhebung der Abweichung wegen der Gestalt und der Farbenzerstreuung in der Axe bedingen, mit Rücksicht auf die Correctionen der dritten Ordnung und die kleinen, von den Ocularen herrührenden Glieder, die nach den vorhergegangenen Bestimmungen berechnet werden können.

Setzt man ein zweifaches Objectiv voraus, so enthält dasselbe drei willkührliche Grössen, zu deren Bestimmung daher die beiden gefundenen Gleichungen nicht hinreichen. Eine dritte Gleichung giebt der unbedeutendere noch nicht berücksichtigte Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe. Da jedoch derselbe, obgleich im Allgemeinen zur zweiten Ordnung gehörig, im gegenwärtigen Falle wegen der dabei statt findenden besonderen Umstände so klein wird, dass er zur dritten Ordnung gezählt werden kann, so ist es zweckmässiger, jene Gleichung nicht zu gebrauchen, sondern die sämmtlichen, noch übrig gebliebenen Glieder zusammengenommen zu berücksichtigen, indem man ihre Summe zu einem Minimum macht. Hierdurch erhält man ein Objectiv, welches sehr nahe die Bedingungen erfüllt, dass die Abweichungen in und ausser der Axe Minima werden, und dass das Objectiv für astronomische und terrestrische Gegenstände fast gleich brauchbar ist.

Behält man unter den erwähnten Gliedern nur dasjenige bei, welches sich auf die veränderliche Entfernung des Gegenstandes bezieht, so entsteht dadurch das von Herschel vorgeschlagene Objectiv, welches die Eigenschaft besitzt, dass es eben so gut für terrestrische als für astronomische Gegenstände benutzt werden kann.

Nimmt man endlich blos auf das Glied Rücksicht, welches den Einfluss der Abweichung wegen der Gestalt auf die Farbenzerstreuung in der Axe ausdrückt, so folgt daraus das von Gauss angegebene Objectiv, dessen Vorzug darin besteht, dass jene Farbenzerstreuung in Bezug auf die centralen und Randstrahlen gleich gut gehoben wird.

39) Es ist jetzt noch nöthig, einige Bemerkungen über die Berechnung des mittleren Oculareinsatzes und über die zu Grund zu legende Entfernung des Gegenstandes zu machen.

Wir haben oben gesehen, dass wir im Stande sind, durch die Wahl der den verschiedenen Oculareinsätzen beigelegten Gewichte den einen mehr als den andern zu berücksichtigen, und ausserdem die Formeln entweder auf die absolute, oder auf die relative Deutlichkeit zu beziehen. Legt man nun sämmtlichen Oculareinsätzen einerlei Gewichte bei, und macht sodann den Ausdruck von einer der beiden Undeutlichkeiten zu einem Minimum, so wird in beiden Fällen bei den stärkeren Vergrösserungen die oben gefundene Bedingung nicht erfüllt, wonach dieselben in Vergleichung mit den schwächeren Ver-

grösserungen nur dann von Vortheil sind, wenn ihre relative Undeutlichkeit wenigstens nicht grösser ist. Durch die Anwendung des Ausdrucks der absoluten Undeutlichheit gleichen sich aber die Fehler sehr gegen einander aus, statt dass im anderen Falle bedeutende Fehler auf die stärksten Vergrösserungen geworfen werden. Wollte man die erwähnte Bedingung bei allen Vergrösserungen erfüllen, so müsste man die stärkeren weit mehr berücksichtigen, wodurch aber die schwächeren verhältnissmässig viel schlechter werden würden.

Unter diesen Umständen erscheint es daher räthlich, sich wenigstens nicht weit von demjenigen Resultate zu entfernen, welches man erhält, wenn man sämmtlichen Oculareinsätzen einerlei Gewicht giebt, und die mittlere absolute Undeutlichkeit für sie zusammengenommen zu einem Minimum macht. Hat man hiernach eine Wahl getroffen, so ist es angemessen, für die einzelnen Oculareinsätze sowohl die absolute, als die relative Undeutlichkeit zu berechnen, um sich zu überzeugen, dass bei keinem derselben unzulässige Fehler entstehen.

Was sodann die Entfernung des Gegenstandes betrifft, so bestimmen die Formeln einen gewissen mittleren Werth derselben, welcher bei der Berechnung des Objectivs gebraucht werden muss, wenn es verschiedenen Entfernungen im Mittel so gut wie möglich entsprechen soll. Beabsichtigt man aber, das Fernrohr hauptsächlich bei astronomischen Gegenständen anzuwenden, so ist es vorzuziehen, dasselbe für diese allein zu berechnen, da sie die grösste Deutlichkeit erfordern, und nebenbei darauf Rücksicht zu nehmen, dass die von der veränderlichen Entfernung abhängigen Glieder keine bedeutende Werthe erhalten.

40) Da die achromatischen Objective eine sehr genaue Rechnung erfordern, so ist es von Interesse, die durch die Näherungsformeln erhaltenen Resultate vermittelst trigonometrischer Rechnung prüfen und nöthigenfalls genauer machen zu können. Zu diesem Ende bestimmen die Formeln, nicht nur bei der Abweichung wegen der Gestalt, sondern auch bei der Farbenzerstreuung in der Axe, die Einfallspunkte, und bei der letzteren auch die Brechungsverhältnisse zweier Strahlen, welche gleiche Vereinigungsweiten erhalten müssen, wenn jene Abweichungen so vollkommen als möglich gehoben werden sollen. Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, den Weg dieser Strahlen vermittelst der genauen Formeln zu berechnen und eine vollkommene Uebereinstimmung der Vereinigungsweiten durch kleine Abänderungen an den willkührlichen Grössen zu bewirken.

Eine ähnliche Methode lässt sich auch bei denjenigen Abweichungen anwenden, welche hauptsächlich von den Ocularen abhängen. In Bezug auf den farbigen Rand bestimmt nämlich die Theorie einen Punkt des Gegenstandes und die Brechungsverhältnisse zweier von ihm ausgehenden Strahlen, welche nach der letzten Brechung durch das Instrument parallel werden müssen, wenn eine möglichst vollkommene Vernichtung des farbigen Randes statt finden soll.

Hinsichtlich der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe ist die Berechnung der Lage dreier Strahlen erforderlich, um diejenige Grösse zu erhalten, welche hierbei zu einem Minimum gemacht werden soll.

41) Von den so eben betrachteten Instrumenten, bei denen die Fassung des Objectivs die Stelle der Hauptblendung vertritt, unterscheiden sich wesentlich diejenigen, welche zwar auch mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven versehen sind, deren Hauptblendung aber an den Ocularen angebracht ist oder durch die Pupille des Auges ersetzt wird. Bei diesen Instrumenten gehen die Hauptstrahlen nicht, wie es bei den ersteren der Fall ist, sehr nahe durch die Mitte der ersten brechenden Fläche, sondern sie entfernen sich desto mehr davon, je weiter der ihnen entsprechende Punkt des Gegenstandes von der Axe des Instrumentes absteht. Da hiernach die wirksamen Strahlenbündel eine völlig veränderte Lage erhalten, so entsteht dadurch eine gänzliche Abänderung der Theorie, worauf ihre Berechnung gegründet werden muss. Die sämmtlichen Abweichungen hängen nämlich jetzt hauptsächlich von dem Objective ab, so dass keine Absonderung derselben, wie bei den vorhergehenden Instrumenten, statt findet. Aus den bedeutenderen Gliedern in dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit folgen daher nur zwei Gleichungen, von denen die eine die möglichst vollkommene Aufhebung der Abweichung wegen der Gestalt, sowohl in als ausser der Axe, die zweite dagegen die der Farbenzerstreuung in der Axe und des farbigen Randes zugleich bedingen. Die hierdurch gefundenen Dimensionen des Objectivs führen jedoch gewöhnlich den oben bemerkten Nachtheil herbei, dass die Fläche des von dem Auge betrachteten Bildes zum Theil convex, zum Theil concav ist, die erstere der erwähnten Gleichungen muss desshalb durch eine andere ersetzt werden, welche die Theorie an die Hand giebt und wobei jener Nachtheil nicht vorhanden ist. Hierdurch werden indessen nur zwei willkührliche Grössen des Objectivs bestimmt, um daher noch die erforderliche dritte Gleichung zu erhalten, muss man die aus den beiden Gleichungen resultirenden Werthe in dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit substituiren und diesen sodann zu einem Minimum machen. Die letztere Rechnung vereinfacht sich dadurch sehr, dass die von der Abweichung wegen der Gestalt abhängigen Glieder bei weitem die bedeutendsten sind und mithin allein berücksichtigt zu werden brauchen.

Die vorhergehende Theorie setzt voraus, dass die von den verschiedenen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Strahlenbündel ungehindert durch das Instrument gelassen werden, welches jedoch nicht der Fall ist, da die Fassung des Objectivs einen Theil der äussersten Strahlenbündel abschneidet. Um auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen, muss man die oben angeführte Methode anwenden. Hierdurch erleidet die auf die Farbenzerstreuung sich be-

ziehende Gleichung eine Modification, wonach sie derjenigen analog wird, welche bei den zuerst betrachteten Instrumenten statt findet. Auch auf die von der Abweichung wegen der Gestalt herrührende Gleichung hat der erwähnte Umstand Einfluss, indem die erzeugende Curve der Bildfläche am Rande des Gesichtsfeldes eine andere Gestalt erhält; da jedoch die allgemeinen, daraus folgenden Formeln sehr complicirt werden, so ist es vorzuziehen, diese Untersuchung bis zu den speciellen Anwendungen zu verschieben.

Soll das Instrument bei verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes, oder mit verschiedenen Ocularеinsätzen gebraucht werden, so muss man in Bezug auf die Abweichungen wegen der Gestalt darauf Bedacht nehmen, dass in keinem jener Fälle der angeführte Nachtheil eintritt. In Ansehung der Farbenzerstreuung dagegen ist es nothwendig, nach den oben angewandten Principien einen mittleren Ocularеinsatz zu berechnen, welcher bei der Construction des Objectivs zu Grund gelegt werden muss.

42) Am meisten vereinfachen sich die Formeln bei denjenigen Instrumenten, welche mit keinen achromatischen Objectiven versehen und so eingerichtet sind, dass der farbige Rand nicht gehoben werden kann, indem es hierbei erlaubt ist, alle ursprünglich zur dritten Ordnung gehörige Grössen zu vernachlässigen. Da in diesem Falle eine abgesonderte Aufhebung der verschiedenen Abweichungen unmöglich ist, so bleibt nichts Anderes übrig, als die Undeutlichkeit im Ganzen genommen durch die Bestimmung der willkührlichen Grössen zu einem Minimum zu machen.

43) Der Ausdruck der mittleren Undeutlichkeit enthält eine Constante, welche von der Stellung der Hauptblendung, oder im Falle diese durch die Pupille des Auges ersetzt wird, von der Stellung des letzteren abhängt. Ist daher die eine von beiden willkührlich, so kann man jene Constante so bestimmen, dass dadurch der erwähnte Ausdruck zu einem Minimum, die Deutlichkeit mithin so gross als möglich gemacht wird. Man erhält hierdurch oft ein sehr wirksames Mittel, dieselbe beträchtlich zu vermehren, wozu das Auge, die, seit Wolaston gebräuchlichen, periscopischen Instrumente, die mit Blendungen versehenen Objective zusammengesetzter Microscope, die einfachen und zusammengesetzten Lupen etc. Beispiele geben.

44) Um die auf die Undeutlichkeit sich beziehenden Formeln gebrauchen zu können, müssen die Zahlencoefficienten, in welche sich, wie wir oben gesehen haben, die Potenzen des Unterschiedes des Brechungsverhältnisses nach der Integration verwandeln, und folglich auch die den verschiedenen farbigen Strahlen beigelegten Gewichte bekannt seyn, da jene Coefficienten Functionen der letzteren sind. Wären alle Strahlen von einerlei Art, so würde das Natürlichste seyn, die Gewichte dem Quadrate der Lichtstärke gleich zu setzen, indem bei dieser Voraussetzung der Fehler eines jeden

Strahles mit Rücksicht auf seine Wirksamkeit dem Producte aus der Lichtstärke desselben in seinen Abstand von der Axe des Strahlenbündels proportional seyn würde. Wegen der Verschiedenartigkeit der farbigen Strahlen kann aber jene Hypothese bei ihnen nicht ohne weitere Prüfung zu Grund gelegt werden, welches in Ermangelung einer anderen Bestimmungsweise zu der Idee Veranlassung giebt, dieselbe auch bei den letzteren Strahlen vorläufig anzunehmen, sodann aber die dadurch erhaltenen Resultate mit den Beobachtungen zu vergleichen, um über die Zulässigkeit der Hypothese urtheilen zu können.

Ich wähle hierzu die Beobachtungen von Fraunhofer, woraus er an sieben Stellen des prismatischen Farbenbildes, welche durch die von ihm entdeckten Linien leicht kenntlich sind, nicht nur die Brechungsverhältnisse für verschiedene Glasarten, sondern auch die Lichtstärke und das Maximum derselben abgeleitet hat. Die Grenzen des Spectrums sind von ihm nicht angegeben und wegen der Schwäche des Lichtes an diesen Stellen sehr unsicher, daher ich sie nach der Figur bestimme, welche Fraunhofers Abhandlung beigefügt ist.

Ferner nehme ich eine gewisse Gattung von Crownglas, an welcher er Beobachtungen angestellt hat, als denjenigen Körper an, der zur Vergleichung der übrigen gebraucht wird. Die Lichtstärken sind zwar an einer anderen Glasart beobachtet, sie können aber durch angebrachte Correctionen leicht auf die erstere reducirt werden. Die bei der Berechnung der Coefficienten auszuführenden Integrationen erfordern, dass das Quadrat der Lichtstärke eines jeden farbigen Strahles in Function des Unterschiedes zwischen seinem Brechungsverhältnisse und dem eines bestimmten, nach Willkühr angenommenen Strahles gegeben sey. Da aber der eigentliche analytische Ausdruck davon nicht bekannt ist, so kann dieser Zweck durch experimentelle Formeln erreicht werden, indem man das prismatische Farbenbild in mehrere Theile theilt, und für jeden derselben eine besondere Formel annimmt, welche die Beobachtungen mit der erforderlichen Genauigkeit darstellt.

Theilt man nun die in den Ausdrücken der Coefficienten enthaltenen Integrale ebenfalls in die den experimentellen Formeln entsprechenden Theile, und legt in jedem derselben die für ihn gültige Formel zu Grund, so können dadurch nicht nur jene Coefficienten und einige daraus abgeleitete, welche in den Ausdrücken der Undeutlichkeit vorkommen, sondern auch das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles für die zur Vergleichung dienende Glasart berechnet werden.

Für das letztere wurde oben das arithmetische Mittel aus den Brechungsverhältnissen sämmtlicher farbigen Strahlen, mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit, angenommen, die Rechnung zeigt aber, dass ihm noch eine andere Bedeutung gegeben werden kann. Denken

wir uns nämlich die Brechungsverhältnisse der verschiedenen farbigen Strahlen als Abscissen, die dazu gehörigen Gewichte dagegen als Ordinaten einer krummen Linie aufgetragen, so ist das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles dasjenige, welches dem Schwerpunkte der durch die Curve und die Abscissenlinie begrenzten Figur entspricht.

45) In Bezug auf andere brechende Körper haben wir, um die Anzahl der veränderlichen Grössen möglichst zu vermindern, die den verschiedenen farbigen Strahlen entsprechenden Unterschiede der Brechungsverhältnisse als Functionen der correspondirenden Unterschiede bei dem zur Vergleichung dienenden Körper betrachtet, welche wegen der Kleinheit der letzteren in Reihen entwickelt wurden. Die Coefficienten der Glieder dieser Reihen und das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles sind alsdann unbekannte Grössen, welche bei jedem Körper durch Beobachtungen bestimmt werden müssen. Da wir bei der Entwickelung der Formeln nur die beiden ersten Glieder jeder Reihe beibehalten haben, so ist zu jener Bestimmung die Beobachtung der Brechungsverhältnisse, wenigstens an drei Stellen des Spectrums, sowohl in Bezug auf den betreffenden Körper, als auf den zur Vergleichung dienenden, erforderlich. Führt man hiernach die Rechnung für eine von Fraunhofer gebrauchte Gattung von Flintglas aus, so stellt die daraus entspringende Formel die beobachteten Brechungsverhältnisse so genau dar, dass es, so lange die Beobachtungen keinen grösseren Grad von Genauigkeit erreichen, unnütz seyn würde, noch mehrere Glieder der Reihe beizubehalten.

46) Eine weitere Vergleichung der durch die Theorie erhaltenen Resultate mit den Beobachtungen bietet das oben eingeführte corrigirte Zerstreuungsverhältniss dar. Da dasselbe von den Coefficienten abhängt, welche vermittelst der angenommenen Gewichte durch Integrationen erhalten werden, so kann jene Vergleichung dazu dienen, um die bei der Bestimmung der Gewichte zu Grund gelegte Hypothese einer Prüfung zu unterwerfen. Die Ausführung der Rechnung für die beiden erwähnten Glasarten zeigt, dass das hieraus resultirende Zerstreuungsverhältniss etwas grösser wird, als dasjenige, bei dessen Anwendung die aus denselben Glasarten construirten Objective nach Fraunhofers Erfahrung am besten werden.

Sieht man das von ihm gefundene Resultat als genau an, so folgt daraus, dass die Gewichte nach der violetten Seite des Spectrums mehr abnehmen müssen, als bei der Rechnung vorausgesetzt wurde, eine Untersuchung darüber zeigt jedoch, dass eine sehr bedeutende Abnahme derselben erforderlich ist, um der angeführten Erfahrung Genüge zu leisten. Uebrigens lässt sich hieraus um deswillen kein ganz zuverlässiger Schluss machen, weil über die Berechnung der Objective von Fraunhofer nichts Näheres angegeben ist. Die wiederholte Vergleichung der Erfahrungen mit der Theorie,

wobei jedoch alle, durch dieselbe gegebene Correctionen berücksichtigt werden müssen, ist wohl der sicherste Weg, um in dieser für die Construction der achromatischen Objective so wichtigen Sache zu einem sicheren Resultate zu gelangen.

47) Der farbige Rand kann wegen der in seinem Ausdrucke enthaltenen Glieder höherer Ordnungen nicht für alle Punkte des Gegenstandes und nicht für alle farbige Strahlen zugleich gehoben werden, bei der vollkommensten Einrichtung der Instrumente geschieht dieses vielmehr nur für diejenigen Punkte, welche von der Grenze des Gesichtsfeldes ungefähr um den sechsten Theil seines Halbmessers entfernt sind, und für Strahlen von einer bestimmten Brechbarkeit, die sich wenig von dem mittleren Strahle unterscheiden. Eine Folge hiervon ist, dass selbst bei dieser Einrichtung die Gegenstände mit schwach gefärbten Rändern erscheinen, deren Farbentinten nicht nur eine interessante Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung, sondern auch ein Mittel darbieten, um über die Güte der Instrumente in dieser Beziehung urtheilen zu können.

Die theoretische Untersuchung liefert das Resultat, dass eine weisse von schwarz begrenzte Fläche an derjenigen Stelle des Gesichtsfeldes, wo eine möglichst vollkommene Aufhebung des farbigen Randes statt findet, auf der einen Seite einen grünen, auf der entgegengesetzten Seite aber einen violetten Rand erhält. Diese Farben bekommen etwas andere Nüancen, je nachdem das Bild mehr der Mitte oder der Grenze des Gesichtsfeldes genähert wird, oder auch, wenn der farbige Rand nur unvollkommen gehoben ist. Bei dem Galileischen Fernrohr, dessen Objectiv die Farbenzerstreuung in der Axe und den farbigen Rand zugleich vernichtet, geben die erwähnten Farben ein Kennzeichen ab, dass beides so vollkommen als möglich bewirkt ist. Dagegen kann man dieselbe Methode bei Instrumenten, in denen ein oder mehrere wirkliche Bilder entstehen, nicht unmittelbar auf die Farbenzerstreuung in der Axe anwenden, weil hierdurch keine farbige Ränder hervorgebracht werden. Fraunhofer hat jedoch bereits ein Mittel angegeben, um zu erkennen, bei welchem von mehreren Objectiven, unter übrigens gleichen Umständen, die Farbenzerstreuung am besten gehoben ist. Wenn man nämlich die Hälfte eines jeden Objectivs zudeckt und Linien eines entfernten Gegenstandes beobachtet, welche mit der Halbirungslinie von jenem parallel laufen, so ist dasjenige Objectiv in dieser Beziehung das beste, durch welches die Linien am deutlichsten gesehen werden. Fraunhofer hat hierbei blos auf die Präcision Rücksicht genommen, ohne sich um die Farben zu bekümmern, welche dabei entstehen; die letzteren bieten indessen ebenfalls ein Mittel dar, um zu beurtheilen, ob die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich gehoben ist. Es folgt nämlich aus der Theorie, dass in diesem Falle eine weisse von schwarz begrenzte Fläche, deren gegenüberstehende Grenzen mit der Halbirungslinie

des Objectivs parallel laufen, an denselben mit einem schwachen grünen und violetten Rande erscheint, ebenso wie es bei aufgehobenem farbigem Rande statt findet, dass aber auch hier jene Farben andere, durch die Theorie gleichfalls angegebene Nüancen bekommen, wenn die Farbenzerstreuung nur unvollkommen gehoben ist, oder auch, wenn man stärker oder schwächer vergrössernde Oculare anwendet, als dasjenige, welches eine möglichst vollkommene Aufhebung bewirkt.

Alle diese Resultate der Theorie werden durch die Erfahrung auf die genügendste Weise bestätigt.

48) Ausser der Deutlichkeit kommt bei den optischen Werkzeugen noch ein anderer, von jener unabhängiger Fehler in Betracht, nämlich die Verzerrung des durch sie hervorgebrachten Bildes. Nach demjenigen, was wir oben angeführt haben, hängt bei einerlei Vergrösserung die Deutlichkeit davon ab, wie nahe sich die von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen in dem Bilde bei einander befinden. Dagegen hat die wechselseitige Lage der Bilder, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören, auf die Deutlichkeit keinen Einfluss, sie bestimmt aber die Gestalt des ganzen Bildes, nach der wir daher im Stande sind, nicht nur zu beurtheilen, ob der Gegenstand durch das Instrument verzerrt erscheint, sondern auch die Grösse der Verzerrung zu berechnen, wenn sie statt findet.

Bei den Instrumenten der ersten Art können wir das auf der Projectionsebene entstehende Bild unmittelbar mit dem Gegenstande vergleichen. Da bei dieser Untersuchung die Deutlichkeit nicht beachtet wird, das Bild eines jeden Punktes daher mit dem ihm entsprechenden Punkte der Axe des Strahlenbündels verwechselt werden kann, so befindet sich dasselbe stets in derjenigen Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt und die Axe des Instrumentes gelegt ist. Zu einer vollkommenen Aehnlichkeit des auf der Projectionsebene entworfenen Bildes mit dem Gegenstande wird daher nur noch erfordert, dass die Entfernungen ihrer correspondirenden Punkte von der Axe des Instrumentes in einem beständigen Verhältnisse stehen. Wären blos die Grössen der ersten Ordnung vorhanden, so würde diese Bedingung vollkommen erfüllt werden, das Bild mithin dem Gegenstande vollkommen ähnlich seyn. Mehrere Glieder der höheren Ordnungen zerstören aber die Aehnlichkeit, indem sie die verschiedenen Punkte des Bildes in ungleichem Verhältnisse der Axe des Instrumentes nähern oder davon entfernen. Hierdurch wird daher eine *Verzerrung* des Bildes hervorgebracht, deren Grösse vermittelst der erwähnten Glieder für jeden Punkt desselben berechnet werden kann.

49) Um eine ähnliche Untersuchung bei den Instrumenten der zweiten Art anstellen zu können, müssen wir das letzte Bild derselben mit einem eingebildeten, vergrösserten Gegenstande ver-

gleichen, welcher dem wirklichen ähnlich ist, mit ihm eine parallele Lage hat und mit blossem Auge betrachtet wird. Könnte man nun die Vergrösserung des letzteren so bestimmen, dass die von seinen sämmtlichen Punkten ausgehenden Hauptstrahlen nach denselben Richtungen in das Auge fielen, wie die Axen der Strahlenbündel, welche den entsprechenden Punkten des durch das Instrument hervorgebrachten Bildes zugehören, so würde der Gegenstand durch jenes dem wirklichen Gegenstande ähnlich erscheinen. Dieses wäre jedoch nur in dem Falle möglich, wenn die zur ersten Ordnung gehörigen Grössen allein existirten. Die Glieder der höheren Ordnungen bringen daher auch hier, wie bei den Instrumenten der ersten Art, eine Verzerrung hervor, zu deren Berechnung sie dienen.

50) Wir haben oben bei der Entwickelung der Gleichungen der gebrochenen Strahlen die Tangente des Winkels zwischen der Axe des Instrumentes und einer, von dem leuchtenden Punkte nach dem Scheitel der ersten brechenden Fläche gezogenen Linie zu den kleinen Grössen gerechnet, nach denen die Reihen geordnet wurden. Von jener Tangente enthalten die Glieder, von welchen die Verzerrung abhängt, verschiedene Potenzen; sollte daher dieselbe wegfallen, so müssten die Coefficienten der letzteren abgesondert verschwinden, was gewöhnlich nicht der Fall ist. Es bleibt alsdann nichts Anderes übrig, als die willkührlichen Grössen des Instrumentes so zu bestimmen, dass das beträchtlichste Glied so klein wird, als es ausführbar ist, ohne der Deutlichkeit bedeutend zu schaden.

Kann der Coefficient des erwähnten Gliedes verschwinden, ohne dass dieses zugleich bei dem folgenden statt findet, so ist es möglich, dem Instrumente eine solche Einrichtung zu geben, dass die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes correspondirenden Bilder so wenig wie möglich aus derjenigen Lage gebracht werden, welche der vollkommenen Aehnlichkeit entspricht. Sehen wir zu dem Ende die bei jedem Punkte statt findende Verzerrung als den ihm zugehörigen Fehler an, so können wir, nach der bei der Deutlichkeit gebrauchten Methode, das arithmetische Mittel aus der Summe der Quadrate sämmtlicher Fehler suchen, welches ich das Quadrat der *mittleren Verzerrung* nenne. Macht man dasselbe zu einem Minimum, so wird dadurch der beabsichtigte Zweck erreicht. Die hieraus entspringende Gleichung zeigt, dass alsdann die Verzerrung nur für gewisse Punkte vollkommen verschwindet, welche eine dadurch bestimmte Entfernung von der Axe des Instrumentes haben, dass sie aber diesseits und jenseits dieser Punkte das entgegengesetzte Zeichen erhält. Bei den nach jenem Grundsatze construirten Instrumenten der zweiten Art tritt jedoch gewöhnlich der oben erwähnte Nachtheil ein, dass die Fläche des vom Auge betrachteten Bildes zum Theil convex, zum Theil concav ist; so oft dieser Fall statt findet, muss die aus dem Minimum folgende Gleichung durch eine andere ersetzt

werden, wobei jener Nachtheil nicht vorhanden ist, und von welcher bereits in Bezug auf die Deutlichkeit Gebrauch gemacht wurde.

51) Soll bei einem Instrumente ein inneres Micrometer angebracht werden, so ist ein wesentliches Erforderniss, dass in der Ebene desselben ein Bild entsteht, und dass dieses dem Gegenstande ähnlich ist, weil sonst die Angaben des Micrometers unrichtig werden. In diesem Falle finden daher die bei den Instrumenten der ersten Art erhaltenen Resultate ihre Anwendung, wenn man die Ebene des Micrometers als Projectionsebene annimmt. Es wird dann oft nothwendig, etwas von der Deutlichkeit aufzuopfern, um die Verzerrung so klein als möglich zu machen.

52) Die Formeln, welche sich auf die Verzerrung beziehen, geben ein Mittel an die Hand, die Gestalt zu bestimmen, unter welcher eine auf dem Gegenstande gezogene Curve erscheint, wenn sie durch das Instrument betrachtet wird.

Bei den Instrumenten der ersten Art ist hierzu weiter nichts erforderlich, als dass man die Coordinaten eines beliebigen, im Gegenstande befindlichen Punktes durch die Coordinaten des correspondirenden Punktes im Bilde ausdrückt, und ihre Werthe in der Gleichung der Curve substituirt. Anders verhält es sich bei den Instrumenten der zweiten Art. Wir haben nämlich oben gesehen, dass die Fläche, in der sich das von dem Auge betrachtete Bild befindet, keine Ebene ist, daher sie nicht gebraucht werden kann, um die scheinbare Gestalt der erwähnten Curve anzugeben. Projicirt man aber das Bild vermittelst der Axen der seinen verschiedenen Punkten zugehörigen Strahlenbündel auf eine Ebene, welche in der mittleren Entfernung des Bildes senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht, so hat die auf dieser Ebene gebildete Curve die Eigenschaft, dass sie dem Auge ebenso erscheint, wie die im Bilde befindliche. Sie kann daher ebenso wie bei den Instrumenten der ersten Art bestimmt werden, und zur Vergleichung mit der auf dem Gegenstande gezogenen Curve dienen.

53) Die Verzerrung ist am auffallendsten bei einer geraden Linie, daher es Interesse darbietet, die Gestalt der letzteren im Bilde kennen zu lernen. Dieses ist sehr nahe eine Parabel, wenn die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen vernachlässigt werden können; ob sie ihre Concavität nach innen oder nach aussen kehrt, hängt von dem Zeichen des bedeutendsten Gliedes in dem Ausdrucke der Verzerrung ab. Wird dagegen die Beibehaltung jener Grössen erforderlich, so hat die Curve bisweilen zwar dieselbe Lage wie im vorhergehenden Falle, aber eine veränderte Gestalt, indem sie keine Parabel bleibt; bisweilen entstehen darin zwei Wendungspunkte, wodurch theils ihre Convexität, theils ihre Concavität nach innen gerichtet ist. Der letztere Fall begreift den oben betrachteten in sich, bei welchem die mittlere Verzerrung so klein als möglich wird.

54) Nächst den geraden Linien geben die Kreise eine Verzerrung am leichtesten zu erkennen. Die Untersuchung hierüber zeigt, dass das Bild eines Kreises sehr nahe eine Ellipse ist, im Falle die Grössen der zweiten Ordnung allein berücksichtigt werden. Die eine ihrer Axen geht durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes, ob es aber die grosse oder die kleine ist, hängt von dem Zeichen jener Grössen ab. Im entgegengesetzten Falle erleidet die Curve an der einen Seite der angegebenen Axe eine Verlängerung, an der anderen eine Abplattung, wodurch sie eine Gestalt erhält, welche sich dem Durchschnitte eines Eyes, oder der Crystalllinse eines Ochsenauges nähert, je nachdem die Axe die grosse oder die kleine ist.

Erstes Kapitel.

Genaue Formeln, welche sich auf die Brechung des Lichtes beziehen.

Um die zu den optischen Untersuchungen erforderlichen Formeln zu erhalten, ist es zuerst nothwendig, diejenigen zu entwickeln, durch welche die Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt berechnet werden kann, ohne dabei Näherungen anzuwenden. Diese allgemeinen Formeln sind sodann mit Leichtigkeit auf den für die Ausübung wichtigen specielleren Fall anwendbar, in welchem sämmtliche brechende Flächen Kugelflächen sind, deren Mittelpunkte sich in einer geraden Linie befinden. Sie werden aber so complicirt, dass wir uns in der Folge genöthigt sehen werden, sie in Reihen zu entwickeln. Die hierdurch veranlasste Rechnung führt zu linearischen Differenzengleichungen theils von der ersten, theils von der zweiten Ordnung, daher es zweckmässig ist, uns mit der Integration derselben im Allgemeinen zu beschäftigen, um bei den späteren Untersuchungen nicht aufgehalten zu werden.

Brechung des Lichtes in Flächen von beliebiger Gestalt.

1) Ich setze voraus, dass ein Lichtstrahl nach und nach durch mehrere Mittel von verschiedenem Brechungsvermögen geht, welche von einander durch beliebige, krumme oder ebene Flächen getrennt sind. An jeder dieser Flächen erleidet alsdann der Strahl eine Brechung, die sich nach den bekannten Gesetzen richtet, dass nämlich der einfallende und der gebrochene Strahl in einer Ebene liegen, welche durch die Normale am Einfallspunkte geht, und dass sie mit dieser Normale Winkel bilden, deren Sinus ein beständiges Verhältniss zu einander haben.

Es seyen nun in Bezug auf eine der brechenden Flächen, welche nach Willkühr gewählt werden kann,

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines bestimmten, in dem einfallenden Strahle liegenden Punktes,

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Coordinaten des Einfallspunctes,

$F(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = 0;\; p d\mathfrak{X} + q d\mathfrak{Y} + r d\mathfrak{Z} = 0$ (a)
die Gleichung der brechenden Fläche und ihre Differentialgleichung,

$$\frac{x-\mathfrak{a}}{A}=\frac{y-\mathfrak{b}}{B}=\frac{z-\mathfrak{c}}{C}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

$$\frac{x-\mathfrak{X}}{E}=\frac{y-\mathfrak{Y}}{F}=\frac{z-\mathfrak{Z}}{G}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

die Gleichungen des einfallenden und des gebrochenen Strahles,
n das Brechungsverhältniss,
η und θ der Einfalls- und Brechungswinkel,
so kommt es zuerst darauf an, die Coefficienten der Gleichungen (b) und (c) zu bestimmen.

Für die ersteren erhält man sogleich, weil der einfallende Strahl durch die beiden Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ geht,

$$\left.\begin{aligned} A&=\mathfrak{X}-\mathfrak{a}\\ B&=\mathfrak{Y}-\mathfrak{b}\\ C&=\mathfrak{Z}-\mathfrak{c}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

Sodann bilden die geraden Linien (b) und (c) mit der Normale der brechenden Fläche (a) im Punkte $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ die beiden Winkel η und θ, deren Sinus in dem beständigen Verhältnisse n sind, welches durch die Gleichung

$$\frac{\sin.^2\eta}{n^2}=\sin.^2\theta$$

ausgedrückt wird. Substituiren wir hierin die bekannten analytischen Ausdrücke von $\sin.^2\eta$ und $\sin.^2\theta$, so entsteht dadurch die Gleichung:

$$\frac{(Cq-Br)^2+(Ar-Cp)^2+(Bp-Aq)^2}{n^2\,(A^2+B^2+C^2)}=$$
$$=\frac{(Gq-Fr)^2+(Er-Gp)^2+(Fp-Eq)^2}{E^2+F^2+G^2}\quad\ldots\ (e)$$

Endlich giebt die Bedingung, dass der einfallende Strahl, der gebrochene Strahl und die Normale der brechenden Fläche in einer Ebene liegen, die Gleichung

$$E\,(Cq-Br)+F\,(Ar-Cp)+G\,(Bp-Aq)=0\quad\ldots\ (f)$$

Die beiden Gleichungen (e) und (f) enthalten die Bedingungen, durch welche $\frac{E}{G}$ und $\frac{F}{G}$ bestimmt werden müssen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} D^2&=A^2+B^2+C^2\\ s^2&=p^2+q^2+r^2\\ \alpha&=\frac{Cq-Br}{n}\\ \beta&=\frac{Ar-Cp}{n}\\ \gamma&=\frac{Bp-Aq}{n}\\ \delta^2&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (g)$$

so folgt zuerst aus (f)

$$F=-\frac{(E\,\alpha+G\,\gamma)}{\beta}$$

Bemerken wir ferner, dass vermöge der in (g) angenommenen Werthe von α, β und γ

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

ist, so erhalten wir durch Substitution des vorhergehenden Werthes von F:

$$Gq - Fr = \frac{(Er - Gp)\alpha}{\beta}$$

$$Fp - Eq = \frac{(Er - Gp)\gamma}{\beta}$$

$$E^2 + F^2 + G^2 = \frac{(E^2 + G^2)\beta^2 + (E\alpha + G\gamma)^2}{\beta^2}$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (e) in die folgende:

$$\frac{1}{D^2} = \frac{(Er - Gp)^2}{(E^2 + G^2)\beta^2 + (E\alpha + G\gamma)^2}$$

oder nach $\frac{E}{G}$ geordnet,

$$\frac{E^2}{G^2}(D^2r^2 - \alpha^2 - \beta^2) - \frac{2E}{G}(D^2pr + \alpha\gamma)$$
$$+ D^2p^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\frac{E}{G} = \frac{D^2pr + \alpha\gamma \pm \beta\sqrt{D^2s^2 - \delta^2}}{D^2r^2 - \alpha^2 - \beta^2}$$

woraus weiter vermittelst des obigen Werthes von F

$$\frac{F}{G} = \frac{D^2qr + \beta\gamma \mp \alpha\sqrt{D^2s^2 - \delta^2}}{D^2r^2 - \alpha^2 - \beta^2}$$

erhalten wird.

Das obere Zeichen gehört dem gebrochenen Strahle, das untere dagegen einer Linie an, welche einen gleichen Winkel mit der Normale macht, aber auf der entgegengesetzten Seite liegt; und da einer der Coefficienten E, F, G unbestimmt bleibt, mithin nach Willkühr angenommen werden darf, so kann man jenen Coefficienten die folgenden Werthe beilegen.

$$\left.\begin{aligned} E &= D^2pr + \alpha\gamma + \beta\sqrt{D^2s^2 - \delta^2} \\ F &= D^2qr + \beta\gamma - \alpha\sqrt{D^2s^2 - \delta^2} \\ G &= D^2r^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

Durch diese Formeln werden die Coefficienten E, F, G Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche nicht unmittelbar gegeben sind; es bleibt daher noch übrig, sie durch bekannte Grössen auszudrücken.

Zu diesem Ende seyen

$\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ die Coordinaten eines bestimmten, nach Willkühr angenommenen Punktes im gebrochenen Strahle,

so geben die Gleichungen (c) und (f), wenn man darin x, y, z mit $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ verwechselt und die Werthe (g) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{e} - \mathfrak{X}}{E} = \frac{\mathfrak{f} - \mathfrak{Y}}{F} = \frac{\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}}{G} \\ E\alpha + F\beta + G\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

und durch Elimination von E, F, G

$$\alpha(\mathfrak{e} - \mathfrak{X}) + \beta(\mathfrak{f} - \mathfrak{Y}) + \gamma(\mathfrak{g} - \mathfrak{Z}) = 0 \quad . \quad . \quad (k)$$

Da ferner der gebrochene Strahl durch die Punkte $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ geht, so ist seine Gleichung durch die Coordinaten dieser Punkte ausgedrückt:

$$\frac{x-\mathfrak{e}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{e}}=\frac{y-\mathfrak{f}}{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}=\frac{z-\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}-\mathfrak{g}}\;\ldots\ldots\ldots\;(\mathrm{l})$$

welche die Gleichung (c) ersetzen kann, wenn zwei der Coordinaten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, von denen eine willkürlich ist, vermittelst der Gleichungen (i) oder (i) und (k) berechnet worden sind.

Ich gehe nun zu der folgenden brechenden Fläche über, und bezeichne alle Grössen, welche sich darauf beziehen, indem ich die bisher gebrauchten Buchstaben unten mit einem Striche versehe. In diesem Falle ist der gebrochene Strahl (l) als einfallender Strahl zu betrachten; wir können daher setzen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{a}_{,}=\mathfrak{e}\\ \mathfrak{b}_{,}=\mathfrak{f}\\ \mathfrak{c}_{,}=\mathfrak{g}\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\mathrm{m})$$

Sodann liegt der Punkt $\mathfrak{X}_{,}, \mathfrak{Y}_{,}, \mathfrak{Z}_{,}$ zugleich in dem Strahle (l) und in der folgenden brechenden Fläche, man hat folglich

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\mathfrak{X}_{,}-\mathfrak{e}}{\mathfrak{X}-\mathfrak{e}}=\dfrac{\mathfrak{Y}_{,}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}=\dfrac{\mathfrak{Z}_{,}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{Z}-\mathfrak{g}}\\ F_{,}(\mathfrak{X}_{,},\mathfrak{Y}_{,},\mathfrak{Z}_{,})=0\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\;(\mathrm{n})$$

Da die Grössen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ in Functionen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gegeben sind, so können die Gleichungen (m) und (n) als endliche Differenzengleichungen zwischen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ oder zwischen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet werden. Durch die Integration derselben erhält man daher diese Grössen für alle brechende Flächen, wenn man sie für eine derselben als bekannt annimmt.

Ist die Menge der Lichtstrahlen durch eine Blendung beschränkt, welche an einer beliebigen Stelle angebracht seyn kann, so ist es von Wichtigkeit, denjenigen Strahl zu kennen, welcher durch einen gegebenen Punkt derselben geht. Da dieser Punkt zugleich dem Lichtstrahle angehört, so ist hierzu weiter nichts erforderlich, als dass man in der Gleichung des letzteren x, y, z in die Coordinaten des gegebenen Punktes verwandelt; denn es entsteht dadurch eine Relation zwischen diesen Coordinaten und denen des Einfallspunktes auf einer der brechenden Flächen, welche hinreicht, die letzteren durch die ersteren zu bestimmen.

Uebrigens kann hier bemerkt werden, dass sich die vorhergehenden Formeln alle in die correspondirenden für die Reflexion des Lichtes verwandeln, wenn man darin $n = -1$ setzt. Die Resultate, welche die weitere Entwickelung derselben giebt, enthalten daher als besonderen Fall die Katoptrik, und aus diesem Grunde ist es unnöthig, die letztere abgesondert zu behandeln.

Brechung in sphärischen Flächen.

2) Die optischen Werkzeuge sind gewöhnlich aus sphärischen Linsen oder Spiegeln zusammengesetzt; betrachten wir daher den Fall, in welchem alle brechende Flächen sphärisch sind.

Ich setze voraus, dass sich ihre Mittelpunkte sämmtlich in einer und derselben geraden Linie befinden, welche ich die *Axe des Instrumentes* nenne, und dass ihre Concavitäten dem leuchtenden Punkte zugekehrt sind, von welchem der Lichtstrahl ausgeht.

Da die Endresultate von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig sind, so nehme ich die Axe des Instrumentes als Axe der z an, und lasse die Ebene der $y\,z$ durch den leuchtenden Punkt gehen, welchen ich zu demjenigen wähle, dessen Coordinaten durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet worden sind. Diese Voraussetzung giebt für die erste brechende Fläche

$$\mathfrak{a} = 0$$

und wenn man für den willkürlichen Punkt $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$ denjenigen nimmt, in welchem der gebrochene Strahl die Ebene der $y\,z$ durchschneidet, so ist für alle brechende Flächen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e} = 0$$

Endlich wähle ich für jede brechende Fläche einen besonderen Ursprung der Coordinaten, indem ich ihn mit dem Scheitel derselben, d. i. mit demjenigen Punkte zusammenfallen lasse, in welchem die Axe der z von jener Fläche durchschnitten wird.

Die z werden als positiv angenommen, wenn sie *vor* dem Scheitel der brechenden Fläche, d. h. nach dem leuchtenden Punkte zu liegen, die y dagegen, wenn sie sich mit der Ordinate $\mathfrak{b}$ dieses Punktes auf einerlei Seite der Axe befinden. Die Lage der positiven x endlich kann unbestimmt bleiben, da kein besonderer Grund zu ihrer Bestimmung vorhanden ist.

Bezeichnen wir ferner durch

a den Halbmesser von einer der brechenden Flächen, so ist ihre Gleichung

$$F\,(\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{Z}) = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + (a - \mathfrak{Z})^2 - a^2 = 0 \quad . \; . \; . \quad (a)$$

Die Formeln (a), (d) und (g) der vorhergehenden Nummer geben folglich

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{X} \\
B &= \mathfrak{Y} - \mathfrak{b} \\
C &= \mathfrak{Z} - \mathfrak{c} \\
D^2 &= \mathfrak{X}^2 + (\mathfrak{Y} - \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{c})^2 \\
p &= \mathfrak{X} \\
q &= \mathfrak{Y} \\
r &= -(a - \mathfrak{Z}) \\
s^2 &= a^2 \\
\alpha &= -\frac{1}{n}\left[(\mathfrak{c} - a)\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}\,(a - \mathfrak{Z})\right]
\end{aligned}$$

$$\beta = \frac{(\mathfrak{c} - a)\,\mathfrak{X}}{n}$$

$$\gamma = -\frac{\mathfrak{b}\,\mathfrak{X}}{n}$$

$$\delta^2 = \frac{1}{n^2}\left\{ [(\mathfrak{c} - a)\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{b}\,(a - \mathfrak{Z})]^2 + \mathfrak{X}^2\,[(\mathfrak{c} - a)^2 + \mathfrak{b}^2] \right\}$$

Eliminirt man nun aus diesen Ausdrücken $\mathfrak{X}^2$ vermittelst seines Werthes

$$\mathfrak{X}^2 = 2\,a\,\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2$$

welcher aus der Gleichung (a) folgt, und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{h} &= \frac{1}{\mathfrak{c}} \\
\mathfrak{k} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}} \\
\mathfrak{l} &= \frac{\delta^2}{a^2\,\mathfrak{c}^2} = \frac{1}{n^2}\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{k}^2 \,.\, 2a\mathfrak{Z} + 2\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2 \\ &-[\mathfrak{k}\,\mathfrak{Z} + (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}]^2 \end{aligned}\right\} \\
\mathfrak{m} &= -\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{h} \,.\, 2a\mathfrak{Z} - 2\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{h}^2\,\mathfrak{b}^2 \\
\mathfrak{t} &= \mathfrak{m} - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,(1 + \mathfrak{m})\,\mathfrak{Z} - \frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{Y}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}}{n^2} \\
&\quad - \frac{[1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{Z}]}{n^2}\,\mathfrak{h}^2\,\mathfrak{b}^2 \\
\mathfrak{u} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l} \\
\mathfrak{w} &= \mathfrak{m} - \mathfrak{l} - \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,(1 + \mathfrak{m})\,[2 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{Z}] \\
&\quad + \frac{(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})^2}{n^2}\,(2\,a\,\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 - \mathfrak{Y}^2)\,\mathfrak{h}^2\mathfrak{b}^2
\end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(b)}$$

so erhält man

$$\frac{1}{a} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h}$$

$$D^2 = \mathfrak{c}^2\,(1 + \mathfrak{m})$$

$$p = \mathfrak{X}$$

$$q = \mathfrak{Y}$$

$$r = -a\,[1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{Z}]$$

$$s^2 = a^2$$

$$\alpha = -\frac{a\,\mathfrak{c}}{n}\left\{ \mathfrak{k}\,\mathfrak{Y} + [1 - (\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{Z}]\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b} \right\}$$

$$\beta = \frac{a\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{X}}{n}$$

$$\gamma = -\frac{a\,\mathfrak{c}\,(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,\mathfrak{X}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{b}}{n}$$

$$\delta^2 = a^2\,\mathfrak{c}^2\,\mathfrak{l}$$

$$D^2\,p\,r + \alpha\,\gamma = -\,a^2\,\mathfrak{c}^2\,\mathfrak{X}\,(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,(1 + \mathfrak{t})$$

$$\beta\,\sqrt{D^2\,s^2 - \delta^2} = a^2\,\mathfrak{c}^2\,\mathfrak{X}\,\frac{\mathfrak{k}}{n}\sqrt{1 + \mathfrak{u}}$$

$$D^2\,r^2 - \alpha^2 - \beta^2 = D^2\,r^2 - \delta^2 + \gamma^2 = a^2\,\mathfrak{c}^2\,(1 + \mathfrak{w})$$

Durch diese Werthe geben die Ausdrücke (h) von Nro. 1

$$E = -\,a^2\,\mathfrak{c}^2\,\mathfrak{X}\left[(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})\,(1 + \mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\sqrt{1 + \mathfrak{u}}\right]$$

$$G = a^2\,\mathfrak{c}^2\,(1 + \mathfrak{w})$$

Bemerken wir ferner, dass

$$\mathfrak{e} = 0$$

ist, so folgt aus der ersten Gleichung (*i*) von Nro. 1

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} = -\frac{E}{G\mathfrak{X}}$$

oder, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt,

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} = \frac{(\mathfrak{f}+\mathfrak{h})(1+\mathfrak{t}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}\sqrt{1+\mathfrak{u}}}{1+\mathfrak{w}}$$

Dieser Ausdruck, verbunden mit der Gleichung (a), dient zur Bestimmung von $\mathfrak{g}$ unter der Voraussetzung, dass die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ bekannt sind.

Wenn die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{b}$ so klein sind, dass man sich erlauben kann, sie in dem vorhergehenden Ausdrucke zu vernachlässigen, so verwandelt sich derselbe in den folgenden:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f}+\mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}$$

Da nun jene Coordinaten gewöhnlich sehr klein sind, ohne jedoch ganz vernachlässigt werden zu können, so ist es für die Ausübung bequem, den Ausdruck von $\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}$ so umzuändern, dass er unmittelbar $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ giebt und aus zwei Theilen besteht, von welchen der erste der genäherte Werth ist, der zweite dagegen eine kleine von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{b}$ abhängige Correction enthält. Nehmen wir hiernach für $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ den folgenden Ausdruck an:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{f}+\mathfrak{h}) - \frac{\mathfrak{f}}{n} + \mathfrak{G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

so ist $\mathfrak{G}$ die unbekannte Correction, auf deren Bestimmung es ankommt. Die Differenz der vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{(\mathfrak{f}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}(\sqrt{1+\mathfrak{u}} - 1 - \mathfrak{w})}{1+\mathfrak{w}} - \mathfrak{G}$$

Substituirt man hierin die identischen Werthe

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} - \frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g}-\mathfrak{Z})}$$

$$\sqrt{1+\mathfrak{u}} - 1 = \frac{\mathfrak{u}}{1+\sqrt{1+\mathfrak{u}}}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{G} = \left(\frac{1}{1+\mathfrak{w}}\right)&\left[(\mathfrak{f}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{f}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{1+\sqrt{1+\mathfrak{u}}} - \mathfrak{w}\right)\right] \\ &- \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}(\mathfrak{g}-\mathfrak{Z})}\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Dieser Ausdruck von $\mathfrak{G}$ ist sehr bequem, um $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ durch successive Näherungen zu berechnen, wodurch die eine Coordinate des

willkührlichen Punktes bestimmt wird. Die andere Coordinate $\mathfrak{f}$ erhält man aus der Gleichung (k) von Nro. 1, wenn man darin statt α, β, γ die ersten vorhergehenden Werthe substituirt, nämlich

$$\alpha = -\frac{1}{n}[(\mathfrak{c}-a)\mathfrak{Y}+\mathfrak{b}(a-\mathfrak{Z})]$$

$$\beta = \frac{(\mathfrak{c}-a)\mathfrak{X}}{n}$$

$$\gamma = -\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{X}}{n}$$

Dieses giebt

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{b}(\mathfrak{g}-a)}{(\mathfrak{c}-a)}$$

und folglich

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)}{\mathfrak{c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathfrak{c}}\right)}$$

Vermöge der oben gegebenen Werthe ist aber

$$\frac{1}{a} = \mathfrak{k}+\mathfrak{h}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}+\mathfrak{G}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{\mathfrak{c}} = \mathfrak{k}$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{b}}{n\mathfrak{c}}\left[1-\frac{n\mathfrak{G}}{\mathfrak{k}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Endlich folgen aus der Gleichung (l) von Nro. 1 die Gleichungen für die Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathfrak{f}-\frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} \\ x &= -\frac{\mathfrak{X}(z-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

Bei dem Uebergange zu der folgenden brechenden Fläche müssen wir uns erinnern, dass sich bei derselben der Ursprung der Coordinaten nach der oben gemachten Voraussetzung abändert, indem er in denjenigen Punkt verlegt wurde, wo die folgende Fläche in die Axe der z einschneidet.

Nennen wir daher

d den zwischen beiden Flächen liegenden Theil der Axe, so müssen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{Z}+d$ und $\mathfrak{g}+d$ verwechselt werden, wenn man die Formeln (m) und (n) von Nro. 1 gebrauchen will, in welchen einerlei Ursprung für beide Flächen vorausgesetzt ist. Hierdurch geben jene Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{,} &= \mathfrak{f} \\ \mathfrak{c}_{,} &= \mathfrak{g} + d \\ \mathfrak{Y}_{,} &= \mathfrak{f} + \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{Z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} \\ \mathfrak{X}_{,} &= \frac{\mathfrak{X}(\mathfrak{g}+d-\mathfrak{Z}_{,})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} \\ \mathfrak{X}^2_{,} + \mathfrak{Y}^2_{,} &+ (a_{,}-\mathfrak{Z}_{,})^2 - a^2_{,} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (g)$$

Der Ausdruck (e), auf die folgende Fläche bezogen, wird

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{b}_{,}}{n_{,}\,\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\,\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{f}_{,}}\right]$$

Folglich, wenn man hierin statt $\mathfrak{b}_{,}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung (g) substituirt

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \cdot \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\,\mathfrak{c}_{,}}\left[1 - \frac{n_{,}\,\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{f}_{,}}\right] \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

Die vorhergehenden Gleichungen reichen hin, die Werthe von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ für alle brechende Flächen zu berechnen, wenn für die erste derselben $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ als bekannt angenommen werden.

Nach der schon oben gemachten Bemerkung sind jene Gleichungen als endliche Differenzengleichungen zwischen den unbekannten Grössen zu betrachten, weil man dadurch die Werthe derselben für eine beliebige Fläche findet, wenn sie für die vorhergehende als bekannt vorausgesetzt werden. Die Integration führt folglich willkührliche Constanten ein, welche durch gegebene Werthe der veränderlichen Grössen bestimmt werden müssen, und diese Bestimmung wird in manchen Fällen erleichtert, wenn man voraussetzen darf, dass die endlichen Differenzengleichungen auch auf die erste brechende Fläche anwendbar sind. Hierzu brauchen wir nur anzunehmen, dass die Lichtstrahlen, ehe sie jene treffen, durch eine eingebildete Fläche gegangen seyen, welche mit ihr zusammenfiele und keine brechende Kraft ausübte. Diese Voraussetzung giebt nämlich, wenn die Buchstaben, welche sich auf die eingebildete Fläche beziehen, mit dem unteren Index 0, diejenigen dagegen, welche der ersten brechenden Fläche angehören, mit dem Index 1 unterschieden werden,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= a_1 \\ d_0 &= 0 \\ \mathfrak{f}_0 &= \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{X}_0 &= \mathfrak{X}_1 \\ \mathfrak{Y}_0 &= \mathfrak{Y}_1 \\ \mathfrak{Z}_0 &= \mathfrak{Z}_1 \\ n_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

wodurch den Gleichungen (g) und (h) in Bezug auf die erste brechende Fläche Genüge geleistet wird. Wir können daher die mit

dem Index 0 versehenen Grössen wie gegebene Werthe der Veränderlichen gebrauchen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die vorhergehenden endlichen Differenzengleichungen zu integriren; da sie aber zu complicirt sind, als dass ihre genaue Integration möglich wäre, so werde ich sie in Reihen entwickeln, welche nach steigenden Potenzen der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ geordnet sind. Die Glieder dieser Reihen werde ich so in Ordnungen abtheilen, dass die Ordnungszahl jedes Mal die Stelle angiebt, welche das Glied in der Reihe einnimmt. Hiernach besteht die erste Ordnung aus den ersten Gliedern sämmtlicher Reihen, die zweite Ordnung aus den zweiten Gliedern, u. s. w.; die Exponenten aber wachsen jedes Mal um zwei Einheiten, wenn man in derselben Reihe von einer Ordnung zur folgenden übergeht. Durch diese Entwickelung werden die endlichen Differenzengleichungen linearisch, und steigen nur höchstens bis zur zweiten Ordnung. Mit der Integration solcher Gleichungen haben sich zwar bereits mehrere ausgezeichnete Mathematiker beschäftigt, da jedoch ihre Untersuchungen in verschiedenen Abhandlungen zerstreut sind, so wird es nicht undienlich seyn, die allgemeinen Formeln hierher zu setzen, zumal da ihre Entwickelung nur wenig Raum erfordert, woraus sodann alle, bei dem späteren Vortrage nöthige Formeln mit Leichtigkeit folgen. Ich werde mich dabei zur Abkürzung der in neuerer Zeit eingeführten Bezeichnungsart bedienen, indem ich durch das Zeichen

$$\Sigma_e^i \, U_m$$

die Summe sämmtlicher Glieder bezeichne, welche entstehen, wenn man dem Index m alle Werthe von $m = e$ bis $m = i$ einschliesslich giebt. Enthält die Grösse U_m, wie es bisweilen geschieht, mehr als einen Index, so werde ich denjenigen, auf welchen sich die Summation bezieht, unter das Zeichen Σ setzen. Ausserdem werde ich dem Zeichen

$$[u_i]^m$$

die in der Differenzenrechnung angenommene Bedeutung geben, wonach es das Produkt von m Factoren

$$u_i \; u_{i-1} \; u_{i-2} \; . \; . \; . \; u_{i-(m-1)}$$

darstellt.

Integration der endlichen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung.

3) Ich betrachte zuerst die Differenzengleichung

$$U_i = q_i \, U_{i-1} + s_i \, U_{i-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

und setze voraus, dass die Grössen U_i an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\left.\begin{aligned} U_{e-2} &= 0 \\ U_{e-1} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

wobei der Index e kleiner als i angenommen wird. Gehen wir nun von diesen bekannten Werthen von U_{e-2} und U_{e-1} aus, so lassen

sich daraus successiv alle übrigen bis zu U_i vermittelst der Gleichung (a) berechnen, wenn man darin dem Index i nach und nach alle Werthe von e bis zu i giebt. Hiernach erhalten wir durch fortgesetzte Substitutionen die folgenden Werthe jener Grössen:

$$
\begin{aligned}
U_e &= q_e \\
U_{e+1} &= q_{e+1}\, q_e + s_{e+1} \\
U_{e+2} &= q_{e+2}\, q_{e+1}\, q_e + q_{e+2}\, s_{e+1} + s_{e+2}\, q_e \\
U_{e+3} &= q_{e+3}\, q_{e+2}\, q_{e+1}\, q_e + q_{e+3}\, q_{e+2}\, s_{e+1} \\
&\quad + q_{e+3}\, s_{e+2}\, q_e + s_{e+3}\, q_{e+1}\, q_e \\
&\quad + s_{e+3}\, s_{e+1} \\
U_{e+4} &= q_{e+4}\, q_{e+3}\, q_{e+2}\, q_{e+1}\, q_e \\
&\quad + q_{e+4}\, q_{e+3}\, q_{e+2}\, s_{e+1} + q_{e+4}\, q_{e+3}\, s_{e+2}\, q_e \\
&\quad + q_{e+4}\, s_{e+3}\, q_{e+1}\, q_e + s_{e+4}\, q_{e+2}\, q_{e+1}\, q_e \\
&\quad + q_{e+4}\, s_{e+3}\, s_{e+1} + s_{e+4}\, q_{e+2}\, s_{e+1} \\
&\quad + s_{e+4}\, s_{e+2}\, q_e
\end{aligned}
$$

u. s. w.

Das Gesetz dieser Ausdrücke ist schon so evident, dass es unnöthig ist, die Entwickelung weiter fortzusetzen. Wir sehen in der That, dass U_i aus der Summe mehrerer Producte besteht, welche die verschiedenen q und s als Factoren enthalten. Um sie zu formiren, braucht man anfänglich nur das erste zu schreiben, welches ist:

$$q_i\, q_{i-1}\, q_{i-2} \dots q_e$$

In demselben verwechselt man hierauf zuerst ein Paar auf einander folgender Factoren $q_m\, q_{m-1}$ mit s_m, indem man ihm nach und nach alle mögliche Stellungen von $m = e + 1$ bis zu $m = i$ giebt. Dann nimmt man ähnliche Verwechselungen mit zwei solchen Paaren, dann mit drei u. s. w. vor, und setzt dieses Verfahren so weit fort, als es geschehen kann. Die Summe von sämmtlichen hierdurch erhaltenen Producten bildet endlich den Werth von U_i.

Die Gleichung (a) zeigt, dass das gefundene Gesetz für U_i richtig ist, wenn es für U_{i-1} und U_{i-2} als richtig angenommen wird. Nach dieser Voraussetzung enthält nämlich $q_i\, U_{i-1}$ alle, nach jenem Gesetze gebildete Producte, in welchen s_i nicht vorkommt, $s_i\, U_{i-2}$ dagegen alle diejenigen, von welchen s_i ein Factor ist, wodurch die Allgemeinheit des Gesetzes bewiesen wird.

Für die Folge ist es bequem, eine Bezeichnung einzuführen, wodurch sogleich der erste und der letzte Index ersichtlich sind, welche bei den verschiedenen q und s vorkommen. Ich werde daher allgemein durch

$$(i, e)$$

eine Grösse bezeichnen, welche nach den vorhergehenden Regeln formirt ist, und bei der i den ersten, e dagegen den letzten Index von q angiebt.

Nach dieser Bezeichnung erhalten wir mithin

$$U_i = (i, e) \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(c)}$$

welches das Integral der Gleichung (a) mit Rücksicht auf die in (b) angenommenen Bedingungen ist.

Die Berechnung von (i, e) nach der vorhergehenden Methode ist übrigens sehr mühsam; sie wird leichter, wenn man sich dazu unmittelbar der Gleichungen bedient, welche aus den obigen Werthen von U_{e-i} und U_e, und aus (a) durch Substitution des in (c) erhaltenen Werthes folgen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}(e-1, e) = 1 \\ (e, e) = q_e \\ (i, e) = q_i\,(i-1, e) + s_i\,(i-2, e)\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Das Symbol $(e-1, e)$ entspricht zwar eigentlich nicht der in Bezug auf (i, e) gegebenen Definition, demungeachtet können wir es beibehalten, wenn wir darunter den durch die erste Gleichung (d) bestimmten Werth verstehen. Unter dieser Voraussetzung dient die letzte Gleichung (d) zur successiven Berechnung der folgenden Grössen $(e+1, e) \ldots (i, e)$, wenn man dem Index i nach und nach alle Werthe von $(e+1)$ bis i beilegt.

Zu einer dritten Methode, die Grösse (i, e) zu berechnen, gelangen wir auf folgende Weise:

Gebrauchen wir allgemein die Bezeichnung

$$[i, e] = \frac{(i, e)}{(i-1, e)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

so geben zuerst die Gleichungen (d), wenn man die zweite durch die erste, sodann die letzte durch die $(i-1, e)$ dividirt, vermittelst jener Bezeichnung

$$\left.\begin{array}{l}[e, e] = q_e \\ [i, e] = q_i + \dfrac{s_i}{[i-1, e]}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Durch die letzte dieser Gleichungen werden die sämmtlichen Grössen $[e+1, e]$ bis $[i, e]$ successiv erhalten, wenn man dem Index i nach und nach alle Werthe von $(e+1)$ bis i giebt.

Auch lässt sich $[i, e]$ vermittelst jener Gleichungen in einen Kettenbruch verwandeln. Formirt man nämlich nach denselben die Werthe von $[i, e]$, $[i-1, e]$, $[i-2, e]$ bis zu $[e+1, e]$ so giebt ihre fortgesetzte Substitution:

$$\left.[i, e] = q_i + \cfrac{s_i}{q_{i-1} + \cfrac{s_{i-1}}{q_{i-2} + \cfrac{s_{i-2}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{e+2}}{q_{e+1} + \cfrac{s_{e+1}}{q_e}}}}}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

Um sodann (i, e) hierdurch auszudrücken, müssen wir es unter die Form bringen

$$(i, e) = \frac{(i, e)}{(i-1, e)}\,\frac{(i-1, e)}{(i-2, e)} \ldots \frac{(e, e)}{(e-1, e)}\,(e-1, e)$$

welche Gleichung identisch ist, weil im Zähler und Nenner des zweiten Theiles die gleichen Factoren $(i-1, e) \ldots (e-1, e)$ vorkommen. Bemerken wir nun, dass vermöge (d)

$$(e-1, e) = 1$$

ist, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von (i, e) vermittelst der in (e) eingeführten Bezeichnung in den folgenden:

$$(i, e) = [i, e]\,[i-1, e] \ldots [e, e] \quad \ldots \quad \text{(h)}$$

wonach (i, e) durch die in (f) erhaltenen Werthe gegeben ist. Sollen, wie es in der Folge erforderlich seyn wird, (i, e) und $[i, e]$ zugleich berechnet werden, so kann man sich hierzu entweder der Formeln (d) und (e) oder der in (f) und (h) gefundenen bedienen.

Endlich ist aus dem nach den obigen Regeln unmittelbar durch q und s ausgedrückten Werthe von (i, e) ersichtlich, dass diese Grösse ungeändert bleibt, wenn man darin q_i mit q_e, s_i mit s_{e+1}, und allgemein q_m mit q_{e+i-m}, s_m mit $s_{e+i-m+1}$ verwechselt, woraus folgt, dass bei Berechnung von (i, e) die verschiedenen q und s in umgekehrter Ordnung genommen werden können. Erinnern wir uns nun, dass i und e den ersten und den letzten, in (i, e) vorkommenden Index von q bezeichnen, so müssen wir darin dieselben Verwechselungen, wie bei dem Index von q, vornehmen. Hierdurch entstehen aus den Formeln (d) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} (i+1, i) &= 1 \\ (i, i) &= q_i \\ (e, i) &= q_e\,(e+1, i) + s_{e+1}\,(e+2, i) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

Wird vermittelst derselben (e, i) berechnet, so ist

$$(e, i) = (i, e) \quad \ldots \quad \text{(k)}$$

wonach der in den inclavirten Coefficienten enthaltene erste und letzte Index mit einander verwechselt werden können.

Gehen wir jetzt zu der Gleichung über:

$$u_i = q_i\,u_{i-1} + s_i\,u_{i-2} \quad \ldots \quad \text{(l)}$$

welche mit (a) einerlei Gestalt hat, und setzen voraus, dass an die Stelle der Bedingungen (b) die folgenden treten:

$$\left.\begin{aligned} u_{e-2} &= 0 \\ u_{e-1} &= \mathrm{c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(m)}$$

wobei c eine Constante bezeichnet.

Setzt man in den Gleichungen (l) und (m)

$$u_i = \mathrm{c}\,U_i$$

so verwandeln sie sich dadurch in die Gleichungen (a) und (b), für welche in (c)

$$U_i = (i, e)$$

gefunden wurde. Durch Substitution dieses Werthes folgt daher aus dem vorhergehenden Ausdrucke von u_i das Integral der Gleichung (l) mit Rücksicht auf die Bedingungen (m), nämlich

$$u_i = \mathrm{c}\,(i, e) \quad \ldots \quad \text{(n)}$$

Nach diesen Prämissen können wir uns mit dem allgemeinen Falle beschäftigen, indem wir die Gleichung betrachten:

$$u_i = q_i\, u_{i-1} + s_i\, u_{i-2} + t_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (o)$$

wobei u_i keiner Bedingung unterworfen ist.

Nehmen wir die Werthe von u_{e-2} und u_{e-1} als gegeben an, und formiren nach der Gleichung (o) die Ausdrücke von u_e bis u_i, so erhalten wir daraus vermittelst fortgesetzter Substitutionen den Werth von u_i durch u_{e-2} und u_{e-1} ausgedrückt; und da die Gleichung (o) linearisch ist, so kann dieser Werth nur die Gestalt haben:

$$u_i = P_i\, u_{e-1} + Q_i\, u_{e-2} + R_i \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (p)$$

Ebenso ist

$$u_{i-1} = P_{i-1}\, u_{e-1} + Q_{i-1}\, u_{e-2} + R_{i-1}$$
$$u_{i-2} = P_{i-2}\, u_{e-1} + Q_{i-2}\, u_{e-2} + R_{i-2}$$

Durch Substitution dieser Werthe in der Gleichung (o) wird

$$\begin{aligned} u_i = {} & (q_i\, P_{i-1} + s_i\, P_{i-2})\, u_{e-1} \\ & + (q_i\, Q_{i-1} + s_i\, Q_{i-2})\, u_{e-2} \\ & + q_i\, R_{i-1} + s_i\, R_{i-2} + t_i \end{aligned}$$

Die Vergleichung hiervon mit dem Ausdrucke (p) giebt

$$\left.\begin{aligned} P_i &= q_i\, P_{i-1} + s_i\, P_{i-2} \\ Q_i &= q_i\, Q_{i-1} + s_i\, Q_{i-2} \\ R_i &= q_i\, R_{i-1} + s_i\, R_{i-2} + t_i \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (q)$$

Setzt man nun in der Gleichung (p) zuerst $i = e - 2$, dann $i = e - 1$, so erhält man

$$P_{e-2} = 0; \;\; Q_{e-2} = 1; \;\; R_{e-2} = 0$$
$$P_{e-1} = 1; \;\; Q_{e-1} = 0; \;\; R_{e-1} = 0$$

Durch diese Werthe folgt aus der zweiten Gleichung (q)

$$Q_e = s_e$$

Vergleichen wir ferner die beiden ersten Gleichungen (q) und die vorhergehenden Werthe von P_{e-2}, P_{e-1}, Q_{e-1} und Q_e mit den Ausdrücken (l) und (m), so sehen wir, dass sie mit den letzteren übereinstimmen, wenn man darin einmal

$$u = P; \;\; e = e; \;\; c = 1$$

und dann

$$u = Q; \;\; e = e + 1; \;\; c = s_e$$

setzt. Vermittelst dieser Werthe giebt daher das Integral (n)

$$\left.\begin{aligned} P_i &= (i, e) \\ Q_i &= s_e (i, e + 1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (r)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, R_i zu finden. Die letzte Gleichung (q) zeigt, dass R_i nur eine linearische Function der verschiedenen, mit t bezeichneten Grössen seyn kann, und dass eine beliebige von ihnen, z. B. t_m, zum erstenmale in dem Ausdrucke von R_m vorkommt, in welchem ihr Coefficient die Einheit ist. Denken wir uns daher R_i in einen nach t geordneten Ausdruck entwickelt, und bezeichnen den Coefficienten von t_m in demselben durch $T_i^{(m)}$, so kann jener Ausdruck nur die Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} R_i &= T_i^{(e)} t_e \ldots + T_i^{(m)} t_m \ldots + T_i^{(i)} t_i \\ &= \Sigma_e^i \, T_i^{(m)} t_m \\[-4pt] &\quad\ {}_{m} \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \text{(s)}$$

und es ist $T_i^{(m)} = 0$ für alle Werthe von i, von $i = 0$ bis zu $i = m - 1$, dagegen ist $T_i^{(m)} = 1$ für $i = m$, so dass man hat

$$T_{m-1}^{(m)} = 0$$
$$T_m^{(m)} = 1$$

Formirt man nun nach dem Ausdrucke (s) die Werthe von R_{i-1} und R_{i-2}, und substituirt sie, ebenso wie den von R_i, in der letzten Gleichung (q), so erhält man durch die Vergleichung der mit t_m multiplicirten Glieder

$$T_i^{(m)} = q_i \, T_{i-1}^{(m)} + s_i \, T_{i-2}^{(m)}$$

Die drei vorhergehenden Ausdrücke stimmen mit denen (l) und (m) überein, wenn darin

$$u = T^{(m)}, \quad e = m + 1, \quad c = 1$$

gesetzt werden. Das Integral (n) giebt daher

$$T_i^{(m)} = (i, m + 1)$$

Durch Substitution dieses Werthes folgt endlich aus (s)

$$R_i = \Sigma_e^i \, (i, m + 1) \, t_m \quad {}_{m} \ldots \ldots \ldots \text{(t)}$$

Die Formeln (p), (r) und (t) enthalten das vollständige Integral der gegebenen Differenzengleichung vom ersten Grade und der zweiten Ordnung (o), die Grössen u_{e-1} und u_{e-2} vertreten dabei die Stelle der beiden willkührlichen Constanten, welche die Ordnung der Gleichung erfordert.

Substituirt man in dem Ausdrucke (p) die Werthe von P_i, Q_i und R_i, so wird jenes Integral

$$\left.\begin{aligned} u_i = (i, e) \, u_{e-1} &+ (i, e + 1) \, s_e \, u_{e-2} \\ &+ \Sigma_e^i \, (i, m + 1) \, t_m \\[-4pt] &\quad\ {}_{m} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(u)}$$

worin man die Grössen u_{e-1} und $s_e \, u_{e-2}$ durch zwei willkührliche Constanten ersetzen kann.

Das letzte unter dem Summationszeichen befindliche Glied ist $= (i, i + 1) \, t_i$. Da aber dasselbe nach dem oben Angeführten $= t_i$ ist, so muss in dem vorhergehenden Integrale

$$(i, i + 1) = 1$$

gesetzt werden.

Die beiden ersten Glieder von u_i lassen sich noch unter andere Gestalten bringen. Setzen wir nämlich

$$\frac{u_{e-1}}{u_{e-2}} = q_{e-1} \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(v)}$$

und sehen q_{e-1} als zu den übrigen mit q bezeichneten Grössen gehörig an, so ist

$$(i, e) \, u_{e-1} + (i, e + 1) \, s_e \, u_{e-2} = [(i, e) \, q_{e-1} + (i, e + 1) \, s_e] \, u_{e-2}$$

Die letzte Gleichung (i) giebt aber, wenn man e mit $e - 1$ verwechselt, und in den inclavirten Grössen die Ordnung des Index umkehrt,

$$(i, e) \, q_{e-1} + (i, e + 1) \, s_e = (i, e - 1)$$

Da ferner vermöge (h)

$$(i,\, e-1) = [i,\, e-1]\,[i-1,\, e-1]\,\ldots\,[e-1,\, e-1]$$

ist, so wird

$$(i,\, e)\, u_{e-1} + (i,\, e+1)\, s_e\, u_{e-2} = (i,\, e-1)\, u_{e-2}$$
$$= [i,\, e-1]\,[i-1,\, e-1]\,\ldots\,[e-1,\, e-1]\, u_{e-2}$$

Hierdurch nimmt das Integral (u) eine der beiden folgenden Gestalten an:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= (i,\, e-1)\, u_{e-2} + \underset{m}{\Sigma_e^i}\, (i,\, m+1)\, t_m \\ &= [i,\, e-1]\,[i-1,\, e-1]\,\ldots\,[e-1,\, e-1]\, u_{e-2} \\ &\quad + \underset{m}{\Sigma_e^i}\, (i,\, m+1)\, t_m\,, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (w)$$

worin nunmehr u_{e-2} und das in den inclavirten Grössen enthaltene q_{e-1} als die beiden willkührlichen Constanten zu betrachten sind, welche die Ordnung der Differenzengleichung erfordert.

Bis hierher wurde angenommen, dass der Index von i bis zu e abnimmt, und dass u_i durch zwei vorhergehende Glieder gegeben ist. Es kann jedoch der umgekehrte Fall eintreten, wonach der Index von i bis zu e zunimmt, und u_i durch zwei darauf folgende Glieder ausgedrückt wird. Auch auf diesen Fall sind jene Formeln anwendbar, wenn man nur den Index auf eine schickliche Weise abändert. Nach der obigen Annahme folgten nämlich die in den Formeln enthaltenen Werthe des Index in der nachstehenden Ordnung auf einander:

$$i,\, i-1,\, i-2,\, \ldots\, m+1,\, m\, \ldots\, e+1,\, e,\, e-1,\, e-2\, \ldots \quad (x)$$

Dagegen entsprechen im umgekehrten Falle diesen Werthen die folgenden:

$$i,\, i+1,\, i+2\, \ldots\, m-1,\, m\, \ldots\, e-1,\, e,\, e+1,\, e+2\, \ldots \quad (y)$$

Verwechselt man daher die ersteren mit den letzteren, so verwandeln sich dadurch die Formeln unmittelbar in diejenigen, welche sich auf die umgekehrte Zählungsweise beziehen, und bei denen e grösser als i vorausgesetzt wird. Hierdurch erhalten wir zuerst aus (d), (e), (f), (g), (h), (i) und (k) die drei folgenden Systeme von Formeln zur Berechnung von $(e,\, i)$ und $[e,\, i]$:

$$\left.\begin{aligned} (e+1,\, e) &= 1 \\ (e,\, e) &= q_e \\ (i,\, e) &= q_i\, (i+1,\, e) + s_i\, (i+2,\, e) \\ [i,\, e] &= \frac{(i,\, e)}{(i+1,\, e)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (z)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} [e,\, e] &= q_e \\ [i,\, e] &= q_i + \frac{s_i}{[i+1,\, e]} \\ [i,\, e] &= q_i + \cfrac{s_i}{q_{i+1} + \cfrac{s_{i+1}}{q_{i+2} + \cfrac{s_{i+2}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{e-2}}{q_{e-1} + \cfrac{s_{e-1}}{q_e}}}}} \\ (i,\, e) &= [i,\, e]\,[i+1,\, e]\,\ldots\ldots\,[e,\, e] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} &(i-1,\, i) = 1 \\ &(i,\, i) = q_i \\ &(e,\, i) = q_e(e-1,\, i) + s_{e-1}(e-2,\, i) \\ &(e,\, i) = (i,\, e) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad \text{(B)}$$

Sodann werden die Differenzengleichung (o) und ihre Integrale (u) und (w) durch jene Verwechselungen:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= q_i\, u_{i+1} + s_i\, u_{i+2} + t_i \\ u_i &= (i,\, e)\, u_{e+1} + (i,\, e-1)\, s_e\, u_{e+2} \\ &\quad + \sum_{m}{}_e^i\, (i,\, m-1)\, t_m \\ &= (i,\, e+1)\, u_{e+2} + \sum_{m}{}_e^i\, (i,\, m-1)\, t_m \\ &= [i, e+1]\,[i+1, e+1] \dots [e+1, e+1]\, u_{e+2} \\ &\quad + \sum_{m}{}_e^i\, (i,\, m-1)\, t_m \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \text{(C)}$$

worin der Coefficient des letzten unter dem Summationszeichen begriffenen Gliedes, nämlich

$$(i,\, i-1) = 1$$

gesetzt werden muss, und

$$q_{e+1} = \frac{u_{e+1}}{u_{e+2}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad \text{(D)}$$

ist.

Die vorhergehenden Formeln werden vorzüglich in zwei Fällen gebraucht, einmal wenn $t = 0$, und dann, wenn $s = 0$ ist.

Im ersten Falle entsteht aus der Gleichung (o) die folgende:

$$u_i = q_i\, u_{i-1} + s_i\, u_{i-2} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(E)}$$

welcher vermöge (u) und (w) das Integral zugehört:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= (i,\, e)\, u_{e-1} + (i,\, e+1)\, s_e\, u_{e-2} \\ &= (i,\, e-1)\, u_{e-2} \\ &= [i, e-1]\,[i-1, e-1] \dots [e-1, e-1]\, u_{e-2} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \text{(F)}$$

wobei in den inclavirten Grössen

$$q_{e-1} = \frac{u_{e-1}}{u_{e-2}}$$

ist.

In der Folge wird uns die Kenntniss des Werthes von $\frac{u_i}{u_{i-1}}$ nöthig seyn. Wir erhalten denselben sehr leicht aus (F), wenn wir i mit $i-1$ verwechseln, und beide Ausdrücke in einander dividiren, sodann statt u_{e-1} seinen Werth $q_{e-1}\, u_{e-2}$, statt $[i,\, e-1]$ aber seinen Werth aus (g) substituiren. Hierdurch wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_i}{u_{i-1}} &= \frac{(i,\, e)\, q_{e-1} + (i,\, e+1)\, s_e}{(i-1,\, e)\, q_{e-1} + (i-1,\, e+1)\, s_e} \\ &= \frac{(i,\, e-1)}{(i-1,\, e-1)} = [i,\, e-1] \\ &= q_i + \cfrac{s_i}{q_{i-1} + \cfrac{s_{i-1}}{q_{i-2} + \cfrac{s_{i-2}}{\dots\dots + \cfrac{s_{e+1}}{q_e + \cfrac{s_e}{q_{e-1}}}}}} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \text{(G)}$$

Für den Fall, dass u_i durch zwei darauf folgende Werthe gegeben ist, verwandeln sich durch die in (x) und (y) angeführten Verwechselungen zuerst die Differenzengleichung (E) und ihr Integral (F) in die folgenden

$$\left.\begin{aligned} u_i &= q_i u_{i+1} + s_i u_{i+2} \\ u_i &= (i, e)\, u_{e+1} + (i, e-1)\, s_e u_{e+2} \\ &= (i, e+1)\, u_{e+2} \\ &= [i, e+1]\,[i+1, e+1] \ldots [e+1, e+1]\, u_{e+2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad \text{(H)}$$

wobei

$$q_{e+1} = \frac{u_{e+1}}{u_{e+2}}$$

ist. Sodann entstehen auf gleiche Weise aus (G) die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_i}{u_{i+1}} &= \frac{(i, e)\, q_{e+1} + (i, e-1)\, s_e}{(i+1, e)\, q_{e+1} + (i+1, e-1)\, s_e} \\ &= \frac{(i, e+1)}{(i+1, e+1)} = [i, e+1] \\ &= q_i + \cfrac{s_i}{q_{i+1} + \cfrac{s_{i+1}}{q_{i+2} + \cfrac{s_{i+2}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{e-1}}{q_e + \cfrac{s_e}{q_{e+1}}}}}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad \text{(J)}$$

Durch die Annahme $s = 0$ geht die Gleichung (o) in die Differenzengleichung vom ersten Grade und der ersten Ordnung

$$u_i = q_i\, u_{i-1} + t_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(K)}$$

über, deren Integral vermöge (u)

$$u_i = (i, e)\, u_{e-1} + \Sigma^i_{e\,m}\, (i, m+1)\, t_m$$

ist. In dem gegenwärtigen Falle wird aber

$$(i, e) = q_i \ldots q_e = [q_i]^{i-e+1}$$

$$(i, m+1) = q_i \ldots q_{m+1} = \frac{q_i \ldots q_e}{q_m \ldots q_e}$$

$$= \frac{[q_i]^{i-e+1}}{[q_m]^{m-e+1}}$$

wodurch das vorhergehende Integral die Gestalt annimmt:

$$u_i = [q_i]^{i-e+1} \left[u_{e-1} + \Sigma^i_{e\,m}\, \frac{t_m}{[q_m]^{m-e+1}} \right] \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(L)}$$

Hieraus folgen, je nachdem $e - 1$ entweder 0, oder $= 1$ gesetzt wird, die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} u_i &= [q_i]^i \left[u_0 + \Sigma^i_{1\,m}\, \frac{t_m}{[q_m]^m} \right] \\ u_i &= [q_i]^{i-1} \left[u_1 + \Sigma^i_{2\,m}\, \frac{t_m}{[q_m]^{m-1}} \right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(M)}$$

welche mit dem bekannten Integrale der Gleichung (K) übereinstimmen.

Enthält die Grösse t_i ein Glied, welches mit dem Zeichen Σ versehen ist, so entsteht dadurch in den vorhergehenden Integralen ein Glied, worin zwei solche Zeichen vorkommen.

In manchen Fällen ist es vortheilhaft, in Formeln der Art die Ordnung der beiden Integrationen umzukehren, wozu die folgenden Formeln dienen, die uns bei den künftigen Untersuchungen nützlich seyn werden. Ich betrachte zuerst den Ausdruck

$$\underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m \underset{n}{\Sigma_1^{m-1}}\, t_n$$

Er wird, wenn man die letzte Summe entwickelt,

$$\underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m \underset{n}{\Sigma_1^{m-1}}\, t_n = \underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m\, [t_1 + t_2 \ldots + t_{m-1}]$$

und wenn nun auch die erste Summe entwickelt wird,

$$\begin{aligned}\underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m \underset{n}{\Sigma_1^{m-1}}\, t_n = {} & q_2\, t_1 \\ & + q_3\, (t_1 + t_2) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + q_m\, (t_1 + t_2 \ldots + t_{m-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + q_i\, (t_1 + t_2 \ldots + t_{i-1})\end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck können wir jetzt nach t ordnen, wodurch er die Gestalt erhält:

$$\begin{aligned}\underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m \underset{n}{\Sigma_1^{m-1}}\, t_n = {} & t_1\, (q_2 + q_3 \ldots + q_i) \\ & + t_2\, (q_3 \ldots + q_i) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + t_m\, (q_{m+1} \ldots + q_i) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + t_{i-1}\, q_i\end{aligned}$$

oder nach der angenommenen Bezeichnungsart geschrieben,

$$\underset{m}{\Sigma_1^i}\, q_m \underset{n}{\Sigma_1^{m-1}}\, t_n = \underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n \quad \ldots\ldots \quad (N)$$

Der zweite Theil dieser Gleichung kann noch unter verschiedene andere Gestalten gebracht werden. Zuerst ist

$$\underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n = \underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n - \underset{n}{\Sigma_1^m}\, q_n$$

folglich

$$\underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n = \underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \,(\underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n - \underset{n}{\Sigma_1^m}\, q_n)$$

$\underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n$ ist von m unabhängig, daher

$$\underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n = \underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \cdot \underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n - \underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \underset{n}{\Sigma_1^m}\, q_n \quad \ldots \quad (O)$$

wobei der in dem ersten Gliede beigesetzte Punkt bedeutet, dass jede der beiden Integrationen unabhängig von der anderen ausgeführt und die erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt werden sollen.

Addirt man sodann zu (O) die identische Gleichung

$$0 = + t_i \underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n - t_i \underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n$$

und bringt diese Glieder unter die Integrationszeichen, so wird

$$\left.\begin{aligned}\underset{m}{\Sigma_1^{i-1}}\, t_m \underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n & = \underset{m}{\Sigma_1^i}\, t_m \cdot \underset{n}{\Sigma_1^i}\, q_n - \underset{m}{\Sigma_1^i}\, t_m \underset{n}{\Sigma_1^m}\, q_n \\ & = \underset{m}{\Sigma_1^i}\, t_m \underset{n}{\Sigma_{m+1}^i}\, q_n\end{aligned}\right\} \quad \cdot \quad (P)$$

Durch Substitution der in (O) und (P) erhaltenen Werthe nimmt der Ausdruck (N) die vier folgenden Formen an:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\substack{1\\m}}^{i} q_m \sum_{\substack{1\\n}}^{m-1} t_n &= \sum_{\substack{1\\m}}^{i-1} t_m \sum_{\substack{m+1\\n}}^{i} q_n \\ &= \sum_{\substack{1\\m}}^{i-1} t_m \,.\, \sum_{\substack{1\\n}}^{i} q_n - \sum_{\substack{1\\m}}^{i-1} t_m \sum_{\substack{1\\n}}^{m} q_n \\ &= \sum_{\substack{1\\m}}^{i} t_m \sum_{\substack{m+1\\n}}^{i} q_n \\ &= \sum_{\substack{1\\m}}^{i} t_m \,.\, \sum_{\substack{1\\n}}^{i} q_n - \sum_{\substack{1\\m}}^{i} t_m \sum_{\substack{1\\n}}^{m} q_n\end{aligned}\right\} \quad . \quad (Q)$$

Entwickeln wir auf ähnliche Weise den Ausdruck

$$\sum_{\substack{1\\m}}^{i} (q_m - q_{m-1})\, t_{m-1}$$

so giebt derselbe, nach q geordnet,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\\m}}^{i} (q_m - q_{m-1})\, t_{m-1} = &- q_0\, t_0 \\ &- q_1\, (t_1 - t_0) \\ &- q_2\, (t_2 - t_1) \\ &- \dots\dots\dots \\ &- q_m\, (t_m - t_{m-1}) \\ &- \dots\dots\dots \\ &- q_i\, (t_i - t_{i-1}) \\ &+ q_i\, t_i\end{aligned}$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\substack{1\\m}}^{i} (q_m - q_{m-1})\, t_{m-1} = &- \sum_{\substack{1\\m}}^{i} q_m\, (t_m - t_{m-1}) \\ &- q_0\, t_0 + q_i\, t_i\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (R)$$

Ist t_m constant und gleich t, so ist

$$t_m - t_{m-1} = 0$$

und die vorhergehende Formel wird

$$\sum_{\substack{1\\m}}^{i} (q_m - q_{m-1})\, t = t\,(q_i - q_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

Zweites Kapitel.

Entwickelung der, auf die Brechung sich beziehenden, genauen Formeln in Reihen.

Die in dem vorhergehenden Kapitel gefundenen, genauen Formeln müssen zur Erhaltung bequemer Näherungsformeln in Reihen entwickelt werden, deren Fortsetzung jedoch nach Umständen nur bis zu ihren zweiten oder dritten Gliedern nothwendig ist. Hierdurch entstehen zuerst diejenigen approximativen Formeln, bei denen sämmtliche Abweichungen vernachlässigt werden; die folgenden Glieder enthalten sodann die Correctionen, welche die Abweichung wegen der Gestalt hervorbringt, und deren Kenntniss die späteren Untersuchungen erheischen. Das gegenwärtige Kapitel ist dazu bestimmt, sowohl die ersteren, als die letzteren mit der erforderlichen Ausführlichkeit zu entwickeln.

Glieder der ersten Ordnung oder optische Formeln mit Vernachlässigung der Abweichungen.

4) Nach der am Ende von Nro. 2 gegebenen Definition sind die Glieder der ersten Ordnung diejenigen Werthe, welche man erhält, wenn man die genauen Ausdrücke in Reihen entwickelt, die nach steigenden Potenzen der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ geordnet sind, und in jeder Reihe nur das mit der niedrigsten Potenz derselben multiplicirte Glied berücksichtigt. Werden jene Coordinaten als klein vorausgesetzt, so sind die Reihen convergirend, und die Glieder der ersten Ordnung enthalten genäherte Auflösungen, welche in vielen Fällen hinreichen; es ist daher vor Allem nöthig, sich damit zu beschäftigen. Ich werde mich allgemein der lateinischen Buchstaben bedienen, um die Grössen der ersten Ordnung zu bezeichnen, die denjenigen correspondiren, für welche in Nro. 2 deutsche Buchstaben gebraucht wurden. Treiben wir daher die Näherung nicht weiter, so reicht es hin, die letzteren Buchstaben mit den ersteren zu verwechseln; und da die Gleichungen (a) und (d) von Nro. 2 zeigen, dass die Grössen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$ oder $\mathfrak{b}^2$ sind, so müssen sie gegen die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$ und die davon unabhängigen Glieder vernachlässigt werden. Hiernach geben die Formeln von Nro. 2:

$$\left.\begin{aligned}
h &= \frac{1}{c} \\
k &= \frac{1}{a} - \frac{1}{c} \\
\frac{1}{g} &= (k+h) - \frac{k}{n} = \frac{n-1}{na} + \frac{1}{nc} \\
\frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} &= \frac{b_{\prime}}{n_{\prime} c_{\prime}} = \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{n_{\prime} c_{\prime}} \\
b_{\prime} &= f \\
c_{\prime} &= g + d \\
Y_{\prime} &= f + (Y-f)\left(\frac{g+d}{g}\right) = Y\left(\frac{g+d}{g}\right) - \frac{fd}{g} \\
X_{\prime} &= X\left(\frac{g+d}{g}\right) \\
Z &= \frac{X^2+Y^2}{2a} \\
y &= f - (Y-f)\left(\frac{z-g}{g}\right) = -Y\left(\frac{z-g}{g}\right) + \frac{zf}{g} \\
x &= -X\left(\frac{z-g}{g}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Die sechste und die dritte dieser Gleichungen bestimmen die auf der Axe des Instrumentes genommenen Abscissen c und g, welche den Durchschnittspunkten des Strahles mit der Ebene der yz nach den verschiedenen Brechungen zugehören. Beziehen wir sie auf die i^{te} Fläche, so werden sie:

$$\left.\begin{aligned}
c_i &= g_{i-1} + d_{i-1} \\
\frac{1}{g_i} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c_i}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Da, wie wir in der Folge sehen werden, nicht immer die erste Abscisse c_1, sondern statt deren bisweilen eine andere beliebige unmittelbar gegeben ist, so nehme ich für diese entweder c_e oder g_e an, um die Formeln auf alle Fälle anwendbar zu machen.

Giebt man nun in (b) dem Index i nach und nach alle Werthe von $i = e$ bis zu $i = i$, oder von $i = e + 1$ bis zu $i = i$, je nachdem c_e oder g_e bekannt ist, so dienen die dadurch entstehenden Formeln, wenn man sie abwechselnd gebraucht, zur successiven Berechnung sämmtlicher auf c_e oder g_e folgenden Abscissen.

Wir können jedoch auch analytische Ausdrücke erhalten, welche c_i und g_i unmittelbar durch c_e oder g_e bestimmen, und daher die Integrale der Gleichungen (b) sind. Zu dem Ende führe ich statt c und g eine Reihe von veränderlichen Grössen u_0, u_1, etc. bis u_{2i} ein, und setze allgemein

$$\left.\begin{aligned}
c_i &= \frac{u_{2i-1}}{u_{2i-2}} \\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{u_{2i}}{u_{2i-1}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Durch Substitution dieser Werthe nehmen die Gleichungen (b) die Gestalt an:

$$u_{2i-1} = d_{i-1}\, u_{2i-2} + n_{i-1}\, u_{2i-3}$$
$$u_{2i} = \left(\frac{n-1}{a}\right)_i u_{2i-1} + u_{2i-2}$$

Sie stimmen mit der Gleichung (E) von No. 3 überein, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} q_{2i-1} &= d_{i-1} \\ q_{2i} &= \left(\frac{n-1}{a}\right)_i \\ s_{2i-1} &= n_{i-1} \\ s_{2i} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe enthalten die Ausdrücke (G) der allegirten Nummer die Integrale der Gleichungen (b), wenn man dem Index eine den verschiedenen Fällen entsprechende Bestimmung giebt.

Je nachdem nämlich c_e oder g_e gegeben ist, müssen wir zuerst e mit $2e$ oder mit $2e+1$ verwechseln, wodurch sich q_{e-1} im ersten Falle in q_{2e-1}, im zweiten dagegen in q_{2e} verwandelt, und es ist

$$\left.\begin{aligned} q_{2e-1} &= \frac{u_{2e-1}}{u_{2e-2}} = c_e \\ q_{2e} &= \frac{u_{2e}}{u_{2e-1}} = \frac{n_e}{g_e} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Setzt man hierauf statt i einmal $2i-1$, und dann $2i$, so geht hierdurch $\frac{u_i}{u_{i-1}}$ vermöge (c) in c_i und $\frac{n_i}{g_i}$ über, so dass diese Grössen unmittelbar durch c_e oder g_e ausgedrückt werden.

Die auf diese Weise erhaltenen Formeln sind denen analog, welche La Grange[1]), Piola[2]), Möbius[3]) und Bessel[4]) für ein System von Linsengläsern gefunden und daraus verschiedene Eigenschaften eines solchen Systems abgeleitet haben. Ich unterlasse hier, dieselben weiter zu entwickeln, da wir uns später ausführlich mit den zur ersten Ordnung gehörigen Problemen beschäftigen werden.

Zur Berechnung der, c_e oder g_e vorhergehenden Abscissen geben zuerst die Formeln (b), wenn man in der ersten derselben i mit $i+1$ verwechselt:

$$\left.\begin{aligned} g_i &= c_{i+1} - d_i \\ \frac{1}{c_i} &= \frac{n_i}{g_i} - \frac{(n-1)_i}{a_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

wodurch die erwähnten Abscissen successiv erhalten werden, wenn man dem Index i nach und nach alle Werthe von $i=e-1$ bis $i=1$,

[1]) Nouveaux mémoires de l'académie de Berlin, Cl. de math. année 1778 p. 162, 1803 p. 3.

[2]) Effemeridi astronomiche di Milano per l'anno 1822, append. p. 13.

[3]) Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, B. 5, p. 113.

[4]) Schumacher's astronomische Nachrichten, B. 18, p. 97.

oder von $i = e$ bis $i = 1$ giebt, je nachdem c_e oder g_e bekannt ist, und die Formeln abwechselnd gebraucht.

Um die Gleichungen (f) zu integriren, müssen wir ein ähnliches Verfahren, wie im vorhergehenden Falle, anwenden. Setzen wir nämlich allgemein

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n_i\, c_i} &= \frac{u_{2i}}{u_{2i+1}} \\ g_i &= \frac{u_{2i+1}}{u_{2i+2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (f) in die folgenden:

$$u_{2i+1} = -d_i\, u_{2i+2} + \frac{1}{n_{i+1}}\, u_{2i+3}$$

$$u_{2i} = \left(\frac{1-n}{na}\right)_i u_{2i+1} + u_{2i+2}$$

welche mit der ersten Gleichung (H) von No. 3 übereinstimmen, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} q_{2i+1} &= -d_i \\ q_{2i} &= \left(\frac{1-n}{na}\right)_i \\ s_{2i+1} &= \frac{1}{n_{i+1}} \\ s_{2i} &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots, \text{(h)}$$

Verwechselt man sodann in (J) von No. 3, e mit $2e-1$, oder mit $2e$, je nachdem c_e oder g_e gegeben ist, so geht q_{e+1} in q_{2e} oder in q_{2e+1} über, und es ist

$$\left.\begin{aligned} q_{2e} &= \frac{u_{2e}}{u_{2e+1}} = \frac{1}{n_e\, c_e} \\ q_{2e+1} &= \frac{u_{2e+1}}{u_{2e+2}} = g_e \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

Vermittelst dieser Werthe enthalten die allegirten Formeln die Integrale der Gleichungen (f), indem $\frac{u_i}{u_{i+1}}$ sich in $\frac{1}{n_i\, c_i}$, oder in g_i verwandelt, wenn i einmal mit $2i$, und dann mit $2i+1$ verwechselt wird.

Uebrigens folgen die Formeln, welche sich auf den letzten Fall beziehen, auch unmittelbar aus den für den ersten Fall gefundenen, wenn man darin den Index von i bis e zunehmen lässt, sodann c_i mit g_i, d_{i+1} mit $-d_i$, und n_i mit $\frac{1}{n_i}$ verwechselt, was darauf hinaus kommt, den Weg des Strahles rückwärts von der e^{ten} nach der 1^{ten} brechenden Fläche zu berechnen.

Ich gehe nun zur vierten Gleichung (a), welche die parallel mit der Axe der y genommenen Ordinaten f der erwähnten Durchschnittspunkte bestimmt. Auf die i^{te} Fläche bezogen wird sie

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i\, c_i} = \frac{g_{i-1}}{n_i\, c_i}\, \frac{f_{i-1}}{g_{i-1}}$$

Sie stimmt mit (K) von Nro. 3 überein, wenn darin

$$u = \frac{f}{g}$$

$$q_i = \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}$$

$$t_i = 0$$

gesetzt werden.

Ihr Integral, nach der ersten Formel (M) genommen, ist daher

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i c_i} = \left[\frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\right]^i \frac{f_0}{g_0} = \frac{1}{[n_i]^i} \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{g_0}{c_1} \frac{f_0}{g_0}$$

folglich, wenn man statt $\frac{g_0}{c_1}\frac{f_0}{g_0}$ seinen Werth $\frac{b_1}{c_1}$ substituirt, welchen die Ausdrücke (i) von Nro. 2 geben,

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i c_i} = \frac{1}{[n_i]^i} \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \frac{b_1}{c_1}$$

Bei den folgenden Untersuchungen ist es bequemer, statt der rechtwinkeligen Coordinaten b_1 und c_1, durch welche die Lage des leuchtenden Punktes bestimmt wurde, andere einzuführen.

Ziehen wir eine Linie von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche nach dem leuchtenden Punkte, und nennen

φ_1 die Tangente des Winkels, welchen diese Linie mit der Axe der z macht,

so ist

$$\varphi_1 = \frac{b_1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

und die Lage des leuchtenden Punktes ist durch die Grössen c_1 und φ_1, oder $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 vollkommen bestimmt, welche daher die Stelle der Coordinaten b_1 und c_1 vertreten können. Befindet sich der leuchtende Punkt an der Grenze des Gesichtsfeldes, so drückt φ_1 die Tangente des halben Gesichtsfeldes aus.

Setzen wir ausserdem zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &= n_i n_{i-1} \ldots n_1 = [n_i]^i \\ V_i &= \frac{g_{i-1}}{c_i} \frac{g_{i-2}}{c_{i-1}} \ldots \frac{g_1}{c_2} = \left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(l)}$$

so ist

ν_i das Brechungsverhältniss, unter der Voraussetzung, dass der Lichtstrahl unmittelbar in das i^{te} durchsichtige Mittel dringt, ohne die vorhergehenden zu durchlaufen;

V_i die durch das Instrument hervorgebrachte Vergrösserung, wenn die Lichtstrahlen nach dem Durchgange durch dasselbe unmittelbar in das dahinter befindliche Auge fallen, und wenn man keine Rücksicht darauf nimmt, dass die Gegenstände bei dem Gebrauche des Instrumentes in eine andere Entfernung, als bei der Betrachtung mit dem blossen Auge, gehalten werden müssen.

Durch diese Werthe nimmt der vorhergehende Ausdruck von $\frac{f_i}{g_i}$ die Gestalt an:

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{b_i}{n_i c_i} = \frac{V_i \varphi_1}{\nu_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

Hierbei müssen wir bemerken, dass man, um diese Formel auf die erste brechende Fläche anwenden zu können,

$$V_1 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

setzen muss, denn hieraus folgt, wie gehörig,

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{\phi_1}{v_1} = \frac{b_1}{n_1 c_1}$$

Endlich geben die siebente und die achte Gleichung (a), in Bezug auf die Coordinaten Y und X, welche den Durchschnittspunkten des Strahles mit den verschiedenen brechenden Flächen zugehören, nach vorheriger Substitution der Werthe von $(g + d)$ und $\frac{f}{g}$:

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} Y_{i-1} - \frac{V_{i-1} d_{i-1}}{v_{i-1}} \phi_1 \\ X_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} X_{i-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (o)$$

Diese Gleichungen entstehen aus (K) von Nro. 3, wenn darin einmal

$$u = Y$$

$$q_i = \frac{c_i}{g_{i-1}}$$

$$t_i = -\frac{V_{i-1} d_{i-1} \phi_1}{v_{i-1}}$$

und dann

$$u = X$$

$$q_i = \frac{c_i}{g_{i-1}}$$

$$t_i = 0$$

gesetzt werden.

Integriren wir sie daher nach der zweiten Formel (M) von Nro. 3, so erhalten wir

$$Y_i = \left[\frac{c_i}{g_{i-1}}\right]^{i-1} \left\{ Y_1 - \Sigma_2^i{}_m \left[\frac{g_{m-1}}{c_m}\right]^{m-1} \frac{V_{m-1} d_{m-1}}{v_{m-1}} \phi_1 \right\}$$

$$X_i = \left[\frac{c_i}{g_{i-1}}\right]^{i-1} X_1$$

Nach der in (l) angenommenen Bezeichnung ist aber

$$\left[\frac{c_i}{g_{i-1}}\right]^{i-1} = \frac{1}{V_i}$$

$$\left[\frac{g^{m-1}}{c_m}\right]^{m-1} = V_m$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= \frac{1}{V_i} \left\{ Y_1 - \Sigma_2^i{}_m \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}} \phi_1 \right\} \\ X_i &= \frac{X_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (p)$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$K^{(m)} = -\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}}$$

$$K_i = \Sigma_2^i K^{(m)}$$

so werden die vorhergehenden Ausdrücke

$$Y_i = \frac{1}{V_i}\,[Y_1 + K_i\,\phi_1]$$

$$X_i = \frac{X_1}{V_i}$$

Die erste dieser Formeln zeigt, dass $K_1 = 0$ gesetzt werden muss, damit der Werth von Y_1 darin begriffen ist.

Für die folgenden Untersuchungen ist es jedoch vortheilhaft, die Bezeichnungen so abzuändern, dass der Ausdruck von Y_1 dieselbe Gestalt hat, wie der von Y_i. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als den Ursprung der Y_i in denjenigen Punkt zu verlegen, dessen Ordinate

$$Y_1 = K_1\,\phi_1$$

ist, wobei K_1 eine willkürliche Constante bezeichnet. Versieht man nun Y_1, wenn es auf diesen neuen Ursprung bezogen wird, mit einem Accente, so ist

$$Y_1 = Y'_1 + K_1\,\phi_1$$

und die vorhergehenden Formeln nehmen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} K^{(m)} &= -\frac{V_{m-1}\,V_m\,d_{m-1}}{v_{m-1}} \\ K_i &= K_1 + \Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)} \\ Y_i &= \frac{1}{V_i}\,[Y'_1 + K_i\,\phi_1] \\ X_i &= \frac{X_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Hierdurch wird die neunte Gleichung (a)

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_i\,\phi_1)^2}{2\,a_i\,V_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

Da auf diese Art die Grössen g_i, f_i, X_i, Y_i und Z_i bestimmt sind, so sind die beiden letzten Gleichungen (a), auf die i^{te} Fläche bezogen, diejenigen, welche den Projectionen des gebrochenen Strahles auf den Ebenen der yz und der zx zugehören. Setzen wir in diesen Gleichungen $z_i = g_i$, so geben sie

$$y_i = f_i$$
$$x_i = 0$$

und da diese Werthe von Y_1 und X_1 unabhängig sind, so folgt daraus, dass sich alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, in demjenigen Punkte schneiden, dessen Coordinaten

$$x_i = 0$$
$$y_i = f_i$$
$$z_i = g_i$$

sind. Dieser Vereinigungspunkt ist daher das Bild des leuchtenden Punktes, wenn man nur die Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt. Eben so haben sich die Strahlen, ehe sie auf die i^{te} Fläche fielen, in dem der $(i-1)^{ten}$ Fläche zugehörigen Vereinigungspunkte

durchschnitten, dessen Coordinaten aus den vorhergehenden durch Verwechselung von i mit $(i-1)$ erhalten werden. In Bezug auf die i^{te} Fläche sind diese Coordinaten

$$x_i = 0$$
$$y_i = f_{i-1} = b_i$$
$$z_i = g_{i-1} + d_{i-1} = c_i$$

Man nennt daher gewöhnlich die Grössen c_i und g_i die der i^{ten} Fläche zugehörigen *Vereinigungsweiten* der Strahlen.

Glieder der höheren Ordnungen, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

5) Die Glieder der ersten Ordnung können als eine erste Näherung betrachtet werden, so dass die der höheren Ordnungen nur kleine Correctionen enthalten, welche an den ersteren angebracht werden müssen. Diese Correctionen sind dasjenige, was man gewöhnlich die *Abweichungen wegen der Gestalt* nennt. Um sie auf eine schickliche Weise zu bezeichnen, werde ich mich der Charakteristik der endlichen Differenzen bedienen, indem ich dieselbe vor die durch die erste Näherung gefundenen Grössen setze. Hiernach bezeichnet Δ die Glieder der zweiten Ordnung, Δ^2 die der dritten Ordnung, u. s. w.

Dieses vorausgesetzt, fange ich mit der Entwickelung der Formeln (f) von Nro. 2 an. Da die zweite derselben aus der ersten entsteht, wenn man y und $\mathfrak{Y}$ mit x und $\mathfrak{X}$ verwechselt und $\mathfrak{f} = 0$ setzt, so ist es nur nöthig, die erstere zu betrachten, nämlich

$$y = \mathfrak{f} - \frac{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{f})(\mathfrak{z}-\mathfrak{g})}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}}$$

$\mathfrak{Z}$ ist von der Ordnung $\mathfrak{X}^2$; treiben wir daher die Entwickelung nur bis zu den Gliedern der dritten Ordnung, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}-\mathfrak{Z}} = \frac{1}{\mathfrak{g}} + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}$$

folglich

$$y = \frac{\mathfrak{z}\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \mathfrak{Y}\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right) - \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z}$$
$$- \left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}}$$

Nach der angenommenen Bezeichnung hat man aber

$$\mathfrak{Y} = Y + \Delta Y + \Delta^2 Y$$
$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g}$$
$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g} + \Delta^2\frac{f}{g}$$
$$\mathfrak{Z} = Z + \Delta Z$$

Dieses giebt

$$\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{g}} - 1 = \frac{\mathfrak{z}-g}{g} + \mathfrak{z}\Delta\frac{1}{g} + \mathfrak{z}\Delta^2\frac{1}{g}$$

$$\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \mathfrak{Y}\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right) = \frac{zf}{g} - Y\left(\frac{z-g}{g}\right)$$

$$- z\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) - z\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)$$

$$- \Delta Y\left[\frac{z-g}{g} + z\Delta\frac{1}{g}\right] - \Delta^2 Y\left(\frac{z-g}{g}\right)$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\mathfrak{Z} = \frac{(Y-f)\,(z-g)\,Z}{g^2}$$

$$+ \frac{\Delta Y(z-g)Z}{g^2} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)Z$$

$$+ \frac{(Y-f)\,(z-g)\,\Delta Z}{g^2} + \frac{z\,(Y-f)\,Z}{g}\,\Delta\frac{1}{g}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\right)\left(\frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}}\right)\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}} = \frac{(Y-f)\,(z-g)\,Z^2}{g^3}$$

Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck von y in den folgenden:

$$y = -z\left\{\begin{aligned} & -\frac{f}{g} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) \\ & + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right) + \Delta\frac{1}{g}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right] \\ & + \left(\frac{z-g}{gz}\right)\left\{\begin{aligned} & Y + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right] + \Delta^2 Y \\ & + \frac{Z\Delta Y}{g} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)Z \\ & + \left(\frac{Y-f}{g}\right)\Delta Z + \left(\frac{Y-f}{g^2}\right)Z^2 \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Vermittelst der angegebenen Verwechselungen erhalten wir hieraus unmittelbar:

$$x = -z\left\{\begin{aligned} & X\Delta\frac{1}{g} + X\Delta^2\frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g}\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right] \\ & + \left(\frac{z-g}{gz}\right)\left\{\begin{aligned} & X + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right] + \Delta^2 X + \frac{Z\Delta X}{g} \\ & + XZ\Delta\frac{1}{g} + \frac{X}{g}\Delta Z + \frac{XZ^2}{g^2} \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Da die vorhergehenden Formeln nach ihrer Entwickelung sehr complicirt werden, so füge ich die folgenden Bemerkungen bei, welche dazu dienen, sie bei den Anwendungen, welche man gewöhnlich davon macht, sehr zu vereinfachen.

Der Hauptzweck der analytischen Untersuchungen in der Optik ist nämlich, die Lage der gebrochenen Strahlen in der Gegend des letzten durch sie hervorgebrachten Bildes zu berechnen, um Mittel zu finden, dasselbe so vollkommen als möglich zu machen. Nach Nro. 4 ist aber die jenem Bilde zugehörige Abscisse, wenn man nur die Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt,

$$z_i = g_i$$

Da nun $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i$

ist, so können wir schliessen, dass in einer Entfernung von dem Bilde, welche die Abweichungen nicht übersteigt, $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ eine Grösse von der Ordnung der Veränderung ist, welche die Abweichungen in $\frac{1}{g_i}$ hervorbringen, d. h. eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$. Beschränkt man sich daher auf die Glieder der zweiten Ordnung, welches in den gewöhnlichen Fällen hinreicht, so kann man die Produkte von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ in Grössen jener Ordnung vernachlässigen.

Was die Glieder der dritten Ordnung betrifft, so werden sie nur bei der Theorie der achromatischen Objective gebraucht, wo sie merkliche Werthe erhalten. In diesem Falle ist ein Theil der Glieder, welche sich auf das Objectiv beziehen, viel bedeutender, als alle übrigen, so dass man die letzteren als zu einer höheren Ordnung gehörig betrachten kann. So sind die minder beträchtlichen Glieder der zweiten Ordnung, welche von dem Objective herrühren, eben so wie diejenigen, welche den Ocularen zugehören, als Glieder der dritten Ordnung anzusehen. Bei der Berechnung der achromatischen Objective bestimmt man aber die in den Ausdrücken der Abweichungen enthaltenen willkürlichen Grössen auf eine solche Art, dass jene so vollkommen als möglich vernichtet werden, welches geschieht, wenn die Summe der correspondirenden Glieder der zweiten und dritten Ordnung verschwindet, die Glieder beider Ordnungen folglich gleich und entgegengesetzt werden, damit sie sich wechselseitig aufheben können. Hierdurch reduciren sich $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ und $X\Delta\frac{1}{g}$, welche den Abweichungen entsprechen, auf Grössen von der Ordnung derjenigen, welche von den Ocularen herrühren, und können daher in diesem Falle als Glieder der dritten Ordnung betrachtet werden; eben so $\left(\frac{z-g}{gz}\right)Y$ und $\left(\frac{z-g}{gz}\right)X$, da $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ immer von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g}$ ist, wenn man die Lage der Strahlen nur in der Nähe des letzten Bildes untersucht.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass es in den beiden angegebenen Fällen erlaubt ist, die Producte von $\Delta\frac{1}{g}$ und $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ in Grössen der zweiten Ordnung zu vernachlässigen. Hierdurch werden die Formeln (a) und (b), wenn man sie auf die i^{te} Fläche bezieht,

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -z_i\left\{-\frac{f_i}{g_i} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_i \right. \\ x_i &= -z_i\left\{X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} + X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i} + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_i\right. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Diese Formeln sind für alle Werthe von g_i brauchbar, welche bei den Anwendungen vorkommen. Wenn jedoch g_i nicht bedeutend gross ist, so können wir noch eine weitere Reduction eintreten lassen.

Betrachten wir nämlich in diesem Falle, ebenso wie in dem vorhergehenden, die Lage der Strahlen nur in der Nähe des letzten Bildes, so ist $(z-g)_i$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$, wir können daher nach dem oben Gesagten nunmehr die Producte von $\Delta\frac{1}{g_i}$ und $(z-g)_i$ in Grössen der zweiten Ordnung vernachlässigen. Hierdurch erhalten wir aus den Gleichungen (c), wenn wir in den von $(z-g)_i$ unabhängigen Gliedern z_i mit $g_i+(z-g)_i$ verwechseln, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -g_i\left\{-\frac{f_i}{g_i}+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i+\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i\right. \\ &\qquad\left.+\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i\left(Y-f\right)_i\right\} \\ x_i &= -g_i\left\{X_i\Delta\frac{1}{g_i}+X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i}+\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i X_i\right\} \end{aligned}\right\}\quad\text{(d)}$$

Wird g_i bedeutend gross, so ist das Bild durch den Einfluss der Abweichungen sehr weit von der Stelle entfernt, wo es sich befinden würde, wenn dieselben nicht vorhanden wären. In diesem Falle ist daher $(z-g)_i$, in Vergleichung mit g_i, keine kleine Grösse, und die Producte derselben in Grössen der zweiten Ordnung können nicht gegen die correspondirenden mit g_i multiplicirten Glieder vernachlässigt werden. Hierdurch verlieren die Formeln (d) bei beträchtlichen Werthen von g_i ihre Brauchbarkeit, und man muss die mit (c) bezeichneten anwenden, bei welchen dieser Nachtheil nicht eintritt, selbst wenn $g_i=\infty$ wird, indem alsdann z_i demungeachtet einen solchen Werth erhalten kann, dass $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ von derselben Ordnung, wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ bleibt.

Uebrigens entstehen die Formeln (d) auch aus den Formeln (c), wenn man in diesen den gemeinschaftlichen Factor z_i mit g_i, sodann in den von $(z-g)_i$ abhängenden Gliedern $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ mit $\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i$ verwechselt, und dem Ausdrucke von y_i das Glied $g_i\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i f_i$ zusetzt.

Aus diesem Grunde werde ich nur die Formeln (c) weiter entwickeln, weil nach beendigter Entwickelung die analogen Formeln, welche den mit (d) bezeichneten entsprechen, durch die angegebenen Veränderungen leicht daraus abgeleitet werden können.

Glieder der zweiten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

6) Beschäftigen wir uns zuerst mit den Gliedern der zweiten Ordnung, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vor-

kommen. Für ein beliebiges z sind diese Gleichungen nach (a) und (b) von Nro. 5:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -z_i \left\{ -\frac{f_i}{g_i} + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \left[Y_i + \left(\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right)_i\right] \right\} \\ x_i &= -z_i \left\{ X_i\Delta\frac{1}{g_i} + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \left[X_i + \left(\Delta X + \frac{XZ}{g}\right)_i\right] \right\} \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Nach Nro. 4 hat man

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{V_i\,\phi_1}{v_i}$$

$$Y_i = \frac{1}{V_i}\,(Y_1 + K_i\,\phi_1)$$

$$X_i = \frac{X_1}{V_i}$$

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (Y_1 + K_i\,\phi_1)^2}{2\,a_i\,V_i^2}$$

es bleibt daher nur noch übrig,

$$\Delta\frac{1}{g},\ \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right),\ \Delta\,Y \text{ und } \Delta\,X$$

zu finden.

7) Um $\Delta\frac{1}{g}$ zu entwickeln, fange ich mit der Berechnung des Werthes von $\mathfrak{G}$ an, welcher durch die Formel (d) von Nro. 2 gegeben ist. Da jene Grösse, eben so wie $\mathfrak{Z}$, zur zweiten Ordnung gehört, so kann man alle deutsche Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Bezeichnen wir daher durch G denjenigen Werth, welchen $\mathfrak{G}$ erhält, wenn man nur die Crössen der zweiten Ordnung berücksichtigt, so wird

$$G = (k+h)\,(t-w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) - \frac{Z}{g^2}$$

Die Grössen, welche in diesem Ausdrucke vorkommen, sind durch die Formeln (b) und (c) von Nro. 2 gegeben, und es folgt daraus

$$\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n}$$

$$\frac{1}{a} = k + h$$

$$Z = \left(\frac{k+h}{2}\right)2aZ$$

$$l = \frac{1}{n^2}\,[k^2\,.\,2aZ + 2kYhb + h^2b^2]$$

$$m = -kh\,.\,2aZ - 2hYhb + h^2b^2$$

$$\begin{aligned} t &= m - (k+h)\,Z - \frac{kYhb}{n^2} - \frac{h^2b^2}{n^2} \\ &= \left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right]2aZ - \left(2h + \frac{k}{n^2}\right)Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)h^2b^2 \end{aligned}$$

$$u = m - l$$
$$= -\left(kh + \frac{k^2}{n^2}\right) 2aZ - 2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2$$
$$w = u - (h+k)^2\, 2aZ$$
$$= -\left[(k+h)^2 + kh + \frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ$$
$$-2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2$$
$$\frac{Z}{g^2} = \left(\frac{k+h}{2}\right)\left[k + h - \frac{k}{n}\right]^2 2aZ$$
$$= \left[\frac{(k+h)^3}{2} - (k+h)^2 \frac{k}{n} + \frac{(k+h)}{2}\frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ$$

welche Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von G substituirt werden müssen. Setzt man ausserdem zur Abkürzung, da die grossen Buchstaben A, B u. s. w. nicht mehr gebraucht werden,

$$\left.\begin{aligned} A &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right) k^2 (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{c}\right)\right) \\ B &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right) k (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{c}\right)\right) \\ C &= -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right) k = -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

so ist das Resultat jener Substitution

$$G = -\left[A2aZ + BY\frac{hb}{n} + C\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \quad (b)$$

Beziehen wir diese Formel auf die m^{te} Fläche, substituiren statt Z_m und Y_m ihre Werthe, welche am Ende von Nro. 6 gegeben sind, statt $\left(\frac{hb}{n}\right)_m$ aber denjenigen, welcher aus (a) und (m) von Nro. 4 folgt, nämlich $\left(\frac{hb}{n}\right)_m = \left(\frac{b}{nc}\right) = \frac{V_m \phi_1}{v_m}$

so wird

$$G_m = -\frac{V_m^2}{v_m}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{A_v}{V^4}\right)_m (X_1^2 + Y_1'^2) + \left(\frac{2A_v K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m Y_1' \phi_1 \\ &+ \left(\frac{A_v K^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_m \phi_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Ich gehe nun zu der Gleichung (c) von Nro. 2 über. Behalten wir nur die Glieder der zweiten Ordnung bei, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n} + \Delta\frac{1}{g}$$
$$\frac{1}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{c} + \Delta\frac{1}{c}$$
$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h$$

$$\frac{\mathfrak{f}}{n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta\frac{1}{c}\right] = \frac{k}{n} - \frac{1}{n}\,\Delta\frac{1}{c}$$

$$\mathfrak{G} = G$$

Vermittelst dieser Werthe nimmt die allegirte Gleichung die Gestalt an:

$$\Delta\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\,\Delta\frac{1}{c} + G \quad \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

Man hat eben so

$$\Delta\frac{1}{g_{,}} = \frac{1}{n_{,}}\,\Delta\frac{1}{c_{,}} + G_{,}$$

und vermöge der zweiten Formel (g) von Nro. 2:

$$\Delta\frac{1}{c_{,}} = \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta\frac{1}{g}$$

Hierdurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung, wenn sie auf die i^{te} Fläche bezogen wird, in die folgende endliche Differenzengleichung:

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{g_{i-1}^2}{n_i\,c_i^2}\,\Delta\frac{1}{g_{i-1}} + G_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

Sie entsteht aus (K) von Nro. 3, wenn man darin

$$u = \Delta\frac{1}{g}$$

$$q_i = \frac{g_{i-1}^2}{n_i\,c_i^2}$$

$$t_i = G_i$$

setzt.

Ihr Integral nach der ersten Formel (M) jener Nummer genommen, ist daher

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \left[\frac{g_{i-1}^2}{n_i\,c_i^2}\right]^i \left\{ \Delta\frac{1}{g_0} + \Sigma_1^i{}_m \frac{G_m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{n_m\,c_m^2}\right]^m} \right\}$$

$$= \frac{1}{[n_i]^i}\left[\frac{g_{i-1}^2}{c_i^2}\right]^{i-1} \left\{ \frac{g_0^2}{c_1^2}\,\Delta\frac{1}{g_0} + \Sigma_1^i{}_m \frac{G_m\,[n_m]^m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{c_m^2}\right]^{m-1}} \right\}$$

Die Formeln (i) von Nro. 2 und (l) von Nro. 4 geben aber

$$\frac{g_0^2}{c_1^2}\,\Delta\frac{1}{g_0} = \Delta\frac{1}{c_1}$$

$$[n_i]^i = \nu_i$$

$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} = V_i$$

mithin wird das vorhergehende Integral

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left[\Delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i \frac{G_m\,\nu_m}{V_m^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (f)$$

Die Constante $\Delta\frac{1}{c_1}$ ist $= 0$, wenn der Punkt $b_1\,c_1$ ein wirklicher leuchtender Punkt ist, dessen Entfernung sich nicht verändert.

Da aber derselbe einem schon vorher gebrochenen Lichtstrahle angehören kann, die optischen Werkzeuge auch oft zur Betrachtung von Gegenständen gebraucht werden, welche sich in verschiedenen Entfernungen befinden, so behalte ich nicht nur jene Constante, sondern auch diejenigen, welche in der Folge vorkommen werden, bei.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt G_m seinen Werth zu substituiren. Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} L^{(m)} &= \left(\frac{A\,v}{V^4}\right)_m \\ M^{(m)} &= \left(\frac{2\,A\,v\,K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m \\ N^{(m)} &= \left(\frac{A\,v\,K^2}{V^4} + \frac{B\,K}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_m \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g)$$

so giebt der Ausdruck (c)

$$G_m = -\frac{V_m^2}{v_m}\,[L^{(m)}\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2) + M^{(m)}\,\acute{Y}_1\,\phi_1 + N^{(m)}\,\phi_1^2]$$

Da in der Folge die von $m = 1$ bis $m = i$ genommenen Summen der mit dem oberen Index (m) versehenen Coefficienten häufig vorkommen, so werde ich zur Abkürzung diese Summen mit denselben Buchstaben und dem unteren Index i bezeichnen, wonach z. B.

$$L_i = \Sigma_1^i\, L^{(m)}$$

bedeutet. Hierdurch erhält man, wenn man den vorhergehenden Werth von G_m in dem Integrale (f) substituirt:

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta\frac{1}{c_1} - L_i\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \\ &- M_i\,\acute{Y}_1\,\phi_1 - N_i\,\phi_1^2 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (h)$$

8) Zur Entwickelung von $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ ist es zuerst nöthig, die Gleichung (h) von Nro. 2 zu betrachten, nämlich

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}} \cdot \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\,\frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}} \; .$$

Mit Vernachlässigung der Grössen der dritten Ordnung ist

$$\frac{\mathfrak{f}_{,}}{\mathfrak{g}_{,}} = \frac{f_{,}}{g_{,}} + \Delta\frac{f_{,}}{g_{,}}$$

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g}$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c}_{,}} = 1 - \frac{d}{\mathfrak{c}_{,}} = 1 - \frac{d}{c_{,}} - d\,\Delta\frac{1}{c_{,}} = \frac{g}{c_{,}} - d\,\Delta\frac{1}{c_{,}}$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{n_{,}\mathfrak{c}_{,}}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\,\frac{n_{,}\mathfrak{G}_{,}}{\mathfrak{k}_{,}} = \frac{g}{n_{,}c_{,}}\,\frac{f}{g}\,\frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}}$$

Substituiren wir diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so erhalten wir durch die Vergleichung der zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen:

$$-\Delta\frac{f_{,}}{g_{,}} = \frac{-g}{n_{,}c_{,}}\,\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}}\,\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{c_{,}} + \frac{g}{n_{,}c_{,}}\,\frac{f}{g}\,\frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}} \quad (a)$$

Nach Nro. 7 ist aber

$$\Delta\frac{1}{c_{,}} = \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta\frac{1}{g}$$

folglich

$$-\Delta\frac{f_{,}}{g_{,}} = \frac{-g}{n_{,}c_{,}}\,\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}}\frac{g^2}{c_{,}^2}\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{g} + \frac{g}{n_{,}c_{,}}\frac{f}{g}\frac{n_{,}G_{,}}{k_{,}} \qquad \text{(b)}$$

Ferner giebt die Gleichung (e) von Nro. 7

$$Y_{,}\Delta\frac{1}{g_{,}} = \frac{g^2}{n_{,}c_{,}^2}\,Y_{,}\Delta\frac{1}{g} + Y_{,}G_{,}$$

mithin, wenn man in dem von $\Delta\frac{1}{g}$ abhängigen Gliede statt $Y_{,}$ seinen Werth

$$Y_{,} = \frac{c_{,}}{g}Y - \frac{fd}{g}$$

substituirt, welcher aus den Formeln (a) von Nro. 4 folgt,

$$Y_{,}\,\Delta\frac{1}{g_{,}} = \frac{g}{n_{,}c_{,}}\,Y\Delta\frac{1}{g} - \frac{d}{n_{,}}\frac{g^2}{c^2}\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{g} + Y_{,}G_{,}$$

Die Summe dieser Gleichung und der vorhergehenden (b), auf die i^{te} Fläche bezogen, ist

$$\left.\begin{aligned}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1}\\ &\quad + Y_i G_i + \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\left(\frac{f}{g}\right)_{i-1}\frac{n_i G_i}{k_i}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

Diese endliche Differenzengleichung hat einerlei Form mit der Gleichung (K) von Nro. 3, welche in die erstere übergeht, wenn darin

$$u = \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$$

$$q_i = \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}$$

$$t_i = Y_i G_i + \frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\left(\frac{f}{g}\right)_{i-1}\frac{n_i G_i}{k_i}$$

gesetzt werden.

Integriren wir daher die Gleichung (c) nach der ersten Formel (M) von Nro. 3, so wird

$$\begin{aligned}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i &= \left[\frac{g_{i-1}}{n_i c_i}\right]^{i}\left\{\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_0 + \Sigma_{m}{}_1^{i}\left[\frac{n_m c_m}{g_{m-1}}\right]^{m}\left[Y_m G_m + \frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{n_m G_m}{k_m}\right]\right.\\ &= \frac{1}{[n_i]^{i}}\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1}\left\{\frac{g_0}{c_1}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_0 + \Sigma_{m}{}_1^{i}\,[n_m]^{m}\left[\frac{c_m}{g_{m-1}}\right]^{m-1}\left[Y_m G_m + \frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{n_m G_m}{k_m}\right]\right.\end{aligned}$$

Vermöge (i) von Nro. 2, (k), (l) und (q) von Nro 4 ist aber

$$\frac{g_0}{c_1}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_0 = \left(Y\Delta\frac{1}{c} - \Delta\frac{b}{c}\right)_1$$

$$= (Y_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\varphi_1$$

$$[n_i]^i = \nu_i$$

$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} = V_i$$

folglich

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\phi_1 \\ + \Sigma_m^i \frac{\nu_m}{V_m}\left[Y_m G_m + \frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1} \frac{n_m G_m}{k_m}\right]\end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Die Formeln von Nro. 4 geben sodann

$$Y_m = \frac{1}{V_m}(\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1)$$

$$\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_m\,\phi_1}{\nu_m}$$

Hierdurch verwandelt sich das vorhergehende Integral in das folgende:

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\phi_1 \\ + \Sigma_1^i\left[\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1) + \frac{n_m G_m \phi_1}{k_m}\right]\end{array}\right\} \quad \text{(e)}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt $\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}$ und $\frac{n_m G_m}{k_m}$ ihre Werthe zu substituiren. Aus den Formeln (a) von Nro. 7 folgt aber

$$\frac{n_m A_m}{k_m} = \frac{B_m}{2}$$

Mit Berücksichtigung dieses Werthes erhält man daher durch den Ausdruck (c) derselben Nummer:

$$\begin{aligned}\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1) = &-\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &- \left[\left(\frac{A\nu K}{V^4}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) + \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m \acute{Y}_1^2\right]\phi_1 \\ &- \left(\frac{3A\nu K^2}{V^4} + \frac{2BK}{V^2} + \frac{C}{\nu}\right)_m \acute{Y}_1\,\phi_1^2 - \left(\frac{A\nu K^3}{V^4} + \frac{BK^2}{V^2} + \frac{CK}{\nu}\right)_m \phi_1^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n_m G_m}{k_m}\phi_1 = &-\left(\frac{B}{2V^2}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\phi_1 - \left(\frac{BK}{V^2} + \frac{nB}{k\nu}\right)_m \acute{Y}_1\,\phi_1^2 \\ &- \left(\frac{BK^2}{2V^2} + \frac{nBK}{k\nu} + \frac{nCV^2}{k\,\nu^2}\right)_m \phi_1^3\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}\frac{\nu_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1) + \frac{n_m G_m\,\phi_1}{k_m} = \\ = &-\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &- \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m \left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\phi_1 \\ &- \left(\frac{3A\nu K^2}{V^4} + \frac{3BK}{V^2} + \frac{C}{\nu} + \frac{nB}{k\nu}\right)_m \acute{Y}_1\,\phi_1^2 \\ &- \left(\frac{A\nu K^3}{V^4} + \frac{3BK^2}{2V^2} + \left(C + \frac{nB}{k}\right)\frac{K}{\nu} + \frac{nCV^2}{k\,\nu^2}\right)_m \phi_1^3\end{aligned}$$

Gebrauchen wir jetzt die Bezeichnungen (g) von Nro. 7, und setzen noch ausserdem

$$\left.\begin{aligned} D_m &= \left(C + \frac{nB}{k}\right)_m \\ &= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m [(n+3)k - 2nh]_m \\ &= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m \left[\frac{n+3}{a} - \frac{3(n+1)}{c}\right]_m \\ E_m &= \left(\frac{nC}{k}\right)_m = -\left(\frac{n^2-1}{2}\right)_m \\ O^{(m)} &= \left(\frac{3A_v K^2}{V^4} + \frac{3BK}{V^2} + \frac{D}{v}\right)_m \\ P^{(m)} &= \left(\frac{A_v K^3}{V^4} + \frac{3BK^2}{2V^2} + \frac{DK}{v} + \frac{EV^2}{v^2}\right)_m \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

so wird

$$\frac{v_m G_m}{V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m \phi_1) + \frac{n_m G_m \phi_1}{k_m} = -L^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1$$
$$- M^{(m)}\frac{(X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2)}{2}\phi_1 - O^{(m)}\acute{Y}_1\phi_1^2 - P^{(m)}\phi_1^3$$

Durch Substitution dieser Werthe und durch die Anwendung der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung bekommt das Integral (e) die Gestalt

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1 \\ &- L_i\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &- M_i\,\frac{(X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2)}{2}\phi_1 \\ &- O_i\,\acute{Y}_1\phi_1^2 - P_i\,\phi_1^3 \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

9) Ich gehe endlich zur Entwickelung der dritten und vierten Formel (g) von Nro. 2. Diese Formeln enstehen aus denen (f) derselben Nummer, wenn man x, y und z mit $\mathfrak{X}_\prime$, $\mathfrak{Y}_\prime$ und ($\mathfrak{Z}_\prime - d$) verwechselt, und da bei der Entwickelung

$$\mathfrak{X}_\prime = X_\prime + \Delta X_\prime$$
$$\mathfrak{Y}_\prime = Y_\prime + \Delta Y_\prime$$
$$\mathfrak{Z}_\prime = Z_\prime$$

gesetzt werden müssen, so haben wir, um von den Formeln (f) zu den Formeln (g) überzugehen:

$$x = X_\prime + \Delta X_\prime$$
$$y = Y_\prime + \Delta Y_\prime$$
$$z = Z_\prime - d$$
$$z - g = Z_\prime - (d+g) = Z_\prime - c,$$

Die Ausdrücke (a) von Nro. 6, welche die Entwickelungen der Formeln (f) von Nro. 2 sind, geben aber

$$y = Y - z\left[\left(\frac{Y-f}{g}\right) + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)\right] - \left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]$$

$$x = X - z\left[\frac{X}{g} + X\Delta\frac{1}{g}\right] - \left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]$$

Substituirt man hierin die vorhergehenden Werthe, vergleicht die Grössen der zweiten Ordnung, und bezieht ΔY, und ΔX, auf die i^{te} Fläche, so erhält man die folgenden Differenzengleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta Y_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}}\Delta Y_{i-1} + d_{i-1}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1} \\ &\quad + \left(\frac{Y-f}{g}\right)_{i-1}\left(\frac{c_i}{g_{i-1}}Z_{i-1} - Z_i\right) \\ \Delta X_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}}\Delta X_{i-1} + d_{i-1}X_{i-1}\Delta\frac{1}{g_{i-1}} \\ &\quad + \frac{X_{i-1}}{g_{i-1}}\left(\frac{c_i}{g_{i-1}}Z_{i-1} - Z_i\right)\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Die erste dieser Gleichungen hat dieselbe Form, wie die erste Gleichung (o) von Nro. 4, in welche sie sich verwandelt, wenn

Y mit ΔY,

$$-\frac{V_{i-1}\,d_{i-1}\,\varphi_1}{v_{i-1}} \text{ mit } d_{i-1}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1} + \left(\frac{Y-f}{g}\right)_{i-1}\frac{c_i}{g_{i-1}}(Z_{i-1} - Z_i)$$

verwechselt werden. Durch diese Verwechselungen giebt daher die erste Formel (p) von Nro. 4 unmittelbar ihr Integral, nämlich

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\Delta Y_1 + \Sigma_m{}_2^i\left\{\begin{aligned}&V_m\,d_{m-1}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1} \\ &+ V_m\left(\frac{Y-f}{g}\right)_{m-1}\left(\frac{c_m}{g_{m-1}}Z_{m-1} - Z_m\right)\end{aligned}\right\}\right\} \quad \text{(b)}$$

Nach der in Nro. 4 angenommenen Bezeichnung ist

$$Y_1 = \acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1$$

folglich

$$\Delta Y_1 = \Delta(\acute{Y} + K_1\,\varphi_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Substituiren wir sodann statt $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}$ den in (g) von Nro. 8 erhaltenen Werth:

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_{m-1}}{v_{m-1}}\left\{\begin{aligned}&(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1 \\ &- L_{m-1}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &- M_{m-1}\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &- O_{m-1}\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 - P_{m-1}\,\varphi_1^3\end{aligned}\right.$$

und bemerken wir, dass vermöge (q) von Nro. 4

$$\frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}} = - K^{(m)}$$

$$\Sigma_{2\,m}^{i} \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}} = - \Sigma_{2\,m}^{i} K^{(m)} = - (K_i - K_1)$$

sind, so wird

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_{2\,m}^{i} V_m d_{m-1} \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_{m-1} = \\ &\quad = - (\mathrm{K}_i - \mathrm{K}_1) [(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1 \varphi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \varphi_1] \\ &\quad + \Sigma_{2\,m}^{i} \mathrm{K}^{(m)} \left\{ \begin{aligned} & L_{m-1} (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \acute{Y}_1 \\ & + M_{m-1} \left(\frac{X_1^2 + 3 \acute{Y}_1^2}{2}\right) \varphi_1 \\ & + O_{m-1} \acute{Y}_1 \varphi_1^2 + P_{m-1} \varphi_1^3 \end{aligned} \right. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Da $\mathrm{K}^{(1)} = 0$ ist, so kann die in dem letzten Gliede enthaltene Summe auch von $m = 1$ bis zu $m = i$ genommen werden.

Aus den in Nro. 4 gefundenen Werthen folgt ferner

$$V_m = \frac{V_{m-1} g_{m-1}}{c_m}$$

$$\left(\frac{Y - f}{g}\right)_{m-1} = \frac{1}{V_{m-1} g_{m-1}} \left[\acute{Y}_1 + \left(\mathrm{K}_{m-1} - \frac{V_{m-1}^2 g_{m-1}}{v_{m-1}}\right) \varphi_1\right]$$

mithin

$$\Sigma_{2\,m}^{i} V_m \left(\frac{Y - f}{g}\right)_{m-1} \left(\frac{c_m}{g_{m-1}} \mathrm{Z}_{m-1} - \mathrm{Z}_m\right) =$$

$$= \Sigma_{2\,m}^{i} \left[\acute{Y}_1 + \left(\mathrm{K}_{m-1} - \frac{V_{m-1}^2 g_{m-1}}{v_{m-1}}\right) \varphi_1\right] \left(\frac{\mathrm{Z}_{m-1}}{g_{m-1}} - \frac{\mathrm{Z}_m}{c_m}\right)$$

Entwickelt man nun die letzte angedeutete Summe, so kommt jedes Z, mit Ausnahme des ersten und des letzten, in zwei auf einander folgenden Gliedern vor, welche vereinigt werden können. Hierdurch nimmt die Entwickelung, wenn man nur das erste, das m^{te} und das letzte Glied derselben schreibt, die Gestalt an:

$$\Sigma_{2\,m}^{i} V_m \left(\frac{Y - f}{g}\right)_{m-1} \left(\frac{c_m}{g_{m-1}} \mathrm{Z}_{m-1} - \mathrm{Z}_m\right) = \mathrm{Z}_1 \left[\frac{\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1 \varphi_1}{g_1} - \frac{\varphi_1}{v_1}\right]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \mathrm{Z}_m \left[\frac{\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_m \varphi_1}{g_m} - \frac{V_m^2}{v_m} \varphi_1 - \frac{(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_{m-1} \varphi_1)}{c_m} + \frac{V_{m-1}^2 g_{m-1}}{v_{m-1} c_m} \varphi_1\right]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$- \mathrm{Z}_i \left[\frac{\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_{i-1} \varphi_1}{c_i} - \frac{V_{i-1}^2 g_{i-1}}{v_{i-1} c_i} \varphi_1\right]$$

Es ist aber nach der allegirten Nummer

$$\frac{1}{g_m} - \frac{1}{c_m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)_m = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m$$

$$\mathrm{K}_{m-1} = \mathrm{K}_m + \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}}$$

$$V_{m-1} = \frac{V_m c_m}{g_{m-1}}$$

$$d_{m-1} = c_m - g_{m-1}$$

$$v_{m-1} = \frac{v_m}{n_m}$$

folglich

$$-\frac{K_{m-1}}{c_m} = -\frac{K_m}{c_m} - \frac{n_m V_m^2 (c_m - g_{m-1})}{g_{m-1} v_m}$$

$$\frac{V_{m-1}^2 g_{m-1}}{v_{m-1} c_m} = \frac{n_m V_m^2 c_m}{g_{m-1} v_m}$$

Die Substitution dieser Werthe giebt

$$Z_m \left[\frac{Y'_1 + K_m \varphi_1}{g_m} - \frac{V_m^2 \varphi_1}{v_m} - \frac{(Y'_1 + K_{m-1}\varphi_1)}{c_m} + \frac{V_{m-1}^2 g_{m-1}}{v_{m-1} c_m}\varphi_1\right] =$$

$$= Z_m \left[(Y'_1 + K_m \varphi_1)\left(\frac{1}{g_m} - \frac{1}{c_m}\right) + \left(\frac{n-1}{v}\right)_m V_m^2 \varphi_1\right] =$$

$$= Z_m \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m (Y'_1 + K_m \varphi_1) + \left(\frac{n-1}{v}\right)_m V_m^2 \varphi_1\right]$$

$$Z_i \left[\frac{Y'_1 + K_{i-1}\varphi_1}{c_i} - \frac{V_{i-1}^2 g_{i-1}}{v_{i-1} c_i}\varphi_1\right] = Z_i \left[\frac{Y'_1 + K_i \varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{v_i}\right]$$

Das erste mit Z_1 multiplicirte Glied kann so umgeändert werden, dass es aus zwei Theilen besteht, von welchen der letzte mit dem von Z_m abhängigen Gliede übereinstimmt, wenn in demselben $m = 1$ gesetzt wird. Addiren wir nämlich zu dem ersteren die Grösse

$$Z_1 \left[\frac{Y'_1 + K_1 \phi_1}{c_1} - \phi_1\right] - Z_1 \left[\frac{Y'_1 + K_1 \phi_1}{c_1} - \frac{n_1 V_1^2 \phi_1}{v_1}\right]$$

welche wegen

$$n_1 = v_1$$

$$V_1 = 1$$

identisch $= 0$ ist, so wird

$$Z_1 \left[\frac{Y'_1 + K_1 \phi_1}{g_1} - \frac{\phi_1}{v_1}\right] = Z_1 \left[\frac{Y'_1 + K_1 \phi_1}{c_1} - \phi_1\right]$$

$$+ Z_1 \left[(Y'_1 + K_1 \phi_1)\left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{c_1}\right) + \left(\frac{n-1}{v}\right)_1 V_1^2 \phi_1\right]$$

Setzen wir daher

$$\left.\begin{aligned} (Z)^{(m)} &= Z_m \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m (Y'_1 + K_m \phi_1) + \left(\frac{n-1}{v}\right)_m V_m^2 \varphi_1\right] \\ (Z)^{(i)} &= -Z_i \left[\frac{Y'_1 + K_i \varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{v_i}\right] \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

und gebrauchen den Werth von $(Z)^{(m)}$ für alle Werthe des Index von $m = 1$ bis zu $m = (i - 1)$ einschliesslich, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{m\,2}^{i} V_m \left(\frac{Y-f}{g}\right)_{m-1} \left(\frac{c_m}{g_{m-1}} Z_{m-1} - Z_m\right) &= \\ = Z_1 \left(\frac{Y'_1 + K_1 \varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) + \Sigma_1^i (Z)^{(m)} & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

Durch Substitution der in (c), (d) und (f) gefundenen Werthe verwandelt sich der Ausdruck (b) in den folgenden

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i} \left\{ \begin{aligned} & \Delta\,(Y'_1 + K_1\,\varphi_1) \\ & - (K_i - K_1)\left[(Y'_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\varphi_1\right] \\ & + Z_1\left[\frac{Y'_1 + K_1\,\varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right] \\ & + \sum_m{}_1^i \left\{ \begin{aligned} & K^{(m)}\,L_{m-1}\,(X_1^2 + Y'^2_1)\,Y'_1 \\ & + K^{(m)}\,M_{m-1}\left(\frac{X_1^2 + 3\,Y'^2_1}{2}\right)\phi_1 \\ & + K^{(m)}\,O_{m-1}\,Y'_1\,\varphi_1^2 + K^{(m)}\,P_{m-1}\,\phi_1^3 \\ & + (Z)^{(m)} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Die zweite Gleichung (a) entsteht aus der ersten, wenn man Y und $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ mit X und $X\Delta\frac{1}{g}$ verwechselt und $\frac{f}{g} = 0$ setzt.

Um die Veränderungen zu bewirken, welche hierdurch in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\Delta\,Y_i$ entstehen, müssen wir die Glieder unter dem Zeichen Σ, welche mit $K^{(m)}$ multiplicirt sind und sich auf $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}$ beziehen, mit den correspondirenden Gliedern von $\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}$ verwechseln, welche nach Nro. 7 sind:

$$L_{m-1}\,(X_1^2 + Y'^2_1)\,X_1 + M_{m-1}\,X_1\,Y'_1\,\varphi_1 + N_{m-1}\,X_1\,\varphi_1^2$$

In allen übrigen Gliedern dagegen müssen wir Y'_1 mit X_1 vertauschen und $\varphi_1 = 0$ setzen. Bezeichnen wir daher den hieraus resultirenden Werth von $(Z)^{(m)}$ mit $(z)^{(m)}$, so wird

$$\left. \begin{aligned} & (z)^{(m)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m\,Z_m\,X_1 \\ & \text{von } m = 1 \text{ bis } m = i - 1 \\ & (z)^{(i)} = -\frac{Z_i\,X_1}{c_i} \\ & \Delta X_i = \frac{1}{V_i} \left\{ \begin{aligned} & \Delta X_1 - (K_i - K_1)\,X_1\,\Delta\frac{1}{c_1} + \frac{Z_1\,X_1}{c_1} \\ & + \sum_m{}_1^i \left\{ \begin{aligned} & K^{(m)}\,L_{m-1}\,(X_1^2 + Y'^2_1)\,X_1 \\ & + K^{(m)}\,M_{m-1}\,X_1\,Y'_1\,\varphi_1 \\ & + K^{(m)}\,N_{m-1}\,X_1\,\varphi_1^2 \\ & + (z)^{(m)} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Die vorhergehenden Werthe von ΔY_i und ΔX_i reichen hin, um den von ΔZ_i zu finden. In der That, wenn man die Gleichung (a) von Nro. 2 unter die Gestalt bringt

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2a}$$

und statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ ihre Werthe substituirt, nämlich

$$\mathfrak{X} = X + \Delta X$$

$$\mathfrak{Y} = Y + \Delta Y$$

$$\mathfrak{Z} = Z + \Delta Z = \frac{X^2 + Y^2}{2a} + \Delta Z$$

so entsteht daraus

$$\Delta Z = \frac{Z^2 + 2\,X\Delta X + 2\,Y\Delta Y}{2a}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{X^2+Y^2}{2a}\right)^2 + 2\,X\Delta X + 2\,Y\Delta Y\right] \quad (i)$$

Auch geben die Werthe von ΔY_i und ΔX_i diejenigen der Grössen $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i$ und $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i$, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vorkommen, wenn man zu den ersteren die aus Nro. 4 genommenen Werthe von $\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i$ und $\left(\frac{XZ}{g}\right)_i$ addirt. Man hat

$$\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i = \frac{Z_i}{V_i}\left(\frac{\acute{Y}_1 + K_i\varphi_1}{g_i} - \frac{V_i^2\varphi_1}{\nu_i}\right)$$

Das letzte Glied von ΔY_i ist

$$\Delta Y_i = \ldots \frac{1}{V_i}(Z)^{(i)} = \ldots - \frac{Z_i}{V_i}\left[\frac{\acute{Y}_1 + K_i\varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2\phi_1}{\nu_i}\right]$$

Diese beiden Glieder vereinigen sich, wenn die Ausdrücke von ΔY_i und $\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i$ addirt werden, und geben das correspondirende Glied von

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i =$$

$$= \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[(\acute{Y}_1 + K_i\phi_1)\left(\frac{1}{g_i} - \frac{1}{c_i}\right) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_i V_i^2\phi_1\right]$$

$$= \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_i k_i\,(\acute{Y}_1 + K_i\phi_1) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_i V_i^2\phi_1\right]$$

Wir können daher den Ausdruck von ΔY_i auch für

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i$$

beibehalten, wenn wir nur der Grösse $(Z)^{(i)}$ eine andere Bedeutung geben, so dass sie dem vorhergehenden Werthe entspricht, nämlich

$$(Z)^{(i)} = Z_i\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_i k_i\,(\acute{Y}_1 + K_i\phi_1) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_i V_i^2\phi_1\right]$$

Hierdurch wird das letzte Glied von

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i = \ldots \frac{1}{V_i}(Z)^{(i)}$$

und hat dieselbe Gestalt, wie das letzte Glied von ΔY_i.

Die Vergleichung des vorhergehenden Werthes von $(Z)^{(i)}$ mit dem in (e) gegebenen Werthe von $(Z)^{(m)}$ zeigt, dass der erstere in dem letzteren begriffen ist, wenn darin $m=i$ gesetzt wird.

Hiernach erhalten wir zur Berechnung von $\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i$ die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
&(Z)^{(m)} = Z_m\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m(\acute{Y}_1+K_m\varphi_1)+\left(\frac{n-1}{v}\right)_m V_m^2\varphi_1\right]\\
&\text{von } m=1 \text{ bis } m=i\\
&\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i=\frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&\Delta(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\\
&-(K_i-K_1)\left[(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right]\\
&+Z_1\left[\frac{\acute{Y}_1+K_1\varphi_1}{c_1}-\varphi_1\right]\\
&+\Sigma_1^i{}_m\left\{\begin{aligned}
&K^{(m)}L_{m-1}(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1\\
&+K^{(m)}M_{m-1}\left(\frac{X_1^2+3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\\
&+K^{(m)}O_{m-1}\acute{Y}_1\varphi_1^2+K^{(m)}P_{m-1}\varphi_1^3\\
&+(Z)^{(m)}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(k)}$$

Vermittelst der angegebenen Verwechselungen folgen hieraus unmittelbar die correspondirenden Formeln zur Berechnung von $\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_i$, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
&(z)^{(m)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m Z_m X_1\\
&\text{von } m=1 \text{ bis } m=i\\
&\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_i=\frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&\Delta X_1-(K_i-K_1)X_1\Delta\frac{1}{c_1}+\frac{Z_1X_1}{c_1}\\
&+\Sigma_1^i{}_m\left\{\begin{aligned}
&K^{(m)}L_{m-1}(X_1^2+\acute{Y}_1^2)X_1\\
&+K^{(m)}M_{m-1}X_1\acute{Y}_1\phi_1\\
&+K^{(m)}N_{m-1}X_1\phi_1^2\\
&+(z)^{(m)}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(l)}$$

Die in den vorhergehenden Ausdrücken enthaltenen Grössen von der Form $\Sigma_1^i{}_m K^{(m)}L_{m-1}$ können nach den in (Q) von Nro. 3 gefundenen Formeln unter eine andere Gestalt gebracht werden.

Setzen wir nämlich

$$q_1 = K_1$$
$$q_m = K^{(m)}$$

von $m=2$ bis $m=i$,

$$t_m = L^{(m)}$$

so wird

$$\Sigma_{1\,n}^{m}\, q_n = K_1 + \Sigma_2^m\, K^{(m)} = K_m$$
$$\Sigma_{m+1\,n}^{i}\, q_n = K_i - K_m$$
$$\Sigma_{1\,n}^{m-1}\, t_n = \Sigma_{1\,n}^{m-1}\, L^{(n)} = L_{m-1}$$

folglich geben die allegirten Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{1\,m}^{i}\, K^{(m)}\, L_{m-1} &= K_i\, L_i - \Sigma_{1\,m}^{i}\, K_m\, L^{(m)} \\ &= K_i\, L_{i-1} - \Sigma_{1\,m}^{i-1}\, K_m\, L^{(m)} \\ &= \Sigma_{1\,m}^{i}\, (K_i - K_m)\, L^{(m)} \\ &= \Sigma_{1\,m}^{i-1}\, (K_i - K_m)\, L^{(m)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (m)$$

woraus die übrigen Grössen $\Sigma_{1\,m}^{i}\, K^{(m)}\, M_{m-1}$ etc. durch blosse Verwechselung von L mit M etc. erhalten werden.

10) Für die Folge ist es nothwendig, in den Formeln der vorhergehenden Nummer diejenigen Glieder zu vereinigen, welche in Bezug auf X_1, $\acute{Y}_1$ und ϕ_1 einerlei Argument haben, und zu diesem Ende die von Z abhängigen Glieder durch jene Grössen auszudrücken. Hiervon kann jedoch das ausserhalb des Summationszeichens befindliche, von Z_1 abhängige Glied ausgenommen werden, da dasselbe, wie wir später sehen werden, aus der Rechnung herausfällt.

In (r) von Nro. 4 wurde gefunden:

$$Z_m = \frac{X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1)^2}{2\,a_m\,V_m^2}$$

und da

$$V_1 = 1$$

ist, so verwandeln sich hierdurch die in (e) der vorhergehenden Nummer eingeführten Grössen in die folgenden:

$$(Z)^{(m)} = \left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_m \phi_1)^2\right] \cdot \left[\frac{(n-1)_m\, k_m}{2 n_m\, a_m\, V_m^2}(\acute{Y}_1 + K_m\,\phi_1) + \left(\frac{n-1}{2\nu a}\right)_m \phi_1\right]$$

von $m = 1$ bis $m = i - 1$

$$(Z)^{(i)} = \left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_i\,\phi_1)^2\right] . \left[-\frac{(\acute{Y}_1 + K_i\,\phi_1)}{2\,a_i\,c_i\,V_i^2} + \left(\frac{n}{2\nu a}\right)_i \phi_1\right]$$

Setzen wir daher

$$\left.\begin{aligned} l^{(m)} &= \left[\frac{(n-1)\,k}{2 n a V^2}\right]_m = \left[\frac{(n-1)}{2 n a V^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right]_m \\ q^{(m)} &= \left(\frac{n-1}{2\nu a}\right)_m \\ &\text{von } m = 1 \text{ bis } m = i - 1 \\ l^{(i)} &= -\left(\frac{1}{2 a c V^2}\right)_i \\ q^{(i)} &= \left(\frac{n}{2\nu a}\right)_i \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

so sind sämmtliche (Z) in der Formel enthalten:

$$(Z)^{(m)} = [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_m \phi_1)^2][l^{(m)}(\acute{Y}_1 + K_m \phi_1) + q^{(m)}\phi_1] \quad . \quad (b)$$

folglich, wenn man entwickelt und nach X_1, $\acute{Y}_1$ und ϕ_1 ordnet,

$$\begin{aligned}(Z)^{(m)} &= l^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1 + 2\,l^{(m)} K_m \left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\phi_1 \\ &+ q^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\phi_1 + (3\,l^{(m)} K_m^2 + q^{(m)} K_m)\acute{Y}_1 \phi_1^2 \\ &+ (l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2)\phi_1^3\end{aligned}$$

Hierdurch wird der Ausdruck (g) der vorhergehenden Nummer

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1) \\ &-(K_i - K_1)\left[(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right] \\ &+ Z_1\left[\frac{\acute{Y}_1 + K_1\phi_1}{c_1} - \phi_1\right] \\ &+ \Sigma_m^i \left\{\begin{aligned}&(K^{(m)} L_{m-1} + l^{(m)})(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1 \\ &+ (K^{(m)} M_{m-1} + 2\,l^{(m)} K_m)\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\phi_1 \\ &+ q^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\phi_1 \\ &+ (K^{(m)} O_{m-1} + 3\,l^{(m)} K_m^2 + 2\,q^{(m)} K_m)\acute{Y}_1 \phi_1^2 \\ &+ (K^{(m)} P_{m-1} + l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2)\phi_1^3\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Ebenso sind die in (h) jener Nummer gegebenen Werthe der sämmtlichen (z) vermöge der in (a) angenommenen Bezeichnungen in der Formel begriffen:

$$\left.\begin{aligned}(z)^{(m)} &= l^{(m)}[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_m\phi_1)^2]X_1 \\ &= l^{(m)}(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)X_1 + 2\,l^{(m)} K_m X_1 \acute{Y}_1 \phi_1 + l^{(m)} K_m^2 X_1 \phi_1^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad (c)$$

wodurch der daselbst gefundene Ausdruck von ΔX_i sich in den folgenden verwandelt:

$$\Delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta X_1 - (K_i - K_1)X_1\Delta\frac{1}{c_1} + \frac{Z_1 X_1}{c_1} \\ &+ \Sigma_m^i\left\{\begin{aligned}&(K^{(m)} L_{m-1} + l^{(m)})(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)X_1 \\ &+ (K^{(m)} M_{m-1} + 2\,l^{(m)} K_m)X_1 \acute{Y}_1 \phi_1 \\ &+ (K^{(m)} N_{m-1} + l^{(m)} K_m^2)X_1 \phi_1^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\Delta(Y)_1 &= \Delta(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1) + K_1\left[(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right] \\ &\quad + Z_1\left[\frac{\acute{Y}_1 + K_1\phi_1}{c_1} - \phi_1\right] \\ \Delta(X)_1 &= \Delta X_1 + K_1 X_1 \Delta\frac{1}{c_1} + \frac{Z_1 X_1}{c_1} \\ L'^{(m)} &= K^{(m)} L_{m-1} + l^{(m)} \\ M'^{(m)} &= K^{(m)} M_{m-1} + 2\,l^{(m)} K_m \\ N'^{(m)} &= K^{(m)} N_{m-1} + l^{(m)} K_m^2 \\ O'^{(m)} &= K^{(m)} O_{m-1} + 3\,l^{(m)} K_m^2 + 2\,q^{(m)} K_m \\ P'^{(m)} &= K^{(m)} P_{m-1} + l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (d)$$

so nehmen die Ausdrücke von ΔY_i und ΔX_i, vermittelst der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}\Delta Y_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta(Y)_1 - K_i\left[(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right]\\ &+ L'_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1 + M'_i\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\phi_1\\ &+ q_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\phi_1 + O'_i\acute{Y}_1\phi_1^2 + P'_i\varphi_1^3\end{aligned}\right.\\ \Delta X_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta(X)_1 - K_i X_1\Delta\frac{1}{c_1} + L'_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)X_1\\ &+ M'_i X_1\acute{Y}_1\varphi_1 + N'_i X_1\varphi_1^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Wir haben am Ende der vorhergehenden Nummer gesehen, dass $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i$ und $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i$ sehr leicht aus ΔY_i und ΔX_i abgeleitet werden können, wenn man in den letzteren den Grössen $(Z)^{(i)}$ und $(z)^{(i)}$ veränderte Werthe giebt, welche in den allgemeinen Formeln für $(Z)^{(m)}$ und $(z)^{(m)}$ begriffen sind. Eine Folge hiervon ist, dass alsdann auch $l^{(i)}$ und $q^{(i)}$ abgeänderte, in den allgemeinen Ausdrücken von $l^{(m)}$ und $q^{(m)}$ enthaltene Werthe bekommen, nämlich

$$\left.\begin{aligned}l^{(i)} &= \left[\frac{(n-1)k}{2naV^2}\right]_i = \left[\frac{(n-1)}{2naV^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right]_i\\ q^{(i)} &= \left(\frac{n-1}{2va}\right)_i\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Unterscheiden wir daher die Coefficienten, welche dadurch entstehen, dass man in den Coefficienten der Formeln (e) statt $l^{(i)}$ und $q^{(i)}$ die Werthe (f) gebraucht, durch die Hinzufügung von einem Accente, so erhalten wir aus jenen Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta(Y)_1 - K_i\left[(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right]\\ &+ L''_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1\\ &+ M''_i\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\\ &+ q'_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\varphi_1\\ &+ O''_i\acute{Y}_1\varphi_1^2 + P''_i\varphi_1^3\end{aligned}\right.\\ \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\Delta(X)_1 - K_i X_1\Delta\frac{1}{c_1} + L''_i(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)X_1\\ &+ M''_i X_1\acute{Y}_1\varphi_1 + N''_i X_1\varphi_1^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} \quad (g)$$

11) Bei der Entwickelung der Grössen der dritten Ordnung ist die Kenntniss derjenigen Werthe erforderlich, welche die Grössen der zweiten Ordnung annehmen, wenn man darin alle Glieder vernachlässigt, die ursprünglich mit b oder f multiplicirt waren; bestimmen wir daher diese Werthe.

Der in (a) von Nro. 4 gegebene Ausdruck von Y, zeigt, dass unter jener Voraussetzung das darin enthaltene Glied $\frac{fd}{g}$ wegfällt.

Da nun bei der weiteren Entwickelung aus demselben die Grösse

$$\phi_1 \sum_m{}_2^i K^{(m)} = (K_i - K_1)\phi_1$$

entstand, so können wir die letztere ebenfalls vernachlässigen, wodurch

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \frac{X_1}{V_i} \\ Y_i &= \frac{1}{V_i}[Y'_1 + K_1\phi_1] \\ Z_i &= \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_1\phi_1)^2}{2a_i V_i^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (a)$$

werden.

Ferner giebt die Formel (b) von Nro. 7, wenn man darin $b = 0$ setzt,

$$G_m = -A_m 2a_m Z_m$$

so dass wir in dem allgemeinen Ausdrucke dieser Grösse

$$B_m = C_m = 0$$
$$K_m = K_1$$

nehmen müssen, um sie nach der obigen Voraussetzung zu berechnen.

Ebenso ist aus (d) von Nro. 8 ersichtlich, dass das Glied

$$\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{n_m G_m}{k_m}$$

gegenwärtig nicht berücksichtigt zu werden braucht. Da nun dasselbe in den Ausdrücken von D_m und E_m die Glieder $\left(\frac{nB}{k}\right)_m$ und $\left(\frac{nC}{k}\right)_m$ hervorbringt, so folgt daraus auch

$$D_m = E_m = 0$$

Hierdurch verwandeln sich die Formeln (g) und (h) von Nro. 7, (f) und (g) von Nro. 8 in die nachstehenden:

$$\left.\begin{aligned} L^{(m)} &= \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m \\ M^{(m)} &= 2K_1\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = 2K_1 L^{(m)} \\ N^{(m)} &= K_1^2\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = K_1^2 L^{(m)} \\ O^{(m)} &= 3K_1^2\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = 3K_1^2 L^{(m)} \\ P^{(m)} &= K_1^3\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = K_1^3 L^{(m)} \\ \Delta\frac{1}{g_i} &= \frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta\frac{1}{c_1} - L_i(X_1^2 + Y_1'^2) \\ &-2L_i Y'_1 K_1\phi_1 - L_i K_1^2\phi_1^2 \end{aligned}\right. \\ &= \frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\Delta\frac{1}{c_1} - L_i[X_1^2 + (Y'_1 + K_1\phi_1)^2]\right\} \end{aligned}\right\}(b)$$

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y'_1+K_1\phi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\phi_1\\ -L_i(X_1^2+Y_1'^2)Y'_1\\ -L_i(X_1^2+3Y_1'^2)K_1\phi_1\\ -3L_iY'_1K_1^2\phi_1^2-L_iK_1^3\phi_1^3\end{array}\right\}$$

$$=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y'_1+K_1\phi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\phi_1\\ -L_i(Y'_1+K_1\phi_1)[X_1^2+(Y'_1+K_1\phi_1)^2]\end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

In dem Ausdrucke (b) von Nro. 9 fällt zuerst das mit $\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}$ multiplicirte Glied weg. Dieses bringt bei der weiteren Entwickelung in dem Ausdrucke (b) von Nro. 10 das mit $q^{(m)}$ multiplicirte Glied hervor, so dass also diese Grösse hier $=0$ ist. Ferner können wir, da $(K_m-K_1)\phi_1$ vernachlässigt wird, in (b) und (c) von Nro. 10, K_m mit K_1 verwechseln, wodurch sich diese Formeln in folgende verwandeln:

$$(Z)^{(m)}=l^{(m)}[X_1^2+(Y'_1+K_1\phi_1)^2](Y'_1+K_1\phi_1)$$
$$(z)^{(m)}=l^{(m)}[X_1^2+(Y'_1+K_1\phi_1)^2]X_1$$

Hieraus folgt, dass in den mit $l^{(m)}$ multiplicirten Gliedern der Ausdrücke (d) von Nro. 10 ebenfalls K_m mit K_1 verwechselt werden kann. Substituiren wir endlich in denselben statt L_{m-1} etc. diejenigen Werthe, welche aus (b) der gegenwärtigen Nummer folgen, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l}L'^{(m)}=K^{(m)}L_{m-1}+l^{(m)}\\ M'^{(m)}=2K_1(K^{(m)}L_{m-1}+l^{(m)})=2K_1L'^{(m)}\\ N'^{(m)}=K_1^2(K^{(m)}L_{m-1}+l^{(m)})=K_1^2L'^{(m)}\\ O'^{(m)}=3K_1^2(K^{(m)}L_{m-1}+l^{(m)})=3K_1^2L'^{(m)}\\ P'^{(m)}=K_1^3(K^{(m)}L_{m-1}+l^{(m)})=K_1^3L'^{(m)}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(c)}$$

Hierdurch geben die Formeln (e) und (g) von Nro. 10

$$\left.\begin{array}{l}\Delta Y_i=\frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\Delta(Y)_1-K_i\left[(Y'_1+K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right]\\ +L'_i(Y'_1+K_1\varphi_1)[X_1^2+(Y'_1+K_1\varphi_1)^2]\end{array}\right.\\ \Delta X_i=\frac{1}{V_i}\left\{\Delta(X)_1-K_iX_1\Delta\frac{1}{c_1}+L'_iX_1[X_1^2+(Y'_1+K_1\varphi_1)^2)]\right.\\ \left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i=\frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\Delta(Y)_1-K_i\left[(Y'_1+K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right]\\ +L''_i(Y'_1+K_1\varphi_1)[X_1^2+(Y'_1+K_1\varphi_1)^2]\end{array}\right.\\ \left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_i=\frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\Delta(X)_1-K_iX_1\Delta\frac{1}{c_1}\\ +L''_iX_1[X_1^2+(Y'_1+K_1\varphi_1)^2]\end{array}\right.\end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Vermöge (i) von Nro. 9 ist

$$\Delta Z_i=\frac{1}{2a_i}\left[\frac{X^2+Y^2}{2a}+2X\Delta X+2Y\Delta Y\right]_i$$

folglich, wenn wir die in (a) und (d) gefundenen Werthe substituiren,

$$\Delta Z_i = \frac{1}{2\,a_i\,V_i^2}\left\{\begin{array}{l} 2\,[X_1\,\Delta(X)_1 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta(Y)_1] \\ -2\,K_i\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)^2]\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ +2\,K_i\,(Y_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\,\varphi_1 \\ +\left(2\,L_i' + \frac{1}{4\,a_i^2\,V_i^2}\right)[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)^2]^2 \end{array}\right\} \quad \text{(e)}$$

Ausser diesen speciellen Werthen der zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen werden bei den folgenden Entwickelungen die partiellen Differentialcoefficienten der Grössen A, B etc. in Bezug auf h und auf n gebraucht; berechnen wir daher dieselben.

Die Formeln (a) von Nro. 7 und (f) von Nro. 8 zeigen, dass jene Grössen Functionen von a, h, k und n sind; da aber a als unveränderlich betrachtet wird, und k selbst eine Function von h ist, so können wir dieselben als Functionen von h und n allein ansehen, wenn wir bei der Differentiation k als eine implicite Function von h behandeln.

Bezeichnen wir daher durch $\frac{dA}{dh}$ und $\frac{dA}{dk}$ die partiellen Differentialcoefficienten von A unter der Voraussetzung, dass h und k als absolute veränderliche Grössen betrachtet werden, durch $\left(\frac{dA}{dh}\right)$ dagegen den partiellen Differentialcoefficienten von A unter der Voraussetzung, dass k als eine Function von h behandelt wird, so ist

$$\left(\frac{dA}{dh}\right) = \frac{dA}{dh} + \frac{dA}{dk}\,\frac{dk}{dh}$$

Aus (a) von Nro. 4 folgt aber

$$k = \frac{1}{a} - h$$

mithin

$$\frac{dk}{dh} = -1$$

und

$$\left(\frac{dA}{dh}\right) = \frac{dA}{dh} - \frac{dA}{dk}$$

wonach die Differentiationen in Bezug auf h leicht ausgeführt werden können.

Der Bequemlichkeit wegen werde ich folgende Bezeichnungen gebrauchen:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dA}{dh}\right) = \frac{(A)}{n} \\ \left(\frac{ddA}{2dh^2}\right) = \frac{(A')}{n^2} \\ \left(\frac{d^3A}{2.3dh^3}\right) = \frac{(A'')}{n^3} \\ \left(\frac{dA}{dn}\right) = \frac{[A]}{n} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

und ebenso bei den übrigen Grössen.

Hierdurch erhalten wir aus (a) von Nro. 7 und (f) von Nro. 8

$$
\left.\begin{aligned}
(A) &= n\left(\frac{dA}{dh}\right)\\
&= \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)k\left[(n+3)\,k-2nh\right]\\
&= \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left[\frac{n+3}{a}-\frac{3(n+1)}{c}\right]\\
&= -\frac{Dk}{n}\\
(A') &= n^2\left(\frac{ddA}{2dh^2}\right)=n\left(\frac{d(A)}{2dh}\right)\\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)\left[(2n+3)\,k-nh\right]\\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)\left[\frac{(2n+3)}{a}-\frac{3(n+1)}{c}\right]\\
(A'') &= n^3\left(\frac{d^3A}{2\,.\,3\,dh^3}\right)=n\left(\frac{d(A')}{3\,dh}\right)\\
&= \frac{n^2-1}{2}=-E\\
(B) &= n\left(\frac{dB}{dh}\right)\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[(n+2)\,k-nh\right]\\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left[\frac{n+2}{a}-\frac{2(n+1)}{c}\right]\\
(C) &= n\left(\frac{dC}{dh}\right)=\frac{n^2-1}{2}=-E\\
(D) &= n\left(\frac{dD}{dh}\right)=\frac{3(n^2-1)}{2}=3\,(C)=-3E\\
(E) &= n\left(\frac{dE}{dh}\right)=0\\
[A] &= n\left(\frac{dA}{dn}\right)\\
&= \frac{k^2}{2n^3}\left[(2n-3)\,k-n\,(n-2)\,h\right]\\
&= \frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\left[\frac{2n-3}{a}-\frac{(n^2-3)}{c}\right]\\
[B] &= n\left(\frac{dB}{dn}\right)\\
&= \frac{k}{n^2}\left[(n-2)\,k+nh\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left[\frac{n-2}{a}+\frac{2}{c}\right]
\end{aligned}\right\}\quad (g)
$$

$$\left.\begin{aligned}
[C] &= n\left(\frac{dC}{dn}\right) \\
&= -\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)k = -\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) \\
[D] &= n\left(\frac{dD}{dn}\right) \\
&= -\frac{1}{2n}\left[(n^2+3)\,k - 2n^2 h\right] \\
&= -\frac{1}{2n}\left[\frac{(n^2+3)}{a} - \frac{3(n^2+1)}{c}\right] \\
[E] &= n\left(\frac{dE}{dn}\right) \\
&= -n^2
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

Glieder der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

12) Die Glieder der zweiten Ordnung reichen gewöhnlich hin, um die Abweichung wegen der Gestalt auf eine sehr genäherte Weise zu berechnen, so dass man sich erlauben kann, die Glieder aller folgenden Ordnungen zu vernachlässigen.

Indessen erfordert die Theorie der achromatischen Objective, wie ich bereits oben gesagt habe, dass man die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortsetzt. Da aber hierdurch sehr weitläuftige Rechnungen herbeigeführt werden, so können wir uns begnügen, nur diejenigen Glieder der dritten Ordnung zu berechnen, welche merkliche Werthe erhalten. Zu diesem Ende bemerke ich zuerst, dass diejenigen von dem Objective herrührenden Glieder, welche mit $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ multiplicirt sind, bedeutender werden, als diejenigen, welche von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ abhängen. Man kann daher die letzteren in den Grössen der dritten Ordnung vernachlässigen.

Diese Verfahrungsart erscheint auch aus dem Grunde als zulässig, weil sie darauf hinaus kommt, den bisher betrachteten Strahl, welcher dem durch die Coordinaten b_1 und c_1 bestimmten Punkte des Gegenstandes zugehört, in den durch die Grössen der dritten Ordnung ausgedrückten kleinen Correctionen mit demjenigen Strahle zu verwechseln, welcher von dem in der Axe liegenden Punkte des Gegenstandes ausgeht, und mit dem ersteren einerlei Einfallspunkt auf der ersten brechenden Fläche hat, wegen der Kleinheit von φ_1 aber von jenem, in Ansehung seiner Lage, nur wenig unterschieden ist.

Ausserdem vernachlässige ich alle Glieder der dritten Ordnung, welche von den Ocularen, d. h. von allen auf das Objectiv folgenden brechenden Flächen herrühren, indem diese Glieder als zur vierten Ordnung gehörig betrachtet werden können.

Untersuchen wir daher nur die Lage der Strahlen in der Nähe des letzten Bildes, in welchem Falle die Gleichungen (c) von Nro. 5 ihre Anwendung finden, so folgt aus dem eben Gesagten, dass es hinreicht, die Grössen $\Delta^2 \frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)_i$ zu berechnen, indem man alle Glieder vernachlässigt, welche sich eines Theils auf das Objectiv beziehen und mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt sind, andern Theils von den folgenden brechenden Flächen herrühren.

Eine weitere Abkürzung der Formeln können wir uns in Bezug auf die durch die Integration eingeführten Constanten $\Delta \frac{1}{c_1}$ und $\Delta \varphi_1$ erlauben. Wir haben nämlich, wie schon oben bemerkt wurde, diese Constanten beibehalten, um den Einfluss berücksichtigen zu können, welchen vorhergegangene Brechungen sowohl, als eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes auf die Lage der Strahlen ausüben. Mit dem letzteren werden wir uns später beschäftigen und die zu seiner Berechnung erforderlichen Formeln ausführlich entwickeln, weil dabei Umstände in Betracht kommen, welche jetzt noch nicht gehörig erörtert werden können. Es reicht daher für den gegenwärtigen Zweck hin, bei den Grössen der dritten Ordnung nur diejenigen, von jenen Constanten abhängigen Glieder beizubehalten, welche in Bezug auf frühere Brechungen merkliche Werthe bekommen können.

Zu diesem Ende nehme ich an, dass die Lichtstrahlen, ehe sie in das hier betrachtete Instrument fallen, durch ein anderes, vor ihm befindliches Instrument gegangen sind, welches mit jenem in so fern eine ähnliche Einrichtung hat, dass dadurch $\left(Y\Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)$ und $X\Delta \frac{1}{g}$ ebenfalls auf Grössen der dritten Ordnung reducirt werden. Nehmen wir nun für den durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punkt denjenigen an, in welchem der von dem ersten Instrumente in das zweite übergehende Strahl die Ebene der yz durchschneidet, so erleiden jene Coordinaten durch die im ersten Instrumente entstehenden Abweichungen Aenderungen, welche durch $\Delta \frac{1}{c_1}$ und $\Delta \varphi_1$ ausgedrückt werden. Die hiervon abhängigen Glieder in den Formeln (h) von Nro. 7 und (g) von Nro. 8 sind daher diejenigen, welche die Wirkung des ersten Instrumentes hervorbringt, und es folgt aus jenen Formeln, dass bei der gemachten Voraussetzung $\Delta \frac{1}{c_1}$ von derselben Ordnung seyn muss, wie die ihm entsprechenden Glieder von $\Delta \frac{1}{g_i}$, welche von dem zweiten Instrumente herrühren, und $\Delta \varphi_1$ von derselben Ordnung, wie die correspondirenden Glieder von $\left(Y\Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_i$.

Die allegirten Formeln zeigen aber, dass $\Delta\frac{1}{g_i}$ ursprünglich von der zweiten Dimension in Bezug auf X_1, Y'_1 und ϕ_1 ist, $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i$ dagegen von der dritten Dimension jener Grössen. Wir haben ferner in Nro. 2 die verschiedenen Ordnungen so bestimmt, dass die erwähnten Dimensionen jedesmal um zwei Einheiten zunehmen, wenn man von einer Ordnung zur folgenden übergeht. Werden daher $\Delta\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i$ durch die Einrichtung des Instrumentes auf Grössen der dritten Ordnung reducirt, so kann diess nur geschehen, wenn die darin enthaltenen Coefficienten L_i, M_i etc. so vermindert werden, dass sie in Ansehung ihrer Kleinheit den Grössen der zweiten Dimension gleich zu achten sind, und wenn dasselbe auch bei dem ersten Instrumente statt findet. Hierdurch werden $\Delta\frac{1}{g_i}$ und $\Delta\frac{1}{c_1}$ von derselben Ordnung wie die Grössen der vierten Dimension, $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i$ und $\Delta\,\varphi_1$ dagegen wie die der fünften Dimension.

Aus allem diesem können wir daher den Schluss machen, dass es erlaubt ist, bei der Entwickelung von $\Delta^2\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i$ alle von $\Delta\frac{1}{c_1}$, $\Delta\,\varphi_1$ und den Coefficienten L_i, M_i etc. abhängige Glieder zu vernachlässigen, sobald ihre, nach dem Vorhergehenden bestimmten Dimensionen in Bezug auf X_1, Y'_1 und φ_1 grösser werden, als bei denjenigen Gliedern derselben Formeln, welche von dem zweiten Instrumente allein herrühren und ursprünglich zur dritten Ordnung gehören.

13) Die Berechnung von $\Delta^2\frac{1}{g_i}$ fange ich damit an, dass ich die Grösse $\mathfrak{G}$, welche durch den Ausdruck (d) von Nro. 2 gegeben ist, in eine Reihe entwickele, die nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{Z}$ und den zu derselben Ordnung gehörigen Grössen geordnet ist. Da $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ von der ersten Dimension in Bezug auf die letzteren sind, so hat man, wenn man nur das Quadrat derselben berücksichtigt,

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}$$
$$+\frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{u}^2}{8n} - \mathfrak{w}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right)\right] - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}$$

Eine erste Näherung giebt aber mit Vernachlässigung des Quadrates der zur Ordnung von $\mathfrak{Z}$ gehörigen Grössen:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}+\mathfrak{G}$$
$$= \mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}+(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2} = \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2 + \frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w})-\frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right)-\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}^2}\right]$$

Substituiren wir diesen Werth in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\mathfrak{G}$, und verwechseln $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ mit $(\mathfrak{t}+t')$, $(\mathfrak{u}+u')$ und $(\mathfrak{w}+w')$, so dass künftig unter $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ die Grössen von der Ordnung $\mathfrak{Z}$, unter t', u' und w' dagegen die von der Ordnung $\mathfrak{Z}^2$ verstanden werden, so verwandelt sich derselbe in den folgenden:

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right) - \mathfrak{Z}\left(\mathfrak{k}+\mathfrak{h}-\frac{\mathfrak{k}}{n}\right)^2$$
$$+ (\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(t'-w') - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{u'}{2}-w'\right) + \frac{\mathfrak{k}\,\mathfrak{u}^2}{8n}$$
$$-\left(\mathfrak{w}+\frac{2\mathfrak{Z}}{\mathfrak{g}}\right)\left[(\mathfrak{k}+\mathfrak{h})(\mathfrak{t}-\mathfrak{w}) - \frac{\mathfrak{k}}{n}\left(\frac{\mathfrak{u}}{2}-\mathfrak{w}\right)\right] + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{g}^3}.$$

Die erste Zeile ist der Werth von G unter der Bedingung, dass darin alle lateinische Buchstaben mit den correspondirenden deutschen verwechselt, d. h. dass allen, vermittelst der ersten Näherung erhaltenen Grössen ihre durch die Charakteristik Δ angedeuteten Correctionen zugesetzt werden. Nach der angenommenen Bezeichnung ist daher jene erste Zeile $= G + \Delta G$. Ferner kann man in den Gliedern von der Ordnung $\mathfrak{Z}^2$ die deutschen Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Setzen wir daher zur Abkürzung

$$G' = (k+h)(t'-w') - \frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2}-w'\right) + \frac{k u^2}{8n}$$
$$-\left(w+\frac{2Z}{g}\right)\left[(k+h)(t-w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2}-w\right)\right] + \frac{Z^2}{g^3} \quad . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

so wird

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Der Werth von G ist durch die Formel (b) von Nro. 7 gegeben; da jedoch der Voraussetzung nach die von b abhängigen Glieder vernachlässigt werden, so reducirt sich derselbe auf

$$G = -A \,.\, 2\,a\,Z$$

Hieraus folgt in Bezug auf die m^{te} Fläche, wenn man alle Grössen um ihre, mit der Charakteristik Δ bezeichneten Correctionen variiren lässt,

$$\Delta G_m = -\left[2\,a_m Z_m \Delta A_m + A_m\, 2\,a_m \Delta Z_m\right] \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

Entwickeln wir nun ΔA_m vermittelst der Taylor'schen Reihe und gebrauchen dabei die in (f) von Nro. 11 eingeführte Bezeichnung, so erhalten wir

$$\Delta A_m = \left(\frac{dA}{dh}\right)_m \Delta h_m = \frac{(A)_m}{n_m}\Delta h_m$$

Der Werth von $(A)_m$ ist bereits in (g) der allegirten Nummer gegeben, wir müssen daher nur noch Δh_m bestimmen.

Die Formeln (a) und (m) von Nro. 4 geben

$$h_m = \frac{1}{c_m}$$

$$c_m = g_{m-1} + d_{m-1}$$

$$\frac{h_m b_m}{n_m} = \frac{b_m}{n_m c_m} = \frac{V_m \phi_1}{v_m}$$

folglich

$$\Delta h_m = \Delta \frac{1}{c_m} = \frac{g^2_{m-1}}{c^2_m} \Delta \frac{1}{g_{m-1}}$$

Da in den Grössen der dritten Ordnung alle Glieder vernachlässigt werden, welche von b oder f abhängen, so sind in diesem Falle die in (a) und (b) von Nro. 11 gefundenen Formeln anwendbar, nämlich:

$$X_m = \frac{X_1}{V_m}$$

$$Y_m = \frac{1}{V_m} (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)$$

$$2 a_m Z_m = \frac{X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2}{V_m^2}$$

$$\Delta \frac{1}{g_{m-1}} = \frac{V^2_{m-1}}{v_{m-1}} \left\{ \Delta \frac{1}{c_1} - L_{m-1} [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \right\}$$

Substituirt man den letzten dieser Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von Δh_m, und bemerkt, dass

$$\frac{V^2_{m-1} g^2_{m-1}}{c^2_m} = V^2_m$$

$$\frac{1}{v_{m-1}} = \frac{n_m}{v_m}$$

ist, so wird

$$\Delta h_m = \frac{V_m^2 n_m}{v_m} \left\{ \Delta \frac{1}{c_1} - L_{m-1} [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \right\}$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich der obige Ausdruck von ΔA_m in den folgenden:

$$\Delta A_m = \frac{(A)_m V_m^2}{v_m} \left\{ \Delta \frac{1}{c_1} - L_{m-1} [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \right\} \quad . \quad \text{(d)}$$

Ferner giebt die Formel (e) von Nro. 11

$$2 a_m \Delta Z_m = \frac{1}{V_m^2} \left\{ \begin{array}{l} 2 [X_1 \Delta (X)_1 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1) \Delta (Y)_1] \\ - 2 K_m [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2] \Delta \frac{1}{c_1} \\ + 2 K_m (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1) \Delta \varphi_1 \\ + \left(2 L'_m + \frac{1}{4 a_m^2 V_m^2}\right) [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2]^2 \end{array} \right\} \text{(e)}$$

Da ΔA_m in (c) noch mit $2 a_m Z_m$ multiplicirt ist, so wird das von $\Delta \frac{1}{c_1}$ abhängige Glied, welches darin vorkommt, von der sechsten Dimension in Bezug auf X_1, $\acute{Y}_1$ und φ_1, wenn wir diese Dimension nach dem am Ende von Nro. 12 Gesagten bestimmen. Dasselbe gilt von den mit $\Delta \frac{1}{c_1}$ und $\Delta \phi_1$ multiplicirten Gliedern in dem Ausdrucke

von $2a_m \Delta Z_m$. Nach dem daselbst angenommenen Grundsatze können daher jene Glieder sämmtlich vernachlässigt werden, da diejenigen, welche ursprünglich zur dritten Ordnung gehören, nur von der vierten Dimension der angegebenen Grössen sind.

Vermittelst der beiden vorhergehenden Werthe erhalten wir hiernach endlich aus (c)

$$\Delta G_m = -\frac{V_m^2}{v_m}\left\{\begin{array}{l}\frac{2A_m v_m}{V_m^4}\left[X_1 \Delta(X)_1 + (\acute{Y}_1 + K_1 \phi_1)\Delta(Y)_1\right] \\ + \left\{\begin{array}{l}\frac{A_m v_m}{4a_m^2 V_m^6} + \frac{2A_m v_m L'_m}{V_m^4} \\ - \frac{(A)_m L_{m-1}}{V_m^2}\end{array}\right\}\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2\right]^2\end{array}\right\} \quad (f)$$

Ich gehe nun zur Entwickelung von G', welches durch den Ausdruck (a) gegeben ist. Da $\mathfrak{b} = 0$ angenommen wird, so folgt aus den Formeln von Nro. 2:

$$\frac{1}{g} = (k+h) - \frac{k}{n}$$

$$\mathrm{Z} = (k+h)\,a\mathrm{Z}$$

$$\mathfrak{l} = \left(\frac{k}{n}\right)^2 2a\mathrm{Z} - \frac{(k+h)^2 k^2 a^2 \mathrm{Z}^2}{n^2}$$

$$\mathfrak{m} = -kh \,.\, 2a\mathrm{Z}$$

$$t = -2a\mathrm{Z}\left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right]$$

$$u = -2a\mathrm{Z}\left[kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$w = -2a\mathrm{Z}\left[(k+h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$t' = 2a^2\mathrm{Z}^2 (k+h)^2\, kh$$

$$u' = a^2\mathrm{Z}^2 (k+h)^2 \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$w' = a^2\mathrm{Z}^2 (k+h)^2 \left[(k+h)^2 + 4kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$(k+h)(t-w) = a\mathrm{Z}(k+h)\left[(k+h)^2 + 2\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) = -a\mathrm{Z}\left(\frac{k}{n}\right)\left[2(k+h)^2 + kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$-\left(w + \frac{2\mathrm{Z}}{g}\right) = 2a\mathrm{Z}\left[kh + (k+h)\left(\frac{k}{n}\right) + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

Hieraus erhalten wir die Werthe der verschiedenen Glieder, welche in dem allegirten Ausdrucke von G' vorkommen, nämlich

$$(k+h)(t'-w') = -a^2\mathrm{Z}^2 (k+h)^3\left[(k+h)^2 + 2kh + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$-\frac{k}{n}\left(\frac{u'}{2} - w'\right) = a^2\mathrm{Z}^2 (k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[(k+h)^2 + 4kh + \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$\frac{ku^2}{8n} = a^2\mathrm{Z}^2\left(\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k^2h^2}{2} + kh\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right]$$

$$-\left(w+\frac{2Z}{g}\right)(k+h)(t-w)= \\ = a^2Z^2(k+h)\left\{\begin{array}{l} 2kh\,(k+h)^2+2(k+h)^3\left(\frac{k}{n}\right) \\ +\left[2(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ \pm 4(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+4\left(\frac{k}{n}\right)^4 \end{array}\right.$$

$$\left(w+\frac{2Z}{g}\right)\frac{k}{n}\left(\frac{u}{2}-w\right)= \\ = -a^2Z^2\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\begin{array}{l} 4kh(k+h)^2+2k^2h^2 \\ +\left[4(k+h)^3+2kh(k+h)\right]\left(\frac{k}{n}\right) \\ +\left[4(k+h)^2+4kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ +2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^3+2\left(\frac{k}{n}\right)^4 \end{array}\right.$$

$$\frac{Z^2}{g^3}=a^2Z^2(k+h)^2\left[(k+h)^3-3(k+h)^2\left(\frac{k}{n}\right) \\ +3(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^3\right]$$

Durch die Vereinigung dieser Glieder entsteht der folgende Werth von G'

$$G'=a^2Z^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}k^2h^2\left(\frac{k}{n}\right)+2kh\,(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ -\frac{1}{2}\left[(k+h)^2+6kh\right]\left(\frac{k}{n}\right)^3 \\ +2(k+h)\left(\frac{k}{n}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \end{array}\right.$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} F=\frac{k^2}{8n^2}\left\{\begin{array}{l} -(k+h)^2\left[k-(n-1)h\right] \\ +\frac{k}{n^3}(k+n^2h)^2+\frac{2(n-1)^2}{n^3}k\,(k-nh)^2 \end{array}\right. \\ =\frac{1}{8n^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{c}\right) \\ +\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{n^2-1}{c}\right)^2 \\ +\frac{2(n-1)^2}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{(n+1)}{c}\right)^2 \end{array}\right. \end{array}\right\}\quad (g)$$

und bemerkt, dass

$$\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)k^2(k-nh)=A$$

$$a_m^2\,Z_m^2=\frac{\left[X_1^2+(Y_1'+K_1\,\varphi_1)^2\right]^2}{4V_m^4}$$

$$(k+h)=\frac{1}{a}$$

ist, so kann der vorhergehende Ausdruck von G', auf die m^{te} Fläche bezogen, unter die Gestalt gebracht werden:

$$G_m'=\frac{\left[X_1^2+(Y_1'+K_1\,\varphi_1)^2\right]^2}{V_m^4}\left[-F+\frac{A}{4a^2}\right]_m \quad . \; . \; . \quad (h)$$

Addiren wir jetzt die in (f) und (h) gefundenen Werthe von ΔG_m und G'_m, gebrauchen wir ferner die in (g) von Nro. 7 angenommene Bezeichnung, wonach

$$\frac{A^m\, v^m}{V_m^4} = L^{(m)}$$

ist, so wird

$$(\Delta G + G')_m = -\frac{V_m^2}{v_m}\left\{\begin{aligned} & 2\,L^{(m)}\left[X_1\,\Delta(X)_1 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta(Y)_1\right] \\ & + \left[\frac{F_m\, v_m}{V_m^6} + 2\,L^{(m)}\,L'_m - \frac{(A)_m\,L_{m-1}}{V_m^2}\right] \times \\ & \qquad \times\left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)^2\right]^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

Da auf diese Art der Werth von $\mathfrak{G}$ vermittelst der Ausdrücke (b) und (i) gefunden ist, so können wir zur Entwickelung der Gleichung (c) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{1}{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{h} - \frac{\mathfrak{k}}{n} + \mathfrak{G}$$

übergehen. Substituirt man hierin statt $\frac{1}{\mathfrak{g}}$, $(\mathfrak{k} + \mathfrak{h})$, $\mathfrak{k}$, und $\mathfrak{G}$ ihre Werthe:

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g}$$

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h$$

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta\frac{1}{c} - \Delta^2\frac{1}{c}$$

$$\mathfrak{G} = G + \Delta G + G'$$

so giebt die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Glieder

$$\Delta^2\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\,\Delta^2\,\frac{1}{c} + \Delta G + G' \quad \dots\dots\dots \quad \text{(k)}$$

Eben so ist

$$\Delta^2\frac{1}{g_{,}} = \frac{1}{n_{,}}\,\Delta^2\,\frac{1}{c_{,}} + \Delta G_{,} + G'_{,} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(l)}$$

Die zweite Gleichung (g) von Nro. 2 kann unter die Gestalt gebracht werden:

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_{,}} = \frac{1}{\mathfrak{g}}\left(1 + \frac{d}{\mathfrak{g}}\right)^{-1}$$

oder

$$\frac{1}{c_{,}} + \Delta\frac{1}{c_{,}} + \Delta^2\frac{1}{c_{,}} =$$

$$= \left(\frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g}\right)\left(1 + \frac{d}{g} + d\,\Delta\frac{1}{g} + d\,\Delta^2\frac{1}{g}\right)^{-1}$$

Entwickelt man den zweiten Theil dieser Gleichung, bemerkt, dass

$$c_{,} = g + d$$

ist, und vergleicht die Grössen der zweiten und dritten Ordnung abgesondert, so folgt daraus

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{1}{c_{,}} &= \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta\frac{1}{g} \\ \Delta^2\frac{1}{c_{,}} &= \frac{g^2}{c_{,}^2}\,\Delta^2\,\frac{1}{g} - \frac{g^3}{c_{,}^3}\,d\left(\Delta\frac{1}{g}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad \text{(m)}$$

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (l) in die folgende:

$$\Delta^2 \frac{1}{g_{\prime}} = \frac{g^2}{n_{\prime} c_{\prime}^2} \Delta^2 \frac{1}{g} + \Delta G_{\prime} + G_{\prime}' - \frac{g^3 d}{n_{\prime} c_{\prime}^3} \left(\Delta \frac{1}{g}\right)^2$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (e) von Nr. 7, die daselbst gebrauchte Analyse giebt daher gleichfalls das Integral derselben, welches wird:

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i \frac{v_m}{V_m^2} (\Delta G + G')_m \\ - \Sigma_m{}_1^i \frac{v\, g_{m-1}^3 d_{m-1}}{V_m^2 n_m c_m^3} \left(\Delta \frac{1}{g}\right)_{m-1}^2 \end{array} \right.$$

Durch die Formeln von Nro. 4 erhalten wir aber

$$-\frac{v_m g_{m-1}^3 d_{m-1}}{V_m^2 n_m c_m^3} = \frac{K^{(m)} v_{m-1}^2}{V_{m-1}^4}$$

Das vorhergehende Integral kann daher unter die Gestalt gebracht werden

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i \frac{v_m}{V_m^2} (\Delta G + G')_m \\ + \Sigma_m{}_1^i K^{(m)} \left(\frac{v}{V^2} \Delta \frac{1}{g}\right)_{m-1}^2 \end{array} \right\} \quad . \quad . \text{(n)}$$

Die erste Summe, welche in diesem Ausdrucke vorkommt, finden wir sehr leicht vermittelst des in (i) gegebenen Werthes von $(\Delta G + G')_m$, wenn wir darin den Factor $\frac{V_m^2}{v_m}$ weglassen und das Zeichen Σ_1^i vorsetzen. Die zweite Summe besteht aus verschiedenen Gliedern, von denen einige dem Objective, andere den folgenden Flächen angehören. Da nun in Bezug auf die letzteren $\Delta \frac{1}{g}$ durch die Wirkung des Objectivs auf eine Grösse der dritten Ordnung reducirt ist, deren Quadrat vernachlässigt wird, so reicht es hin, jene Summe auf das Objectiv allein auszudehnen. Ferner werden der Voraussetzung nach die von b oder f abhängigen Glieder vernachlässigt, so dass der in (b) von Nro. 11 erhaltene Werth von $\Delta \frac{1}{g_i}$ hier anwendbar ist. Er giebt

$$\left(\frac{v}{V^2} \Delta \frac{1}{g}\right)_{m-1} = \Delta \frac{1}{c_1} - L_{m-1} [X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2]$$

folglich

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_m{}_1^i K^{(m)} \left(\frac{v}{V^2} \Delta \frac{1}{g}\right)_{m-1}^2 = \Sigma_m{}_1^i K^{(m)} \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2 \\ \quad - \Sigma_m{}_1^i 2K^{(m)} L_{m-1} [X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2] \Delta \frac{1}{c_1} \\ \quad + \Sigma_m{}_1^i K^{(m)} L_{m-1}^2 [X_1^2 + (Y_1' + K_1 \varphi_1)^2]^2 \end{array} \right\} \text{(o)}$$

Die beiden ersten Glieder fallen weg, weil sie von höheren Dimensionen, als das letzte sind. Behalten wir daher nur dieses bei, substituiren sodann die in (i) und (o) gefundenen Werthe in (n), und setzen zur Abkürzung

$$Q^{(m)} = \frac{F_m v_m}{V_m^6} + 2 L^{(m)} L_m' - \frac{(A)_m L_{m-1}}{V_m^2} - K^{(m)} L_{m-1}^2 \quad . \text{(p)}$$

so wird nach der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i} \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 \frac{1}{c_1} \\ -2 L_i \left[X_1 \Delta(X)_1 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1) \Delta(Y)_1\right] \\ -Q_i \left[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2\right]^2 \end{array} \right.$$

$\Delta(X)_1$ und $\Delta(Y)_1$ sind von der dritten Dimension in Bezug auf X_1, $\acute{Y}_1$ und φ_1, ferner wird L_i nach den angenommenen Grundsätzen von der zweiten Dimension angenommen; das davon abhängige Glied ist mithin von der sechsten Dimension und kann daher vernachlässigt werden. Hierdurch reducirt sich der vorhergehende Ausdruck auf den folgenden:

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i} \left\{ \Delta^2 \frac{1}{c_1} - Q_i \left[X_i^2 + (\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)^2\right]^2 \right\} \ldots \quad (q)$$

Bei den späteren Untersuchungen wird uns dasjenige Glied von $\Delta^2 \frac{1}{g_i}$ nothwendig seyn, welches mit dem Quadrate von $\Delta \frac{1}{c_1}$ multiplicirt ist. Die vorhergehende Entwickelung zeigt aber, dass in dem Ausdrucke von $\Delta^2 \frac{1}{g_i}$ kein anderes Glied der Art vorkommt, als dasjenige, welches durch das erste Glied von (o) hervorgebracht wird. Behalten wir daher nur dieses bei, und bemerken, dass

$$\Sigma_1^i K^{(m)} = K_i - K_1$$

ist, so giebt die allegirte Formel

$$\Sigma_{m}{}_1^i K^{(m)} \left(\frac{\nu}{V^2} \Delta \frac{1}{g}\right)^2_{m-1} = \left(K_i - K_1\right) \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2$$

folglich, wenn dieses in (n) substituirt wird

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i} \left(K_i - K_1\right) \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2 \ldots \ldots \quad (r)$$

Da alle Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden, welche von den auf das Objectiv folgenden Flächen herrühren, so muss man diejenigen $Q^{(m)}$, welche sich auf die letzteren Flächen beziehen, $= 0$ setzen; oder mit andern Worten: die in Q_i enthaltene und durch das Zeichen Σ angedeutete Summe nur auf die Flächen des Objectivs ausdehnen.

14) Um den Werth von $\left(Y \Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)$ zu finden, betrachte ich, wie in Nro. 8, zuerst die Gleichung (h) von Nro. 2, nämlich

$$\frac{\mathfrak{f}_{\prime}}{\mathfrak{g}_{\prime}} = \frac{\mathfrak{g}}{n_{\prime} \mathfrak{c}_{\prime}} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \frac{\mathfrak{g}}{n_{\prime} \mathfrak{c}_{\prime}} \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} \frac{n_{\prime} \mathfrak{G}_{\prime}}{\mathfrak{k}_{\prime}}$$

Da die Entwickelung bis zu den Gliedern der dritten Ordnung fortgesetzt werden soll, so ist

$$\frac{\mathfrak{f}_{\prime}}{\mathfrak{g}_{\prime}} = \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} + \Delta \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} + \Delta^2 \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}}$$

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta \frac{f}{g} + \Delta^2 \frac{f}{g}$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{c},} = 1 - \frac{d}{\mathfrak{c},} = \frac{g}{c,} - d\Delta\frac{1}{c,} - d\Delta^2\frac{1}{c,}$$

$$\mathfrak{G}, = G, + \Delta G, + G',$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{n,\mathfrak{c},}\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\frac{n,\mathfrak{G},}{\mathfrak{k},} = \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\frac{n,G,}{k,}$$

$$+ \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right) + \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,}$$

Substituiren wir diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so folgt daraus durch die Vergleichung der zur dritten Ordnung gehörigen Grössen:

$$-\Delta^2\frac{f,}{g,} = -\frac{g}{n,c,}\Delta^2\frac{f}{g} + \frac{d}{n,}\Delta\frac{1}{c,}\Delta\frac{f}{g}$$

$$+ \frac{d}{n,}\frac{f}{g}\Delta^2\frac{1}{c,} + \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right)$$

$$+ \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Die Gleichung (1) von Nro. 13, multiplicirt mit $Y,$, wird:

$$Y,\Delta^2\frac{1}{g,} = \frac{Y,}{n,}\Delta^2\frac{1}{c,} + Y,(\Delta G, + G',);$$

folglich, wenn man in dem von $\Delta^2\frac{1}{c,}$ abhängigen Gliede statt $Y,$ seinen Werth aus (a) von Nro. 4, nämlich

$$Y, = \frac{c,}{g}Y - \frac{fd}{g}$$

substituirt:

$$Y,\Delta^2\frac{1}{g,} = \frac{c,}{n,g}Y\Delta^2\frac{1}{c,} - \frac{d}{n,}\frac{f}{g}\Delta^2\frac{1}{c,} + Y,(\Delta G, + G',)$$

Die Summe dieser Gleichung und der vorhergehenden, mit (a) bezeichneten, ist:

$$\left(Y,\Delta^2\frac{1}{g,} - \Delta^2\frac{f,}{g,}\right) = \frac{c,}{n,g}Y\Delta^2\frac{1}{c,} - \frac{g}{n,c,}\Delta^2\frac{f}{g}$$

$$+ Y,(\Delta G, + G',) + \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right)$$

$$+ \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,} + \frac{d}{n,}\Delta\frac{1}{c,}\Delta\frac{f}{g}$$

Durch Substitution der in (m) von Nro. 13 gefundenen Werthe von $\Delta\frac{1}{c,}$ und $\Delta^2\frac{1}{c,}$ entsteht hieraus die endliche Differenzengleichung

$$\left(Y,\Delta^2\frac{1}{g,} - \Delta^2\frac{f,}{g,}\right) = \frac{g}{n,c,}\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)$$

$$+ Y,(\Delta G, + G',) + \frac{g}{n,c,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n,G,}{k,}\right)$$

$$+ \frac{G,}{k,}\Delta\left(\frac{g}{c,}\frac{f}{g}\right) + \frac{g}{c,}\frac{f}{g}\frac{G',}{k,}$$

$$- \frac{dg^2}{n,c,^2}\Delta\frac{1}{g}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gleichung (c) von Nro. 8, die daselbst gebrauchte Analyse giebt daher ihr Integral:

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1+K_1\phi_1)\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\phi_1\\ +\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\frac{v_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ +\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m\\ +\frac{G_m}{k_m}\Delta\left(\frac{g_{m-1}}{c_m}\frac{f_{m-1}}{g_{m-1}}\right)\\ +\frac{g_{m-1}}{c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{G'_m}{k_m}\\ -\frac{d_{m-1}}{n_m}\frac{g^2_{m-1}}{c^2_m}\Delta\frac{1}{g_{m-1}}\times\\ \quad\times\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Aus den Formeln von Nro. 4 folgt aber

$$-\frac{v_m\, g^2_{m-1}\, d_{m-1}}{V_m\, n_m\, c^2_m}=\frac{K^{(m)}\, v^2_{m-1}}{V^3_{m-1}}$$

das vorhergehende Integral wird daher:

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(\acute{Y}_1+K_1\phi_1)\Delta^2\frac{1}{c_1}-\Delta^2\phi_1\\ +\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\frac{v_m}{V_m}\left\{\begin{array}{l}Y_m(\Delta G+G')_m\\ +\frac{g_{m-1}}{n_m c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\Delta\left(\frac{nG}{k}\right)_m\\ +\frac{G_m}{k_m}\Delta\left(\frac{g_{m-1}}{c_m}\frac{f_{m-1}}{g_{m-1}}\right)\\ +\frac{g_{m-1}}{c_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{G'_m}{k_m}\end{array}\right.\\ +\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}K^{(m)}\left(\frac{v}{V^2}\Delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}\frac{v_{m-1}}{V_{m-1}}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\end{array}\right\}\quad(b)$$

Da

$$Y_m=\frac{\acute{Y}_1+K_1\phi_1}{V_m}$$

so ist das erste, mit dem Summationszeichen versehene Glied dieses Integrals

$$\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\frac{v_m}{V_m}Y_m(\Delta G+G')_m=\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}(\acute{Y}_1+K_1\phi_1)\frac{v_m}{V^2_m}(\Delta G+G')_m$$

Substituiren wir hierin statt $\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\frac{v_m}{V^2_m}(\Delta G+G')_m$ seinen Werth aus (i) der vorhergehenden Nummer, bemerken wir ferner, dass das von $\Delta(X)_1$ und $\Delta(Y)_1$ abhängige Glied wegfällt, weil sich durch die Integration $L^{(m)}$ in L_i verwandelt, wodurch jenes Glied von der siebenten Dimension wird, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l}\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\frac{v_m}{V_m}Y_m(\Delta G+G')_m=\\ \quad=-\overset{i}{\underset{m}{\Sigma_1}}\left[\frac{F_m\, v_m}{V^6_m}+2L^{(m)}L'_m-\frac{(A)_m L_{m-1}}{V^2_m}\right](\acute{Y}_1+K_1\phi_1)\times\\ \qquad\times[X^2_1+(\acute{Y}_1+K_1\phi_1)^2]^2\end{array}\right\}\quad(c)$$

Die drei folgenden, mit dem Summationszeichen versehenen Glieder werden vernachlässigt, weil sie von f abhängen.

In dem letzten Gliede können wir sodann die in (b) von Nro. 11 gefundenen Werthe substituiren, nämlich

$$\left(\frac{v}{V^2}\Delta\frac{1}{g}\right)_{m-1} = \Delta\frac{1}{c_1} - L_{m-1}\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)^2]$$

$$\frac{v_{m-1}}{V_{m-1}}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1} = (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1$$
$$- L_{m-1}\,(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)^2]$$

Sie geben, da die mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ und $\Delta\phi_1$ multiplicirten Glieder von der siebenten und neunten Dimension sind, und daher wegfallen,

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_m^i K^{(m)}\left(\frac{v}{V_2}\Delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}\frac{v_{m-1}}{V_{m-1}}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \\ = \Sigma_m^i K^{(m)}\,L_{m-1}^2\,(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)^2]^2\end{aligned}\right\}\ (d)$$

Nachdem auf diese Weise in (c) und (d) alle mit dem Summationszeichen versehene Glieder gefunden worden sind, welche in dem Ausdrucke (b) nach den angenommenen Grundsätzen berücksichtigt werden, so erhalten wir endlich durch ihre Substitution und durch die in (p) der vorhergehenden Nummer eingeführte Bezeichnung

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\Delta^2\frac{1}{c_1} - \Delta^2\phi_1\\ &- Q_i\,(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)^2]^2\end{aligned}\right\}\ (e)$$

wobei die in Q_i enthaltene und durch das Zeichen Σ angedeutete Summe, so wie es bereits am Ende von Nro. 13 bemerkt wurde, nur auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt werden darf. Die Ausdrücke (q) von Nro. 13 und (e) der gegenwärtigen Nummer enthalten die Werthe von allen Grössen der dritten Ordnung, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen und in den Gleichungen (c) von Nro. 5 vorkommen, und da die Grössen der ersten und zweiten Ordnung in dem Vorhergehenden vollständig entwickelt worden sind, so ist nunmehr Alles gegeben, was zur Berechnung der Lage der gebrochenen Strahlen erforderlich ist, in so fern nur jene Abweichung berücksichtigt wird.

Drittes Kapitel.

Aenderungen, welche die Farbenzerstreuung in den auf die Brechung sich beziehenden Formeln hervorbringt.

Bei der Entwickelung der vorhergehenden Formeln wurde die verschiedene Brechbarkeit der farbigen Strahlen nicht berücksichtigt, sie können aber demungeachtet für jede Farbe gebraucht werden, wenn man dem Brechungsverhältnisse stets den ihr entsprechenden Werth giebt. Bei der Anwendung von Näherungen ist es jedoch zweckmässig, die erwähnten Formeln auf einen Strahl von bestimmter Brechbarkeit zu beziehen und die Aenderungen zu berechnen, welche in denselben entstehen, wenn man von jenem Strahle zu einem von anderer Farbe übergeht; wir wollen uns daher mit der Bestimmung dieser Aenderungen in dem gegenwärtigen Kapitel näher beschäftigen.

Allgemeine Betrachtung der Farbenzerstreuung und der dadurch entstehenden Abweichungen.

15) Jeder Lichtstrahl, welcher noch keine Brechungen erlitten hat, besteht aus einer unzähligen Menge verschieden gefärbter Strahlen, deren Brechungsverhältniss als eine stetig veränderliche Grösse zu betrachten ist. Unter sämmtlichen farbigen Strahlen, welche zusammen genommen einen der einfallenden bilden, wähle ich einen nach Willkühr, welchen ich den *mittleren Strahl* nenne. Seine Lage im prismatischen Farbenbilde wird als unveränderlich angenommen, bleibt aber noch unbestimmt, da erst die folgenden Untersuchungen die Mittel zu einer schicklichen Bestimmung derselben an die Hand geben werden. Das dem mittleren Strahle zugehörige oder *mittlere Brechungsverhältniss* bezeichne ich, wie bisher, durch den Buchstaben n. Um nun die übrigen farbigen Strahlen zu unterscheiden, nehme ich an, dass sich das Brechungsverhältniss in $(n + \delta n)$ umändert, wenn man vom mittleren Strahle zu einem beliebigen farbigen Strahle übergeht, welchen ich den *allgemeinen farbigen Strahl* nenne. Hiernach bezeichnet δn die Veränderung des Brechungsverhältnisses und ist eine Grösse, welche für Strahlen von einerlei Farbe denselben Werth, für Strahlen von verschiedenen Farben dagegen verschiedene Werthe erhält, d. h. sie ist eine Function der nach dem prismatischen Farbenbilde bestimmten Entfernung des allgemeinen farbigen Strahles

von dem mittleren. Hieraus folgt, dass die bisher gefundenen Formeln unmittelbar die Resultate geben, welche sich auf den mittleren Strahl beziehen; dass man dagegen, um sie auf den allgemeinen farbigen Strahl anzuwenden, nur n mit $(n + \delta n)$ zu verwechseln braucht. Diese Verwechselung bringt Veränderungen in allen Resultaten hervor, welche man die *Abweichungen wegen der verschiedenen Brechbarkeit* oder *Farbenzerstreuung* nennt. Um sie zu bezeichnen, werde ich mich der Charakteristik der Variationen δ bedienen, eben so, wie die Charakteristik Δ gebraucht wurde, um die Abweichungen wegen der Gestalt anzudeuten; und da δn eine kleine Grösse ist, so werde ich die Formeln in Reihen entwickeln, welche nach steigenden Potenzen von δn und den Abweichungen wegen der Gestalt geordnet sind, wobei ich voraussetze, dass die mit den Charakteristiken δ und Δ versehenen Grössen zu einerlei Ordnung gehören. Hiernach sind die Glieder der zweiten Ordnung, in Bezug auf die Farbenzerstreuung, diejenigen, welche einen mit der Charakteristik δ versehenen Factor enthalten; die der dritten Ordnung dagegen diejenigen, welche mit den Charakteristiken δ^2 und $\delta\Delta$ versehen, oder mit zwei Factoren multiplicirt sind, wovon der eine ein δ, der andere ein δ oder Δ enthält.

Beschränken wir uns nach diesen Voraussetzungen auf die Glieder der dritten Ordnung, so reichen die Gleichungen (a) von Nro. 6 zur Entwickelung hin. In der ersten derselben muss man verwechseln

Y mit $Y + \delta Y + \delta^2 Y$

$\frac{1}{g}$ mit $\frac{1}{g} + \delta\frac{1}{g} + \delta^2\frac{1}{g}$

$\frac{f}{g}$ mit $\frac{f}{g} + \delta\frac{f}{g} + \delta^2\frac{f}{g}$

$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ mit $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$

$\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ mit $\left(\frac{z-g}{gz}\right) + \delta\frac{1}{g} + \delta^2\frac{1}{g}$

$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]$ mit $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right] + \delta\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]$

Durch diese Substitutionen kommen zu dem Werthe von y noch die folgenden Glieder, welche sich auf die Farbenzerstreuung beziehen:

$$y = -z \left\{ \begin{aligned} &\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right) \\ &+\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right) + \delta Y\,\delta\frac{1}{g} \\ &+\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right) \\ &+\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\delta\frac{1}{g} \\ &+\left(\frac{z-g}{gz}\right)\left\{\delta Y + \delta^2 Y + \delta\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]\right\} \end{aligned} \right\} \quad \ldots \text{(a)}$$

Die zweite der allegirten Gleichungen entsteht aus der ersten, wenn man $f=0$ setzt, und y und Y mit x und X verwechselt. Hierdurch giebt der vorhergehende Ausdruck unmittelbar

$$x = -z\left\{\begin{array}{l} X\,\delta\frac{1}{g} + X\,\delta^2\frac{1}{g} + \delta X\,\delta\frac{1}{g} \\ + \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right) + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]\delta\frac{1}{g} \\ + \left(\frac{z-g}{gz}\right)\left\{\delta X + \delta^2 X + \delta\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]\right\} \end{array}\right\} \quad \ldots (b)$$

Addirt man nun die in (a) und (b) erhaltenen Werthe von y und x zu denjenigen, welche in (a) und (b) von Nro. 5 gefunden worden sind und sich auf einen Strahl von mittlerer Brechbarkeit beziehen, so entstehen dadurch die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles.

Bei den Anwendungen, welche gewöhnlich von diesen Formeln gemacht werden, können wir uns jedoch ähnliche Abkürzungen erlauben, wie diejenigen, welche bei den Abweichungen wegen der Gestalt vorgenommen wurden.

Berücksichtigen wir nämlich zuerst nur die Glieder der zweiten Ordnung, welches bei einem beliebigen Werthe von z meistentheils hinreicht, so reduciren sich die vorhergehenden Formeln, wenn dabei die i^{te} Fläche zu Grund gelegt wird, auf die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} y_i = -z_i\left[\left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \delta\, Y_i\right] \\ x_i = -z_i\left[X_i\,\delta\frac{1}{g_i} + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \delta X_i\right] \end{array}\right\} \quad \ldots (c)$$

welche Werthe den in (a) von Nro. 6 erhaltenen zugesetzt werden müssen.

Betrachten wir dagegen die Lage der Strahlen nur in der Nähe des letzten Bildes, so dass $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist, deren Producte in Grössen der zweiten Ordnung, nach den in Nro. 5 angegebenen Grundsätzen, vernachlässigt werden können, so geben die Ausdrücke (a) und (b)

$$\left.\begin{array}{l} y_i = -z_i\left\{\begin{array}{l} \left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\ + \left(Y\,\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i + \delta\, Y_i\,\delta\frac{1}{g_i} \\ + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i \delta\frac{1}{g_i} \end{array}\right. \\ x_i = -z_i\left\{\begin{array}{l} X_i\,\delta\frac{1}{g_i} + X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i} + \delta X_i\,\delta\frac{1}{g_i} \\ + \delta\left(X\,\delta\frac{1}{g}\right)_i + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \delta\frac{1}{g_i} \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \ldots (d)$$

welche Glieder zu den in (c) von Nro. 5 gefundenen Werthen von y_i und x_i addirt werden müssen, um nach jenen Grundsätzen die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles zu erhalten.

Setzt man endlich voraus, dass $(z - g)_i$ eine Grösse der erwähnten Ordnung ist, so erleiden die Formeln (d), wenn man darin z_i mit $g_i + (z - g)_i$ verwechselt und die Producte von $(z - g)_i$ in Grössen der zweiten Ordnung vernachlässigt, nur die Abänderung, dass sich der gemeinschaftliche Factor z_i in g_i verwandelt. Hiernach können die, jener Voraussetzung entsprechenden Ausdrücke ebenfalls durch die am Ende von Nro. 5 angegebenen Veränderungen aus den mit (d) bezeichneten abgeleitet werden, daher es auch hier hinreicht, uns nur mit den letzteren weiter zu beschäftigen.

Entwickeln wir jetzt die verschiedenen Grössen, welche in den vorhergehenden Formeln enthalten sind.

Glieder, welche von der Farbenzerstreuung allein abhängen.

16) Die von der Farbenzerstreuung allein abhängigen Glieder sind diejenigen, welche mit den Charakteristiken δ und δ^2 bezeichnet werden, und wovon die ersteren einen mit einem δ versehenen Factor, die letzteren dagegen zwei solche Factoren enthalten. Da bei diesen Gliedern die Abweichungen wegen der Gestalt nicht in Betracht kommen, so reichen die in Nro. 4 gefundenen Formeln zu ihrer Entwickelung hin.

Zuerst ist vermöge (a) jener Nummer

$$\frac{1}{g} = (k + h) - \frac{k}{n}$$

$$\frac{-f_{\prime}}{g_{\prime}} = \frac{-g}{n_{\prime} c_{\prime}} \cdot \frac{f}{g}$$

Hierin müssen wir, um auf den allgemeinen farbigen Strahl überzugehen, folgende Verwechselungen vornehmen:

$\frac{1}{g}$ mit $\frac{1}{g} + \delta \frac{1}{g} + \delta^2 \frac{1}{g}$

$\frac{f_{\prime}}{g_{\prime}}$ mit $\frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} + \delta \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} + \delta^2 \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}}$

$\frac{f}{g}$ mit $\frac{f}{g} + \delta \frac{f}{g} + \delta^2 \frac{f}{g}$

$\frac{g}{c_{\prime}}$ mit $1 - d\left(\frac{1}{c_{\prime}} + \delta \frac{1}{c_{\prime}} + \delta^2 \frac{1}{c_{\prime}}\right) = \frac{g}{c_{\prime}} - d\,\delta \frac{1}{c_{\prime}} - d\,\delta^2 \frac{1}{c_{\prime}}$

k mit $\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{c} + \delta \frac{1}{c} + \delta^2 \frac{1}{c}\right) = k - \delta \frac{1}{c} - \delta^2 \frac{1}{c}$

$\frac{1}{n_{\prime}}$ mit $\frac{1}{n_{\prime} + \delta n_{\prime}} = \frac{1}{n_{\prime}} - \frac{\delta n_{\prime}}{n_{\prime}^2} + \frac{\delta n_{\prime}^2}{n_{\prime}^3}$

$\frac{1}{n}$ mit $\frac{1}{n} - \frac{\delta n}{n^2} + \frac{\delta n^2}{n^3}$

$k + h = \frac{1}{a}$ bleibt unverändert.

Durch diese Verwechselungen geben die vorhergehenden Formeln, wenn man die Grössen der zweiten und dritten Ordnung abgesondert vergleicht:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\,\delta\frac{1}{c} + \frac{k\,\delta n}{n^2} \\ &-\delta\frac{f_{,}}{g_{,}} = \frac{-g}{n_{,}c_{,}}\,\delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}}\,\frac{f}{g}\,\delta\frac{1}{c_{,}} + \frac{g}{c_{,}}\,\frac{f}{g}\,\frac{\delta n_{,}}{n_{,}^2} \end{aligned}\right\}\ (a)$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta^2\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\,\delta^2\frac{1}{c} - \frac{\delta n}{n}\left[\frac{1}{n}\,\delta\frac{1}{c} + \frac{k\,\delta n}{n^2}\right] \\ &-\delta^2\frac{f_{,}}{g_{,}} = \frac{-g}{n_{,}c_{,}}\,\delta^2\frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}}\,\delta\frac{1}{c_{,}}\,\delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n_{,}}\,\frac{f}{g}\,\delta^2\frac{1}{c_{,}} \\ &+\frac{\delta n_{,}}{n_{,}}\left[\frac{g}{n_{,}c_{,}}\,\delta\frac{f}{g} - \frac{d}{n_{,}}\,\frac{f}{g}\,\delta\frac{1}{c_{,}} - \frac{g}{c_{,}}\,\frac{f}{g}\,\frac{\delta n_{,}}{n_{,}^2}\right] \end{aligned}\right\}\ (b)$$

Die Betrachtung der Formeln (d) von Nro. 7 und (a) von Nro. 8 lehrt uns aber, dass die oben mit (a) bezeichneten aus jenen entstehen, wenn man darin die Δ in δ verwandelt und

$$G = \frac{k\,\delta n}{n^2}$$

setzt. Aus (f) von Nro. 7 und (e) von Nro. 8 folgen daher unmittelbar die Integrale der letzteren, nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left[\delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_1^i\,\frac{k_m\,v_m\,\delta n_m}{V_m^2\,n_m^2}\right] \\ &\left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1 \\ &+\acute{Y}_1\,\Sigma_1^i\,\frac{k_m\,v_m\,\delta n_m}{V_m^2\,n_m^2} \\ &+\phi_1\,\Sigma_1^i\left[\frac{K_m\,k_m\,v_m\,\delta n_m}{V_m^2\,n_m^2} + \frac{\delta n_m}{n_m}\right] \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\}\ (c)$$

Eben so entspringen die Formeln (b) aus (k) von Nro. 13 und (a) von Nro. 14, wenn man in diesen die Δ mit δ verwechselt und

$$G = \frac{k\,\delta\,n}{n^2}$$

$$(\Delta G + G') = -\frac{\delta n}{n}\left[\frac{1}{n}\,\delta\frac{1}{c} + \frac{k\,\delta n}{n^2}\right]$$

setzt. In der That fällt hierdurch die Formel (k) von Nro. 13 unmittelbar mit der ersten in (b) erhaltenen zusammen. Was dagegen die Formel (a) von Nro. 14 betrifft, so bemerke ich, dass man darin setzen muss:

$$\begin{aligned} \Delta n_{,} &= 0 \\ \Delta k_{,} &= -\Delta\frac{1}{c_{,}} \\ \Delta\frac{g}{c_{,}} &= -d\,\Delta\frac{1}{c_{,}} \end{aligned}$$

Diese Werthe, verbunden mit den vorhergehenden, geben

$$\frac{1}{n_,}\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n_, G_,}{k_,}\right)+\frac{G_,}{k_,}\Delta\left(\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\right)+\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\frac{G'_,}{k_,}=$$
$$=\frac{\delta n_,}{n_,}\left[\frac{g}{n_, c_,}\delta\frac{f}{g}-\frac{d}{n_,}\frac{f}{g}\delta\frac{1}{c_,}-\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\frac{\delta n_,}{n_,^2}\right]$$

wodurch die Formel (a) von Nro. 14 mit der letzten, in (b) gefundenen, übereinstimmt.

Man erhält daher unmittelbar die Integrale der Formeln (b), wenn man in (n) von Nro. 13 und (b) von Nro. 14 die vorhergehenden Werthe substituirt. Ehe wir jedoch diese Substitution vornehmen, können wir jene Werthe durch diejenigen vereinfachen, welche aus den Gleichungen (a) folgen, nämlich:

$$(\Delta G + G') = -\frac{\delta n}{n}\delta\frac{1}{g}$$
$$\frac{1}{n_,}\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\Delta\left(\frac{n_, G_,}{k_,}\right)+\frac{G_,}{k_,}\Delta\left(\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\right)+\frac{g}{c_,}\frac{f}{g}\frac{G'_,}{k_,}=\frac{\delta n_,}{n_,}\delta\frac{f_,}{g_,}$$

die allegirten Integrale werden mithin:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^2\frac{1}{g_{\mathrm{i}}}=\frac{V_{\mathrm{i}}^2}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{aligned}&\delta^2\frac{1}{c_1}-\Sigma_1^{\mathrm{i}}\frac{\delta n_{\mathrm{m}}}{n_{\mathrm{m}}}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_{\mathrm{m}}\\&\qquad+\Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}K^{(\mathrm{m})}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)^2_{\mathrm{m}-1}\end{aligned}\right.\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g}-\delta^2\frac{f}{g}\right)=\frac{V_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{aligned}&(\acute{Y}_1+K_1\phi_1)\,\delta^2\frac{1}{c_1}-\delta^2\phi_1\\&-\Sigma_1^{\mathrm{i}}\frac{\delta n_{\mathrm{m}}}{n_{\mathrm{m}}}\frac{v_{\mathrm{m}}}{V_{\mathrm{m}}}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{m}}\\&+\Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}K^{(\mathrm{m})}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_{\mathrm{m}-1}\frac{v_{\mathrm{m}-1}}{V_{\mathrm{m}-1}}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{m}-1}\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(d)}$$

17) In der Ausübung sind die durch δn_{m} bezeichneten Grössen nicht unmittelbar bekannt, sie müssen vielmehr aus den durch Beobachtungen gefundenen Werthen der verschiedenen δv_{m} abgeleitet werden. Es ist daher zweckmässig, die vorhergehenden Formeln so abzuändern, dass sie die letzteren Grössen statt der ersteren enthalten.

Aus Nro. 4 hat man

$$v_, = n_, v$$

folglich mit Beibehaltung der Glieder der dritten Ordnung

$$\delta v_, = v\,\delta n_, + n_,\delta v + \delta n_,\,\delta v$$

Dieser Ausdruck, dividirt durch den vorhergehenden, giebt

$$\frac{\delta v_,}{v_,}=\frac{\delta n_,}{n_,}+\frac{\delta v}{v}+\frac{\delta n_,}{n_,}\frac{\delta v}{v}$$

mithin

$$\frac{\delta n_,}{n_,}=\frac{\delta v_,}{v_,}-\frac{\delta v}{v}-\frac{\delta n_,}{n_,}\frac{\delta v}{v}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad\text{(a)}$$

Hierdurch verwandelt sich die erste Formel (c) von Nro. 16 in folgende:

$$\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_{m1}^{i}\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}\left(\frac{\delta\ v_m}{v_m} - \frac{\delta\ v_{m-1}}{v_{m-1}}\right)\\ -\Sigma_{m1}^{i}\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}\frac{\delta\ n_m}{n_m}\frac{\delta\ v_{m-1}}{v_{m-1}}\end{array}\right.$$

Nach derselben Formel ist

$$\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}\frac{\delta\ n_m}{n_m} = \left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_m - \left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}$$

folglich

$$\Sigma_{m1}^{i}\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}\frac{\delta\ n_m}{n_m}\frac{\delta\ v_{m-1}}{v_{m-1}} = \Sigma_{m1}^{i}\left[\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_m - \left(\frac{v}{V_2}\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}\right]\left(\frac{\delta\ v}{v}\right)_{m-1}$$

Diesen Ausdruck können wir vermittelst des in (R) von Nro. 3 gefundenen unter eine andere Gestalt bringen, wenn wir darin

$$q = \frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}$$

$$t = \frac{\delta\ v}{v}$$

setzen. Hierdurch wird der letztere

$$\Sigma_{m1}^{i}\left[\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_m - \left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}\right]\left(\frac{\delta\ v}{v}\right)_{m-1} =$$

$$= -\Sigma_{m1}^{i}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_m\left(\frac{\delta\ v_m}{v_m} - \frac{\delta\ v_{m-1}}{v_{m-1}}\right) - \frac{\delta\ v_0}{v_0}\left(\frac{v}{V_2}\delta\frac{1}{g}\right)_0 + \frac{\delta\ v_i}{v_i}\left(\frac{v}{V_2}\delta\frac{1}{g}\right)_i$$

Das mit dem Index 0 versehene Glied fällt weg, weil $\delta\ v_0 = \delta\frac{1}{g_0} = 0$ ist.

Der vorhergehende Ausdruck von $\delta\frac{1}{g_i}$ nimmt daher durch Substitution dieses Werthes die Gestalt an:

$$\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\delta\frac{1}{c_1} + \Sigma_{m1}^{i}\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}\left(\frac{\delta\ v_m}{v_m} - \frac{\delta\ v_{m-1}}{v_{m-1}}\right)\\ + \Sigma_1^{i}\frac{\delta\ n_m}{n_m}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_m - \frac{\delta\ v_i}{v_i}\left(\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}\right)_i\end{array}\right\} \quad . \ . \ (b)$$

Die zweite Formel (c) von Nro. 16 entsteht aus der ersten durch Verwechselung von

$\frac{v}{V^2}\delta\frac{1}{g}$ mit $\frac{v}{V}\left(Y\ \delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)$

$\delta\frac{1}{c_1}$ mit $(\acute{Y}_1 + K_1\ \phi_1)\ \delta\frac{1}{c_1} - \delta\ \phi_1$

$\frac{k_m\ v_m}{V_m^2 n_m}$ mit $\frac{\acute{Y}_1\ k_m\ v_m}{V_m^2\ n_m} + \phi_1\left(\frac{K_m\ k_m\ v_m}{V_m^2\ n_m} + 1\right)$

Durch diese Verwechselungen giebt der vorhergehende Ausdruck (b) unmittelbar

$$\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y'_1+K_1\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1}-\delta\phi_1\\ +Y'_1\sum_{m\,1}^{i}\frac{k_m\,v_m}{V_m^2\,n_m}\left(\frac{\delta v_m}{v_m}-\frac{\delta v_{m-1}}{v_m}\right)\\ +\phi_1\sum_{m\,1}^{i}\left(\frac{K_m\,k_m\,v_m}{V_m^2\,n_m}+1\right)\left(\frac{\delta v_m}{v_m}-\frac{\delta v_{m-1}}{v_{m-1}}\right)\\ +\sum_1^i\frac{\delta n_m}{n_m}\,\frac{v_m}{V_m}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_m\\ -\frac{\delta v_i}{v_i}\,\frac{v_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i\end{array}\right\}\quad\text{(c)}$$

Die vorhergehenden Formeln enthalten nunmehr die mit δv_m bezeichneten Grössen, deren Werthe sich nicht nur bei jedem brechenden Körper, sondern auch mit der Farbe des Strahles nach einem, uns nicht bekannten Gesetze abändern. Um daher die Anzahl der veränderlichen Grössen so viel als möglich zu vermindern, können wir zuerst unter den verschiedenen brechenden Körpern einen nach Willkühr wählen, um ihn zur Vergleichung der übrigen zu gebrauchen. Schreibt man die Grössen, welche ihm zugehören ohne Index, so ist:

in Bezug auf den zur Vergleichung dienenden Körper
v das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles,
$(v+\delta v)$ das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles;

in Bezug auf den i^{ten} brechenden Körper dagegen:
v_i das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles,
$(v_i+\delta v_i)$ das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles;

sämmtlich unter der Voraussetzung bestimmt, dass das Licht unmittelbar aus Luft in jene Körper übergeht.

Ferner können wir dasjenige δv, welches dem zur Vergleichung dienenden Körper zugehört, als absolute veränderliche Grösse, die übrigen dagegen als Functionen derselben betrachten, welche sich wegen der Kleinheit von δv in Reihen entwickeln lassen. Da nun δv und δv_i zugleich verschwinden müssen, so kann der Ausdruck von δv_i nur die Form haben:

$$\delta v_i=\alpha_i\,\delta v+\beta_i\,\delta v^2 \text{ etc.} \quad\text{(d)}$$

wobei α_i, β_i Coefficienten bezeichnen, welche von der Natur der brechenden Körper abhängen und für jeden derselben durch Beobachtungen bestimmt werden müssen, welche aber bei einem und demselben brechenden Körper für alle farbige Strahlen einerlei bleiben. Da hiernach jene Coefficienten als gegeben zu betrachten sind, so werden dadurch die veränderlichen Grössen auf die einzige, δv, zurückgeführt, deren Werth sich allein mit der Farbe des Strahles, d. i. mit seiner Lage im Spectrum abändert, bei allen brechenden Körpern aber derselbe ist.

Der Ausdruck (d) giebt, wenn man ihn durch $\delta\nu$ dividirt

$$\frac{\delta\nu_i}{\delta\nu} = \alpha_i + \beta_i\,\delta\nu \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Diese Grösse wird gewöhnlich das *Zerstreuungsverhältniss* in Bezug auf denjenigen farbigen Strahl genannt, welchem $\delta\nu$ zugehört. Durch Substitution des in (d) angenommenen Werthes erhalten wir mit Vernachlässigung der, das Quadrat übersteigenden Potenzen von $\delta\nu$,

$$\nu_m\left(\frac{\delta\nu_m}{\nu_m} - \frac{\delta\nu_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) = \delta\nu_m - n_m\,\delta\nu_{m-1} =$$

$$= (\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1})\left[\delta\nu + \left(\frac{\beta_m - n_m\,\beta_{m-1}}{\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}}\right)\delta\nu^2\right]$$

folglich, wenn wir zur Abkürzung

$$\gamma_m = \frac{\beta_m - n_m\beta_{m-1}}{\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

setzen,

$$\nu_m\left(\frac{\delta\nu_m}{\nu_m} - \frac{\delta\nu_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) = (\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1})\,(\delta\nu + \gamma_m\,\delta\nu^2)$$

welcher Werth in den vorhergehenden Ausdrücken von $\delta\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i$ substituirt werden muss.

Ausserdem ist es nach der nunmehr erfolgten Verwechselung der unabhängigen veränderlichen Grössen erforderlich, die bisher gebrauchten Bezeichnungen so abzuändern, dass $\delta\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i$ nur diejenigen Glieder der Ausdrücke (b) und (c) enthalten, welche mit der ersten Potenz von $\delta\frac{1}{c_1}$, $\delta\phi_1$ und $\delta\nu$ multiplicirt sind, und jetzt als Glieder der zweiten Ordnung betrachtet werden; dass dagegen $\delta^2\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i$ die Summen der Glieder bezeichnen, die von den Quadraten und Producten jener Grössen abhängen und nunmehr zur dritten Ordnung gehören. Da die Gleichungen (d) von Nro. 15 nur die Summen der correspondirenden Glieder der zweiten und dritten Ordnung enthalten, so ist hierzu weiter nichts nothwendig, als dass man in den vorhergehenden, mit (b) und (c) bezeichneten Ausdrücken von $\delta\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i$ die Glieder der dritten Ordnung weglässt, und sie dagegen mit den in (d) von Nro. 16 gefundenen Ausdrücken von $\delta^2\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i$ vereinigt. Setzt man daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} S^{(m)} &= -\frac{k_m}{V_m^2 n_m}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \\ T^{(m)} &= K_m\,S^{(m)} - \frac{1}{\nu_m}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \\ &= K_m\,S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (g)$$

so werden die in (b) und (c) enthaltenen Glieder der zweiten Ordnung nach der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned}
\delta\frac{1}{g_i} &= \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right\}\\
\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(Y'_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\\ &- S_i\,Y'_1\,\delta v - T_i\,\phi_1\,\delta v\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \;(h)$$

Jene Formeln enthalten ferner die folgenden Glieder, welche nunmehr zur dritten Ordnung gehören:

$$\delta^2\frac{1}{g_i} = \ldots\frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned}&-\delta v^2\,\Sigma_1^i\,S^{(m)}\gamma_m\\ &+\Sigma_1^i\,\frac{\delta n_m}{n_m}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_m\\ &-\frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_i\end{aligned}\right.$$

$$\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \ldots\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&-Y'_1\,\delta v^2\,\Sigma_1^i\,S^{(m)}\gamma_m\\ &-\phi_1\,\delta v^2\,\Sigma_1^i\,T^{(m)}\gamma_m\\ &+\Sigma_1^i\,\frac{\delta n_m}{n_m}\,\frac{v_m}{V_m}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_m\\ &-\frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\,\frac{v_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i\end{aligned}\right.$$

Die Vereinigung dieser Glieder mit den in (d) von Nro. 16 gefundenen giebt

$$\delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned}&\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta v^2\,\Sigma_1^i\,S^{(m)}\gamma_m + \underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)^2_{m-1}\\ &-\frac{\alpha_i}{v_i}\,\delta v\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_i\end{aligned}\right.$$

$$\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(Y'_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\phi_1\\ &-Y'_1\,\delta v^2\,\Sigma_1^i\,S^{(m)}\gamma_m\\ &-\phi_1\,\delta v^2\,\Sigma_1^i\,T^{(m)}\gamma_m\\ &+\underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}\frac{v_{m-1}}{V_{m-1}}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\\ &-\frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\,\frac{v_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i\end{aligned}\right.$$

Substituiren wir statt $\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1}$ und $\frac{v_{m-1}}{V_{m-1}}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}$ ihre Werthe aus (h), und bemerken, dass

$$\Sigma_1^i\,K^{(m)} = K_i - K_1$$

ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)^2_{m-1} &= (K_i - K_1)\left(\delta\frac{1}{c_1}\right)^2\\ &- 2\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v\,\underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\,S_{m-1} + \delta v^2\,\underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\,S^2_{m-1}\end{aligned}$$

$$\Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\, K^{(\mathrm{m})} \left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_{\mathrm{m}-1} \frac{v_{\mathrm{m}-1}}{V_{\mathrm{m}-1}} \left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{m}-1} =$$

$$= (K_{\mathrm{i}} - K_1)\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\delta\frac{1}{c_1}$$

$$- \left[(2\acute{Y}_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\delta v\, \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\, K^{(\mathrm{m})}\, S_{\mathrm{m}-1}$$

$$- \phi_1\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v\, \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\, K^{(\mathrm{m})}\, T_{\mathrm{m}-1}$$

$$+ \acute{Y}_1\,\delta v^2\, \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\, K^{(\mathrm{m})}\, S^2_{\mathrm{m}-1} + \phi_1\,\delta v^2\, \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\, K^{(\mathrm{m})}\, S_{\mathrm{m}-1}\, T_{\mathrm{m}-1}$$

Ausserdem können wir zur Abkürzung ähnliche Bezeichnungen einführen, wie es bisher geschehen ist; nur bei dem mit $\phi_1\,\delta v^2$ multiplicirten Gliede ist diess nicht zweckmässig, da wir in der Folge noch andere Glieder erhalten werden, welche dasselbe Argument haben, und daher mit jenem vereinigt werden können. Setzen wir mithin

$$\left.\begin{aligned} (S)^{(\mathrm{m})} &= K^{(\mathrm{m})}\, S_{\mathrm{m}-1} \\ s^{(\mathrm{m})} &= S^{(\mathrm{m})}\,\gamma_{\mathrm{m}} - K^{(\mathrm{m})}\, S^2_{\mathrm{m}-1} \\ (T)^{(\mathrm{m})} &= K^{(\mathrm{m})}\, T_{\mathrm{m}-1} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (\mathrm{i})$$

so verwandeln sich die Ausdrücke von $\delta^2\frac{1}{g_{\mathrm{i}}}$ und $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{i}}$ durch Substitution der vorhergehenden Werthe in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\delta^2\frac{1}{g_{\mathrm{i}}} &= \frac{V_{\mathrm{i}}^2}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{aligned} &\delta^2\frac{1}{c_1} + (\mathrm{K_i} - \mathrm{K_1})\left(\delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ &- 2\,(S)_{\mathrm{i}}\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v \\ &- s_{\mathrm{i}}\,\delta v^2 \\ &- \frac{\alpha_{\mathrm{i}}\,\delta v}{v_{\mathrm{i}}}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_{\mathrm{i}} \end{aligned}\right. \\
\left(Y\,\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{i}} &= \frac{V_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\phi_1)\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\,\phi_1 \\ &+ (\mathrm{K_i} - \mathrm{K_1})\left[(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\delta\frac{1}{c_1} \\ &- (S)_{\mathrm{i}}\left[(2\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\delta v \\ &- (T)_{\mathrm{i}}\,\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v \\ &- s_{\mathrm{i}}\,\acute{Y}_1\,\delta v^2 \\ &- \phi_1\,\delta v^2\, \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^{\mathrm{i}}\,(T^{(\mathrm{m})}\,\gamma_{\mathrm{m}} - \mathrm{K}^{(\mathrm{m})}\, S_{\mathrm{m}-1}\, T_{\mathrm{m}-1}) \\ &- \frac{\alpha_{\mathrm{i}}\,\delta v}{v_{\mathrm{i}}}\,\frac{v_{\mathrm{i}}}{V_{\mathrm{i}}}\left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{i}} \end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{k})$$

Nach den in (h) und (k) entwickelten Formeln sind $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{i}}$ und $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_{\mathrm{i}}$ aus zwei Theilen zusammengesetzt; der erste derselben hängt von $\acute{Y}_1$ ab und bezieht sich, wie wir in der Folge sehen werden, auf die Farbenzerstreuung in der Axe, der zweite dagegen enthält ϕ_1 und bezieht sich auf den farbigen Rand.

Wegen der künftigen Untersuchungen ist es nothwendig, diese beiden Theile abzusondern, und da derselbe Fall auch bei mehreren Grössen eintritt, welche später entwickelt werden sollen, so werde ich im Allgemeinen diejenigen Grössen, welche in y_i vorkommen, und X_1 und $\acute{Y}_1$ enthalten, mit einem Accente, diejenigen dagegen, welche von ϕ_1 allein abhängen, mit zwei Accenten und mit den bisher gebrauchten Buchstaben bezeichnen.

Hierbei müssen wir bemerken, dass diese Bezeichnungsart auf die von X_1, $\acute{Y}_1$ und ϕ_1 völlig unabhängigen Coefficienten L_i, S_i etc. durchaus keinen Einfluss hat, daher bei den letzteren die Accente, ohne eine Zweideutigkeit zu befürchten, gebraucht werden können, um ähnliche Coefficienten von einander zu unterscheiden, so wie es oben bereits geschehen ist.

Die in (h) gefundenen Ausdrücke nehmen hierdurch die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right\}\\
&\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i = \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)'_i + \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i\\
&\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)'_i = \frac{V_i}{v_i}\acute{Y}_1\left\{\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right\} = \frac{\acute{Y}_1}{V_i}\,\delta\frac{1}{g_i}\\
&\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{K_1\,\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\,\phi_1 - T_i\,\phi_1\,\delta v\right\}
\end{aligned}\right\}\text{(l)}$$

Auf gleiche Weise behandelt geben die Formeln (k)

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned}&\delta^2\frac{1}{c_1} + (K_i - K_1)\left(\delta\frac{1}{c_1}\right)^2 - 2(S)_i\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v\\ &- s_i\,\delta v^2 - \frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_i\end{aligned}\right.\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i = \frac{V_i}{v_i}\acute{Y}_1\left\{\begin{aligned}&\delta^2\frac{1}{c_1} + (K_i - K_1)\left(\delta\frac{1}{c_1}\right)^2\\ &- 2(S)_i\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v - s_i\,\delta v^2\\ &- \frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\left(\frac{v}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_i\end{aligned}\right.\\
&\qquad = \frac{\acute{Y}_1}{V_i}\,\delta^2\frac{1}{g_i}\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&K_1\,\varphi_1\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\,\varphi_1\\ &+ (K_i - K_1)\left(K_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\,\varphi_1\right)\delta\frac{1}{c_1}\\ &- (S)_i\left(K_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\,\varphi_1\right)\delta v\\ &- (T)_i\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v\\ &- \varphi_1\,\delta v^2\,\Sigma_m^i\left(T^{(m)}\,\gamma_m - K^{(m)}\,S_{m-1}\,T_{m-1}\right)\\ &- \frac{\alpha_i\,\delta v}{v_i}\cdot\frac{v_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(m)}$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke können wir jedoch noch ähnliche Betrachtungen anstellen, wie es in Bezug auf die Abweichung wegen der Gestalt geschehen ist.

Die Grössen der dritten Ordnung $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i$ und $X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i}$ nämlich, welche in den Gleichungen (d) von Nro. 15 vorkommen, werden nur bei der Theorie der achromatischen Objective gebraucht, um die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich zu heben. Dieses geschieht, wenn die Summe der Glieder von $\delta\frac{1}{g_i}$, welche von dem Objective herrühren, der Summe aller übrigen correspondirenden Glieder gleich und entgegengesetzt ist. Da nun die letzteren zur dritten Ordnung gehören, so folgt hieraus, dass $\delta\frac{1}{g}$ für alle auf das Objectiv folgende Flächen ebenfalls eine Grösse der dritten Ordnung seyn muss, wovon das Quadrat und die Producte in Grössen der zweiten Ordnung vernachlässigt werden können. Hierdurch fällt das Glied $\frac{\alpha_i\,\delta\nu}{\nu_i}\left(\frac{\nu}{V^2}\,\delta\frac{1}{g}\right)_i$ weg.

Dagegen wird $\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i$ nur gebraucht, wenn der farbige Rand so vollkommen als möglich vernichtet werden soll. In diesem Falle wird $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i$ zu einer Grösse der dritten Ordnung, wodurch das Glied $\frac{\alpha_i\,\delta\nu}{\nu_i}\,\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i$ wegfällt.

Behalten wir ferner die am Ende von Nro. 12 gemachte Voraussetzung bei, so drücken $\delta\frac{1}{c_1}$ und $\delta\varphi_1$ die Aenderungen aus, welche die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 durch die im ersten Instrumente entstehende Farbenzerstreuung erleiden. Nehmen wir überdiess an, dass bei diesem Instrumente die Farbenzerstreuung in der Axe oder der farbige Rand bis auf Grössen der dritten Ordnung gehoben ist, je nachdem das Eine oder das Andere bei dem zweiten Instrumente statt findet, so ist aus den Formeln (l) ersichtlich, dass unter jener Voraussetzung $\delta\frac{1}{c_1}$ und $S_i\,\delta\nu$ von derselben Ordnung wie $\delta\frac{1}{g_i}$, dagegen $\left(K_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)$ und $T_i\,\varphi_1\,\delta\nu$ von derselben Ordnung wie $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i$ sind. Nach der in Nro. 15 gemachten Classification wurden aber $\delta\frac{1}{g_i}$, $\delta\nu$ und $\Delta\frac{1}{g_i}$ zu einerlei Ordnung gezählt, und ebenso $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i$ und $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i$. Wenn daher durch die Einrichtung der Instrumente die Farbenzerstreuung in der Axe bis auf Grössen der dritten Ordnung gehoben ist, so werden dadurch $\delta\frac{1}{g_i}$ und $\delta\frac{1}{c_1}$ auf Grössen von der Ordnung derjenigen reducirt, welche

die vierte Dimension in Bezug auf X_1, Y'_1 und φ_1 haben, und S_i auf eine solche von der zweiten Dimension. Findet dagegen eine ähnliche Vernichtung des farbigen Randes statt, so werden dadurch $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i$ und $\left(K_1\ \varphi_1\ \delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)$ zu Grössen von der Ordnung derjenigen, welche die fünfte Dimension enthalten, und T_i zu einer solchen von der zweiten Dimension. Hieraus folgt, dass es erlaubt ist, in den Grössen der dritten Ordnung, welche sich auf die Farbenzerstreuung in der Axe beziehen, alle von $\delta\frac{1}{c_1}$ oder S_i abhängige Glieder zu vernachlässigen, wenn ihre, nach dem Vorhergehenden bestimmten Dimensionen grösser werden, als bei denjenigen Gliedern derselben Formeln, die von dem zweiten Instrumente allein herrühren und ursprünglich zur dritten Ordnung gehören, dass ferner in Bezug auf den farbigen Rand auf gleiche Weise mit denjenigen Gliedern zu verfahren ist, welche $\left(K_1\ \varphi_1\ \delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)$ oder T_i als Factoren enthalten, wobei $\delta\nu$ jederzeit von der zweiten Dimension angenommen wird.

Nach diesen Bemerkungen reduciren sich die Formeln (m) auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^2\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{\nu_i}\left[\delta^2\frac{1}{c_1} - s_i\,\delta\nu^2\right]\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i = \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i = \frac{V_i\,Y_1}{\nu_i}\left[\delta^2\frac{1}{c_1} - s_i\,\delta\nu^2\right]\\
&\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i = \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned}&K_1\,\phi_1\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\,\phi_1 - (T)_i\,\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta\nu\\ &- \phi_1\,\delta\nu^2\,\Sigma_{1\,m}^{i}\left(T^{(m)}\,\gamma_m - K^{(m)}\,S_{m-1}\,T_{m-1}\right)\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(n)}$$

Die oben eingeführten Grössen T_i, $(S)_i$ und $(T)_i$ können vermittelst der in Nro. 3 angegebenen Methode noch auf eine andere Art ausgedrückt werden.

Zuerst ist

$$T_i = \Sigma_1^i\ T^{(m)} = \Sigma_1^i\ K_m\ S^{(m)} - \Sigma_{1\,m}^{i}\left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right)$$

Setzen wir nun in (S) von Nro. 3

$$t = 1$$

$$q = \frac{\alpha}{\nu}$$

und bemerken wir, dass $\alpha_0 = 0$ ist, so entsteht daraus

$$\Sigma_{1\,m}^{i}\left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) = \frac{\alpha_i}{\nu_i} \quad \text{(o)}$$

und folglich

$$T_i = \Sigma_1^i\ K_m\ S^{(m)} - \frac{\alpha_i}{\nu_i}$$

Wir können daher, wenn nur T_i berechnet werden soll,

$$\left.\begin{array}{l} T^{(m)} = K_m\, S^{(m)} \\ \quad \text{von } m = 1 \text{ bis } m = i - 1 \\ T^{(i)} = K_i\, S^{(i)} - \frac{\alpha_i}{\nu_i} \\ T_i = \Sigma_1^i\, T^{(m)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

nehmen.

Ferner ist

$$(S)_i = \Sigma_1^i\, (S)^{(m)} = \Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K^{(m)}\, S_{m-1}$$

Durch Verwechselung von L mit S erhalten wir aber aus (m) von Nro. 9 die beiden Formeln

$$\Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K^{(m)}\, S_{m-1} = K_i\, S_i - \Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K_m\, S^{(m)}$$
$$= K_i\, S_{i-1} - \Sigma_{\substack{1\\m}}^{i-1}\, K_m\, S^{(m)}$$

Addiren wir zu der ersten derselben

$$0 = \Sigma_{\substack{1\\m}}^i \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) - \frac{\alpha_i}{\nu_i}$$

zu der zweiten

$$0 = \Sigma_{\substack{1\\m}}^{i-1} \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) - \frac{\alpha_{i-1}}{\nu_{i-1}}$$

welche Werthe aus (o) folgen, so wird

$$\Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K^{(m)}\, S_{m-1} =$$
$$= K_i\, S_i - \Sigma_{\substack{1\\m}}^i \left[K_m\, S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right)\right] - \frac{\alpha_i}{\nu_i}$$
$$= K_i S_{i-1} - \Sigma_{\substack{1\\m}}^{i-1} \left[K_m\, S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right)\right] - \frac{\alpha_{i-1}}{\nu_{i-1}}$$

Vermöge (g) ist aber

$$K_m\, S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right) = T^{(m)}$$

mithin

$$\left.\begin{array}{l} (S)_i = \Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K^{(m)}\, S_{m-1} \\ \quad = K_i\, S_i - T_i - \frac{\alpha_i}{\nu_i} \\ \quad = K_i\, S_{i-1} - T_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{\nu_{i-1}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

Ebenso giebt der Ausdruck (m) von Nro. 9 durch Verwechselung von L mit T,

$$(T)_i = \Sigma_{\substack{1\\m}}^i\, K^{(m)}\, T_{m-1}$$
$$= K_i\, T_i - \Sigma_1^i\, K_m\, T^{(m)}$$
$$= K_i\, T_{i-1} - \Sigma_1^{i-1}\, K_m\, T^{(m)}$$

Setzen wir daher

$$u^{(m)} = K_m\, T^{(m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

so nimmt $(T)_i$ die Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l} (T)_i = K_i\, T_i - u_i \\ \quad = K_i\, T_{i-1} - u_{i-1} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (s)$$

Ausser den in (l) und (n) entwickelten Grössen enthalten die Gleichungen (d) von Nro. 15 noch die Glieder $\delta Y_i\, \delta\frac{1}{g_i}$ und $\delta X_i\, \delta\frac{1}{g_i}$, welche nach der angenommenen Bezeichnung in die drei Glieder $\delta Y_i'\, \delta\frac{1}{g_i}$, $\delta X_i\, \delta\frac{1}{g_i}$ und $\delta Y_i''\, \delta\frac{1}{g_i}$ zerfallen. Die beiden ersten werden nur bei den achromatischen Objectiven gebraucht und können nach den vorhergehenden Bemerkungen vernachlässigt werden, weil $\delta\frac{1}{g_i}$ in diesem Falle eine Grösse der dritten Ordnung ist. Das letzte Glied dagegen, welches sich auf den farbigen Rand bezieht, bedarf einer besonderen Entwickelung, und vereinigt sich sodann mit der letzten Formel (n). Da ausserdem die Gleichungen (c) von Nro. 15 die Grössen δY_i und δX_i enthalten, so ist es nothwendig, diese zu entwickeln, woraus $\delta Y_i''$ mit Leichtigkeit erhalten wird.

18) In (a) von Nro. 4 haben wir für den mittleren Strahl gefunden:

$$Y_, = Y\left(\frac{g+d}{g}\right) - \frac{fd}{g}$$

$$X_, = X\left(\frac{g+d}{g}\right)$$

Um hiervon auf den allgemeinen farbigen Strahl überzugehen, müssen wir alle von dem Brechungsverhältnisse abhängige Grössen um die, mit der Charakteristik δ bezeichneten Veränderungen zunehmen lassen, wobei d constant bleibt. Bemerken wir nun, dass

$$g + d = c_,$$

$$\delta\left(\frac{g+d}{g}\right) = \delta\left(1 + \frac{d}{g}\right) = d\,\delta\frac{1}{g}$$

ist, so geben die vorhergehenden Formeln, wenn man sie nach der Characteristik δ differentiirt,

$$\left.\begin{aligned} \delta Y_, &= \frac{c_,}{g}\,\delta Y + d\left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right) \\ \delta X_, &= \frac{c_,}{g}\,\delta X + d\,X\,\delta\frac{1}{g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(a)}$$

Die erste dieser Gleichungen entsteht aus der ersten Gleichung (a) von Nro. 9, wenn man Δ mit δ verwechselt und $Z = 0$ setzt. Hierdurch erhalten wir daher aus (b) jener Nummer unmittelbar ihr Integral:

$$\delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left[\delta Y_1 + \Sigma_2^i\, V_m\, d_{m-1}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}\right]$$

Substituiren wir darin statt $\left(Y\,\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{m-1}$ seinen Werth aus (h) von Nro. 17, nämlich

$$\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_{m-1}}{v_{m-1}}\left\{\begin{aligned} &(Y_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1 \\ &- Y_1\,S_{m-1}\,\delta v - \phi_1\,T_{m-1}\,\delta v \end{aligned}\right.$$

und bemerken, dass nach den in Nro. 9 angeführten Werthen

$$\delta Y_1 = \delta(Y'_1 + K_1\,\phi_1)$$
$$\frac{V_{m-1}\,V_m\,d_{m-1}}{v_{m-1}} = -K^{(m)}$$
$$\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,\frac{V_{m-1}\,V_m\,d_{m-1}}{v_{m-1}} = -(K_i - K_1)$$

ist, so wird jenes Integral

$$\delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\delta\,(Y'_1 + K_1\,\phi_1) - (K_i - K_1)\left[(Y'_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\,\phi_1\right]\\ + Y'_1\,\delta v\,\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)}\,S_{m-1} + \phi_1\,\delta v\,\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)}\,T_{m-1}\end{array}\right.$$

Die zweite Gleichung (a) folgt aus den ersten durch Verwechselung von Y mit X und von $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)$ mit $X\,\delta\frac{1}{g}$.

Da nun

$$Y_1 = Y'_1 + K_1\,\phi_1$$
$$\left(X\delta\frac{1}{g}\right)_{m-1} = \frac{V_{m-1}\,X_1}{v_{m-1}}\left[\delta\frac{1}{c_1} - S_{m-1}\,\delta v\right]$$

so verwandelt sich der Ausdruck von δY_i unmittelbar in den von δX_i, wenn man in ersterem Y_i mit X_i, Y'_1 mit X_1 verwechselt und die von ϕ_1 abhängenden Glieder weglässt. Diess giebt

$$\delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\delta X_1 - (K_i - K_1)\,X_1\,\delta\frac{1}{c_1}\\ + X_1\,\delta v\,\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)}\,S_{m-1}\end{array}\right.$$

Da

$$K^{(1)} = 0$$

ist, so können die Summen, welche sich darauf beziehen, auch von 1 bis i genommen werden. Nach den in (i) der vorhergehenden Nummer eingeführten Bezeichnungen ist daher

$$\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)}\,S_{m-1} = (S)_i$$
$$\Sigma_{2}^{i}{}_{m}\,K^{(m)}\,T_{m-1} = (T)_i$$

Setzen wir ausserdem

$$\left.\begin{array}{l}\delta(Y)_1 = \delta(Y'_1 + K_1\,\phi_1) + K_1\left[(Y'_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\\ \delta(X)_1 = \delta X_1 + K_1\,X_1\,\delta\frac{1}{c_1}\end{array}\right\}\quad(b)$$

so nehmen die vorhergehenden Ausdrücke von δY_i und δX_i die Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l}\delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\delta(Y)_1 - K_i\left[(Y'_1 + K_1\,\phi_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right]\\ + (S)_i\,Y'_1\,\delta v + (T)_i\,\phi_1\,\delta v\end{array}\right.\\ \delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\delta(X)_1 - K_i\,X_1\,\delta\frac{1}{c_1}\\ + (S)_i\,X_1\,\delta v\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad(c)$$

Die neunte Gleichung (a) von Nro. 4, auf die i^{te} Fläche bezogen, ist

$$Z_i = \frac{X_i^2 + Y_i^2}{2\,a_i}$$

Differentiirt man sie nach der Charakteristik δ und bemerkt, dass a_i in dieser Beziehung unveränderlich ist, so wird

$$\delta Z_i = \frac{X_i\,\delta X_i + Y_i\,\delta Y_i}{a_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

wodurch δZ_i vermittelst der in (c) gefundenen Werthe von δY_i und δX_i gegeben ist.

Bei den folgenden Untersuchungen ist uns die Kenntniss der Werthe von $\frac{\delta V_i}{V_i}$ und δK_i nothwendig, zu deren Bestimmung die Formeln (c) ein leichtes Mittel darbieten. Vermöge (q) von Nro. 4 ist

$$Y_i = \frac{1}{V_i}\left[\acute{Y}_1 + K_i\,\phi_1\right]$$

$$X_i = \frac{X_1}{V_i}$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen nach der Charakteristik δ differentiiren,

$$\left.\begin{aligned} \delta Y_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned} &\delta\acute{Y}_1 + K_i\,\delta\phi_1 \\ &-(\acute{Y}_1 + K_i\,\phi_1)\,\frac{\delta V_i}{V_i} + \phi_1\,\delta K_i \end{aligned}\right. \\ \delta X_i &= \frac{1}{V_i}\left[\delta X_1 - X_1\,\frac{\delta V_i}{V_i}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (e)$$

Die letzte Gleichung (c) giebt nach der Substitution des Werthes von $\delta\,(X)_1$

$$\delta X_i = \frac{1}{V}\left\{\begin{aligned} &\delta X_1 - (K_i - K_1)\,X_1\,\delta\frac{1}{c_1} \\ &+ (S)_i\,X_1\,\delta\nu \end{aligned}\right.$$

Durch Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem letzten (e) erhalten wir daher

$$\frac{\delta V_i}{V_i} = (K_i - K_1)\,\delta\frac{1}{c_1} - (S)_i\,\delta\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Substituiren wir nun den vorhergehenden Werth in der ersten Gleichung (e), so verwandelt sie sich dadurch in folgende:

$$\delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned} &\delta\acute{Y}_1 + K_1\,\acute{Y}_1\,\delta\frac{1}{c_1} \\ &- K_i\left(\acute{Y}_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right) \\ &- (K_i^2 - K_i\,K_1)\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} \\ &+ (S)_i\,\acute{Y}_1\,\delta\nu + K_i\,(S)_i\,\varphi_1\,\delta\nu \\ &+ \varphi_1\,\delta K_i \end{aligned}\right.$$

Aus dieser Formel, verbunden mit der ersten, in (c) gefundenen, folgt

$$\begin{aligned} \delta K_i = \frac{1}{\varphi_1}&\left[\delta\,(Y)_1 - \left(\delta\acute{Y}_1 + K_1\,\acute{Y}_1\,\delta\frac{1}{c_1}\right)\right] \\ &+ (K_i^2 - 2\,K_i\,K_1)\,\delta\frac{1}{c_1} \\ &+ [(T)_i - K_i\,(S)_i]\,\delta\nu - \end{aligned}$$

Der in (b) erhaltene Ausdruck von $\delta(Y)_1$ giebt aber, wenn er entwickelt wird,

$$\delta(Y)_1 = \delta Y'_1 + K_1 Y'_1 \delta\frac{1}{c_1} + \varphi_1\left(\delta K_1 + K_1^2 \delta\frac{1}{c_1}\right)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass

$$\delta(Y)_1 - \left(\delta Y'_1 + K_1 Y'_1 \delta\frac{1}{c_1}\right)$$

denjenigen Theil von $\delta(Y)_1$ ausmacht, welcher blos von φ_1 abhängt, und welcher nach dem angenommenen Grundsatze mit $\delta(Y)''_1$ bezeichnet werden kann. Daher ist

$$\left.\begin{aligned}\delta(Y)''_1 &= \delta(Y)_1 - \left(\delta Y'_1 + K_1 Y'_1 \delta\frac{1}{c_1}\right)\\ &= \varphi_1\left(\delta K_1 + K_1^2 \delta\frac{1}{c_1}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (g)$$

Vermittelst dieses Werthes lässt sich der vorhergehende Ausdruck von δK_i unter eine der beiden folgenden Gestalten bringen:

$$\left.\begin{aligned}\delta K_i &= \frac{\delta(Y)''_1}{\varphi_1} + (K_i^2 - 2K_i K_1)\delta\frac{1}{c_1}\\ &\quad + [(T)_i - K_i(S)_i]\,\delta v\\ &= \delta K_1 + (K_i - K_1)^2 \delta\frac{1}{c_1}\\ &\quad + [(T)_i - K_i(S)_i]\,\delta v\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (h)$$

Wir können jetzt das Glied $\delta Y''_i \delta\frac{1}{g_i}$ berechnen, welches in der Gleichung des gebrochenen Strahles vorkommt. Die erste Formel (c) wird, wenn man blos die von φ_1 abhängigen Glieder beibehält,

$$\delta Y''_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}&\delta(Y)''_1 - K_i\left(K_1\phi_1\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right)\\ &+ (T)_i\,\phi_1\,\delta v\end{aligned}\right.$$

Multipliciren wir diesen Ausdruck mit dem in (h) von Nro. 17 gegebenen Werthe von $\delta\frac{1}{g_i}$, nämlich

$$\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right\}$$

so ist das Product von beiden, mit Weglassung derjenigen Glieder, welche $\left(K_1\,\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right)$ als Factor enthalten und nach der am Ende jener Nummer gemachten Bemerkung von der siebenten Dimension sind,

$$\delta Y''_i \delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&\delta(Y)''_1\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\delta v\right)\\ &+ (T)_i\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1}\,\delta v\\ &- S_i\,(T)_i\,\phi_1\,\delta v^2\end{aligned}\right.$$

Dasselbe vereinigt sich mit der letzten Grösse, welche in (n) von Nro. 17 gefunden wurde. Die Summe von beiden ist

$$\left(Y\,\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i'' + \delta\, Y_i''\,\delta\frac{1}{g_i} =$$

$$= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} K_1\,\phi_1\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\,\phi_1 \\ + \delta\,(Y)_1''\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta\,v\right) \\ - \phi_1\,\delta\,v^2\left\{\begin{array}{l}\Sigma_1^i{}_{m}\,(T^{(m)}\,\gamma_m - K^{(m)}\,S_{m-1}\,T_{m-1}) \\ + S_i\,(T)_i\end{array}\right. \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (i)$$

Wir werden in der Folge sehen, dass die Grösse $\delta\,(Y)_1''$ bloss von $\phi_1\,\delta\,v$ abhängt, wodurch das Glied $-\,\delta\,(Y)_1''\,S_i\,\delta\,v$ zu denen gehört, welche mit $\phi_1\,\delta\,v^2$ multiplicirt sind. Ausserdem ist vermöge (i) von Nro. 17

$$S_i\,(T)_i = S_i\,\Sigma_1^i\,(T)^{(m)} = S_i\,\underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\,T_{m-1}$$

$$= \underset{m}{\Sigma_1^i}\,K^{(m)}\,S_i\,T_{m-1}$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} t_i = \dfrac{S_i\,\delta\,(Y)_1''}{\phi_1\,\delta\,v} \\ \quad + \underset{m}{\Sigma_1^i}\left[T^{(m)}\,\gamma_m + K^{(m)}\,T_{m-1}\,(S_i - S_{m-1})\right]\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (k)$$

so nimmt der Ausdruck (i) durch die Substitution der vorhergehenden Werthe die Gestalt an:

$$\left(Y\,\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i'' + \delta\, Y_i''\,\delta\frac{1}{g_i} =$$

$$= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} K_1\,\phi_1\,\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\,\phi_1 \\ + \delta\,(Y)_1''\,\delta\frac{1}{c_1} - t_i\,\phi_1\,\delta\,v^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (l)$$

Diese Formel enthält alle Glieder von der Ordnung δ^2, welche sich auf den farbigen Rand beziehen, daher die letzte Formel (n) von Nro. 17 nicht mehr gebraucht wird. Da ferner nach der daselbst gemachten Bemerkung

$$\left.\begin{array}{l} \delta\,Y_i'\,\delta\frac{1}{g_i} = 0 \\ \delta\,X_i\,\delta\frac{1}{g_i} = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m)$$

gesetzt werden kann, so sind nunmehr alle in den Gleichungen (c) und (d) von Nro. 15 enthaltene Grössen von den Ordnungen δ und δ^2 gefunden.

Glieder, welche von der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Gestalt zugleich abhängen.

19) Die Glieder der dritten Ordnung, welche von der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Gestalt zugleich ab-

hängen, sind diejenigen, welche sowohl δ als Δ enthalten. In den Gleichungen (d) von Nro. 15 kommen folgende Glieder der Art vor:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -z_i \left\{ \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i \delta\frac{1}{g_i} \right\} \\ x_i &= -z_i \left\{ \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i + [\Delta X + XZ]_i \, \delta\frac{1}{g_i} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Diese Glieder werden nur in zwei Fällen gebraucht, nämlich bei der Berechnung der achromatischen Objective und derjenigen Instrumente, durch welche der farbige Rand so vollkommen als möglich vernichtet werden soll.

Im ersteren Falle können wir die Formeln auf eine ähnliche Weise vereinfachen, wie diejenigen, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen. Da nämlich durch die achromatischen Objective jene Abweichung und die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich aufgehoben werden, so sind die ihnen entsprechenden Grössen $\Delta\frac{1}{g}$, $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ und $\delta\frac{1}{g}$ durch die Wirkung des Objectivs so vermindert, dass man sie bei allen folgenden Flächen, eben so wie die von diesen allein herrührenden Glieder, als Grössen der dritten Ordnung betrachten kann, deren Potenzen und Producte in andere Abweichungen vernachlässigt werden. Bei denjenigen Flächen dagegen, welche dem Objective angehören, können wir, wie in Nro. 11, alle Glieder vernachlässigen, die mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ multiplicirt sind.

Unter dieser Voraussetzung sind die Formeln (b) von Nro. 11 hier anwendbar; sie geben, da

$$X_i = \frac{X_1}{V_i}$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i}{v_i} \left\{ \begin{aligned} &(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1 \\ &- L_i\,(\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)^2] \end{aligned} \right\} \\ \left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i &= \frac{V_i X_1}{v_i} \left\{ \Delta\frac{1}{c_1} - L_i\,[X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\phi_1)^2] \right\} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Durch die Differentiation nach der Characteristik δ erhält man hieraus die ersten Glieder der inclavirten Factoren von (a), welche jedoch, nach den am Ende von Nro. 12 gemachten Bemerkungen, eine weitere Vereinfachung zulassen. Wir haben nämlich daselbst gesehen, dass bei der gemachten Voraussetzung $\Delta\frac{1}{c_1}$, $\Delta\phi_1$ und L_i durch die Einrichtung der Instrumente bis auf Grössen vermindert werden, welche bei $\Delta\frac{1}{c_1}$ von der vierten Dimension, bei $\Delta\phi_1$ von der fünften, und bei L_i von der zweiten Dimension in Bezug auf X_1, $\acute{Y}_1$ und φ_1 anzunehmen sind. Da nun die erwähnte Differentiation einen Factor von der Ordnung $\delta\nu$ hinzufügt, welches den Grössen der

zweiten Dimension gleich geachtet wird, so ist aus den Formeln (b) ersichtlich, dass diejenigen Glieder, welche nach der Differentiation $\Delta\frac{1}{c_1}$, $\Delta\varphi_1$ und L_i enthalten und durch die Differentiation der übrigen Factoren dieser Grössen entstehen, von der siebenten Dimension sind. Dagegen haben die mit $\delta\Delta\frac{1}{c_1}$, $\delta\Delta\phi_1$ und δL_i multiplicirten Glieder nur die fünfte Dimension. Die Kleinheit von $\Delta\frac{1}{c_1}$, $\Delta\phi_1$ und L_i wird nämlich nur dadurch hervorgebracht, dass die in ihnen enthaltenen positiven und negativen Glieder beinahe gleich und entgegengesetzt sind, welches bei ihren Differentialen im Allgemeinen nicht zugleich stattfindet. Bei diesen müssen daher die ursprünglichen Dimensionen in Betracht kommen, welche durch die Differentiation um zwei Einheiten vergrössert werden, so dass $\delta\Delta\frac{1}{c_1}$ von der vierten, $\delta\Delta\phi_1$ von der fünften, und δL_i von der zweiten Dimension sind, mithin zu denselben Ordnungen, wie $\Delta\frac{1}{c_1}$, $\Delta\phi_1$ und L_i, gehören. Hieraus folgt, dass es erlaubt ist, bei der Differentiation der Formeln (b) alle Glieder zu vernachlässigen, welche die letztgenannten Grössen als Factoren enthalten, wonach aus jenen Formeln die folgenden abgeleitet werden können:

$$\left.\begin{aligned}\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&\delta\left[(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right]\\&-(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)\left[X_1^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2\right]\delta L_i\end{aligned}\right.\\ \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i &= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&\delta\left(X_1\Delta\frac{1}{c_1}\right)\\&-X_1\left[X_1^2+(\acute{Y}_1+K_1\varphi_1)^2\right]\delta L_i\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad(c)$$

welche nur die Berechnung von δL_i erfordern.

Vermöge (g) von Nro. 7 ist

$$L_i = \Sigma_1^i L^{(m)} = \Sigma_1^i \frac{A_m v_m}{V_m^4}$$

folglich

$$\delta L_i = \Sigma_1^i \left\{\frac{1}{V_m^4}[v_m\,\delta A_m + A_m\,\delta v_m] - \frac{4A_m v_m}{V_m^4}\,\frac{\delta V_m}{V_m}\right\}$$

Da A_m eine Function von h_m und n_m ist, so folgt daraus durch Differentiation nach der Characteristik δ:

$$\delta A_m = \left(\frac{dA}{dh}\right)_m \delta h_m + \left(\frac{dA}{dn}\right)_m \delta n_m$$

Setzt man daher, wie in Nro. 11,

$$n_m\left(\frac{dA}{dh}\right)_m = (A)_m$$

$$n_m\left(\frac{dA}{dn}\right)_m = [A]_m$$

und bemerkt, dass nach den in Nro. 4 und 17 gegebenen Werthen

$$v_{m-1} = \frac{v_m}{n_m}$$

$$\frac{V_{m-1} g_{m-1}}{c_m} = V_m$$

$$\delta h_m = \delta \frac{1}{c_m} = \frac{g^2_{m-1}}{c^2_m} \delta \frac{1}{g_{m-1}} = \frac{V^2_m n_m}{v_m} \left(\delta \frac{1}{c_1} - S_{m-1} \delta v \right)$$

$$\frac{\delta n_m}{n_m} = \frac{\delta v_m}{v_m} - \frac{\delta v_{m-1}}{v_{m-1}} = \frac{\delta v}{v_m} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1})$$

ist, so erhält man

$$\delta A_m = \frac{(A)_m V^2_m}{v_m} \left(\delta \frac{1}{c_1} - S_{m-1} \delta v \right) + \frac{[A]_m}{v_m} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1}) \delta v \quad . \quad . \text{(d)}$$

Ferner ist vermöge (d) von Nro. 17 und (f) von Nro. 18

$$\delta v_m = \alpha_m \delta v$$

$$\frac{\delta V_m}{V_m} = (K_m - K_1) \delta \frac{1}{c_1} - (S)_m \delta v$$

Das von $\delta \frac{1}{c_1}$ abhängige Glied in dem letzteren Ausdrucke kann jedoch vernachlässigt werden, weil es nach der in Nro. 17 gemachten Bemerkung von der vierten, δv dagegen von der zweiten Dimension anzunehmen ist.

Durch Substitution dieser Werthe wird daher der vorhergehende Ausdruck von δL_i

$$\delta L_i = \Sigma^i_m{}_1 \left\{ \begin{aligned} & - \frac{(A)_m S_{m-1}}{V^2_m} + \frac{4 A_m v_m}{V^4_m} (S)_m \\ & + \frac{[A]_m}{V^4_m} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1}) + \frac{A_m \alpha_m}{V^4_m} \end{aligned} \right\} \delta v$$

Die Werthe von $(A)_m$ und $[A]_m$ sind bereits in (g) von Nro. 11 gefunden worden.

Ausserdem ist

$$\frac{A_m v_m}{V^4_m} = L^{(m)}$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$U^{(m)} = - \frac{(A)_m S_{m-1}}{V^2_m} + 4 L^{(m)} S_m + \frac{[A]_m}{V^4_m} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1}) + \frac{A_m \alpha_m}{V^4_m} \quad \text{(e)}$$

so wird

$$\delta L_i = U_i \delta v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

Die Substitution dieses Werthes in (c) giebt endlich

$$\left. \begin{aligned} \delta \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g} \right)_i &= \frac{V_i}{v_i} \left\{ \begin{aligned} & \delta \left[(Y'_1 + K_1 \phi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \phi_1 \right] \\ & - U_i (Y'_1 + K_1 \phi_1) [X^2_1 + (Y'_1 + K_1 \phi_1)^2] \delta v \end{aligned} \right. \\ \delta \left(X \Delta \frac{1}{g} \right)_i &= \frac{V_i}{v_i} \left\{ \begin{aligned} & \delta \left(X_1 \Delta \frac{1}{c_1} \right) \\ & - U_i X_1 [X^2_1 + (Y'_1 + K_1 \phi_1)^2] \delta v \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \text{(g)}$$

Die erste der vorhergehenden Formeln besteht theils aus Gliedern, die von X_1 und Y'_1 abhängen, theils aus solchen, welche ϕ_1

allein enthalten, und den von dem Objective herrührenden Theil des farbigen Randes ausdrücken. Sondert man sie ab, so wie es in Nro. 17 geschehen ist, so nehmen jene Formeln die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{\rm i}=\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_{\rm i}+\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{\rm i}\\
&\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_{\rm i}=\\
&=\frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left\{\begin{aligned}&\delta\left[(\acute{Y}_1+\mathrm{K}_1\,\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\phi_1\right]'\\ &-U_{\rm i}\left\{(\acute{Y}_1+\mathrm{K}_1\,\phi_1)\left[X_1^2+(\acute{Y}_1+\mathrm{K}_1\,\phi_1)^2\right]-\mathrm{K}_1^3\,\phi_1^3\right\}\delta v\end{aligned}\right.\\
&\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{\rm i}=\frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left\{\begin{aligned}&\delta\left[(\acute{Y}_1+\mathrm{K}_1\,\phi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\,\phi_1\right]''\\ &-U_{\rm i}\,\mathrm{K}_1^3\,\phi_1^3\,\delta v\end{aligned}\right.\\
&\delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_{\rm i}=\frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left\{\begin{aligned}&\delta\left(X_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)\\ &-U_{\rm i}\,X_1\left[X_1^2+(\acute{Y}_1+\mathrm{K}_1\,\phi_1)^2\right]\delta v\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(h)}$$

Die Grösse $U^{(\rm m)}$ kann noch auf andere Weise ausgedrückt werden. Die erste Formel (g) von Nro. 17 giebt nämlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{\rm m-1}&=\mathrm{S}_{\rm m}-\mathrm{S}^{(\rm m)}\\
&=\mathrm{S}_{\rm m}+\frac{k_{\rm m}}{V_{\rm m}^2\,n_{\rm m}}\,(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})
\end{aligned}$$

folglich, wenn der letztere Werth in (e) substituirt wird,

$$\begin{aligned}
U^{(\rm m)}=&-\frac{(A)_{\rm m}\,\mathrm{S}_{\rm m}}{V_{\rm m}^2}+4\,L^{(\rm m)}\,(\mathrm{S})_{\rm m}\\
&+\left([A]-\frac{(A)\,k}{n}\right)_{\rm m}\frac{(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})}{V_{\rm m}^4}+\frac{A_{\rm m}\,\alpha_{\rm m}}{V_{\rm m}^4}
\end{aligned}$$

Sodann ist

$$\alpha_{\rm m}=(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})+n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1}$$

Substituiren wir diesen Werth in (e) und lassen die übrigen Grössen ungeändert, so bekommt $U^{(\rm m)}$ die dritte Gestalt:

$$\begin{aligned}
U^{(\rm m)}=&-\frac{(A)_{\rm m}\,\mathrm{S}_{\rm m-1}}{V_{\rm m}^2}+4\,L^{(\rm m)}\,(\mathrm{S})_{\rm m}\\
&+\frac{([A]+A)_{\rm m}}{V_{\rm m}^4}\,(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})+\frac{n_{\rm m}\,A_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1}}{V_{\rm m}^4}
\end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned}
&[A]-\frac{(A)\,k}{n}=[A']\\
&[A]+A=[A'']
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(i)}$$

so werden die beiden vorhergehenden Ausdrücke von $U^{(\rm m)}$:

$$\left.\begin{aligned}
U^{(\rm m)}=&-\frac{(A)_{\rm m}\,\mathrm{S}_{\rm m}}{V_{\rm m}^2}+4\,L^{(\rm m)}\,(\mathrm{S})_{\rm m}\\
&+\frac{[A']_{\rm m}}{V_{\rm m}^4}\,(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})+\frac{A_{\rm m}\,\alpha_{\rm m}}{V_{\rm m}^4}\\
=&-\frac{(A)_{\rm m}\,\mathrm{S}_{\rm m-1}}{V_{\rm m}^2}+4\,L^{(\rm m)}\,(\mathrm{S})_{\rm m}\\
&+\frac{[A'']_{\rm m}}{V_{\rm m}^4}\,(\alpha_{\rm m}-n_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1})+\frac{n_{\rm m}\,A_{\rm m}\,\alpha_{\rm m-1}}{V_{\rm m}^4}
\end{aligned}\right\}\text{(k)}$$

Vermittelst der in (a) von Nro. 7 und (g) von Nro. 11 gegebenen Werthe erhalten wir hierauf

$$\left.\begin{aligned}
[A'] &= [A] - \frac{(A)\,k}{n} = \\
&= -\frac{k^2}{2n}(k-h) = -\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{c}\right) \\
[A''] &= [A] + A = \\
&= \frac{k^2}{2n^3}\left[(n-2)\,k + nh\right] \\
&= \frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{n-2}{a}+\frac{2}{c}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(l)$$

Da nach den angenommenen Grundsätzen alle Glieder vernachlässigt werden, welche von den auf das Objectiv folgenden Flächen herrühren, so muss man, eben so wie bei den Grössen von der Ordnung Δ^2, die in U_i enthaltene Summe nur auf die Flächen des Objectives ausdehnen.

Ausser den vorhergehenden Gliedern kommen in den Gleichungen (a) noch die folgenden vor:

$$-z_i\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i \delta\frac{1}{g_i} \quad \text{und}$$

$$-z_i\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \delta\frac{1}{g_i}$$

sie fallen aber beide weg, weil $\delta\frac{1}{g_i}$ wegen des achromatischen Objectives eine Grösse der dritten Ordnung ist.

Die Formeln (h) enthalten daher bei achromatischen Objectiven alle mit den Charakteristiken δ und Δ zugleich versehene Glieder, in so fern man diejenigen vernachlässigt, welche von den Ocularen herrühren, so wie es oben vorausgesetzt wurde. Diese Annahme kann jedoch in Bezug auf den farbigen Rand nicht immer gemacht werden, welcher in den meisten Fällen mehr durch die Oculare, als durch das Objectiv, hervorgebracht wird. Daher ist der in (h) gefundene Ausdruck von $\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_i$ im Allgemeinen mangelhaft, und es ist nothwendig, denselben vollständig zu entwickeln, damit man in den Stand gesetzt wird, die Vernichtung des farbigen Randes so vollkommen als möglich zu erlangen, welches der Zweck der in der folgenden Nummer enthaltenen Untersuchung ist.

20) Der farbige Rand wird durch diejenigen Glieder der Formeln (d) von Nro. 15 ausgedrückt, welche allein von ϕ_1, nicht aber von X_1 und Y_1 abhängen. Nach der angenommenen Bezeichnung findet man diese Glieder, wenn man den daselbst angegebenen zwei Accente beisetzt. Hierdurch werden die Glieder der dritten Ordnung, welche δ und Δ zugleich enthalten und sich auf den farbigen Rand beziehen:

$$y_i = -z_i\left\{\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_i + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i \delta\frac{1}{g_i}\right\}$$

$$x_i = 0.$$

Bei der Entwickelung der Grössen, welche darin vorkommen, nehme ich an, dass der farbige Rand so vollkommen als möglich gehoben ist, wodurch

$$\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{i}^{\prime\prime} \text{ und } \left(K_{1}\,\phi_{1}\,\delta\frac{1}{c_{1}}-\delta\,\phi_{1}\right)$$

als Grössen der dritten Ordnung zu betrachten sind, deren Producte in andere Abweichungen vernachlässigt werden. Dagegen wollen wir die Untersuchung nicht allein auf Instrumente mit achromatischen Objectiven beschränken, da auch bei anderen Instrumenten die Vernichtung des farbigen Randes möglich ist. Hiernach wird $\delta\frac{1}{g_{i}}$ im Allgemeinen als eine Grösse der zweiten Ordnung angesehen, so dass die Producte davon in andere Abweichungen der zweiten Ordnung beibehalten werden müssen.

Nach diesen Prämissen gehe ich zur Entwickelung von

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{i}^{\prime\prime}.$$

Der Ausdruck (g) von Nro. 8 giebt, wenn man nur die von ϕ^{1} abhängigen Glieder beibehält,

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{i}^{\prime\prime}=\frac{V_{i}\,\phi_{1}}{v_{i}}\left[\frac{1}{\phi_{1}}\left(K_{1}\,\phi_{1}\,\Delta\frac{1}{c_{1}}-\Delta\,\phi_{1}\right)^{\prime\prime}-P_{i}\,\phi_{1}^{2}\right]$$

daher

$$\left.\begin{aligned}\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_{i}^{\prime\prime}=&\frac{V_{i}}{v_{i}}\left[\delta\left(K_{1}\phi_{1}\Delta\frac{1}{c_{1}}-\Delta\phi_{1}\right)^{\prime\prime}-\left(K_{1}\phi_{1}\Delta\frac{1}{c_{1}}-\Delta\phi_{1}\right)^{\prime\prime}\frac{\delta\phi_{1}}{\phi_{1}}\right]\\&+\left[\frac{1}{\phi_{1}}\left(K_{1}\,\phi_{1}\,\Delta\frac{1}{c_{1}}-\Delta\,\phi_{1}\right)^{\prime\prime}-P_{i}\,\phi_{1}^{2}\right]\delta\left(\frac{V_{i}\,\phi_{1}}{v_{i}}\right)\\&-\frac{V_{i}}{v_{i}}\left[2\,P_{i}\,\phi_{1}^{2}\,\delta\phi_{1}+\phi_{1}^{3}\,\delta\,P_{i}\right]\end{aligned}\right\}\text{(a)}$$

Aus (m) von Nro. 4 folgt

$$\delta\left(\frac{V_{i}\,\phi_{1}}{v_{i}}\right)=\delta\frac{f_{i}}{g_{i}}=Y_{i}\,\delta\frac{1}{g_{i}}-\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{i}$$

Substituiren wir nun statt Y_{i}, $\delta\frac{1}{g_{i}}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{i}$ ihre Werthe aus (q) von Nro. 4 und (h) von Nro. 17, nämlich

$$Y_{i}=\frac{1}{V_{i}}\,(Y_{1}^{\prime}+K_{i}\,\phi_{1})$$

$$\delta\frac{1}{g_{i}}=\frac{V_{i}^{2}}{v_{i}}\left\{\delta\frac{1}{c_{1}}-S_{i}\,\delta v\right\}$$

$$\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{i}=\frac{V_{i}}{v_{i}}\left\{\begin{aligned}&(Y_{1}^{\prime}+K_{1}\,\phi_{1})\,\delta\frac{1}{c_{1}}-\delta\phi_{1}\\&-S_{i}\,Y_{1}^{\prime}\,\delta v-T_{i}\,\phi_{1}\,\delta v\end{aligned}\right.$$

und sondern sodann die von K_{i} abhängigen Glieder ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{V_{i}\,\phi_{1}}{v_{i}}\right)=&\frac{V_{i}\,K_{i}\,\phi_{1}}{v_{i}}\left[\delta\frac{1}{c_{1}}-S_{i}\,\delta v\right]\\&-\frac{V_{i}}{v_{i}}\left[K_{1}\,\phi_{1}\,\delta\frac{1}{c_{1}}-\delta\phi_{1}-T_{i}\,\phi_{1}\,\delta v\right]\end{aligned}$$

Nach dem in (l) von Nro. 17 gegebenen Werthe ist aber

$$\frac{V_i}{v_i}\left[K_1\,\phi_1\,\delta\frac{1}{c_1}-\delta\phi_1-T_i\,\phi_1\,\delta v\right]=\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)''_i$$

und kann nach den angenommenen Grundsätzen in dem Ausdrucke von $\delta\left(\frac{V_i\,\phi_1}{v_i}\right)$ vernachlässigt werden, da diese Grösse noch mit anderen Abweichungen multiplicirt ist. Hierdurch wird

$$\delta\left(\frac{V_i\,\phi_1}{v_i}\right)=\frac{V_i\,K_i\,\phi_1}{v_i}\left[\delta\frac{1}{c_1}-S_i\,\delta v\right]\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (b)$$

Vermöge (f) von Nro. 8 hat man ferner

$$P_i=\Sigma_1^i\,P^{(m)}=\Sigma_1^i\left(\frac{A\,v\,K^3}{V^4}+\frac{3\,B\,K^2}{2\,V^2}+\frac{D\,K}{v}+\frac{E\,V^2}{v^2}\right)_m$$

folglich

$$\delta P_i=\Sigma_1^i\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{-4\,A\,v\,K^3}{V^4}-\frac{3\,B\,K^2}{V^2}+\frac{2\,E\,V^2}{v^2}\right)_m\frac{\delta V_m}{V_m}\\&+\left(\frac{3\,A\,v\,K^2}{V^4}+\frac{3\,B\,K}{V^2}+\frac{D}{v}\right)_m\delta K_m\\&+\left(\frac{A\,v\,K^3}{V^4}-\frac{D\,K}{v}-\frac{2\,E\,V^2}{v^2}\right)_m\frac{\delta v_m}{v_m}\\&+\left(\frac{v\,K^3}{V^4}\,\delta A+\frac{3\,K^2}{2\,V^2}\,\delta B+\frac{K}{v}\,\delta D+\frac{V_2}{v^2}\,\delta E\right)_m\end{aligned}\right\}\quad (c)$$

Aus den an demselben Orte angenommenen Werthen von $O^{(m)}$ und $P^{(m)}$ folgt aber

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{-4\,A\,v\,K^3}{V^4}-\frac{3\,B\,K^2}{V^2}+\frac{2\,E\,V^2}{v^2}\right)_m=-2\,O^{(m)}\,K_m+2\,P^{(m)}\\&\left(\frac{3\,A\,v\,K^2}{V^4}+\frac{3\,B\,K}{V^2}+\frac{D}{v}\right)_m=O^{(m)}\\&\left(\frac{A\,v\,K^3}{V^4}-\frac{D\,K}{v}-\frac{2\,E\,V^2}{v^2}\right)_m=O^{(m)}\,K_m-2\,P^{(m)}\end{aligned}\right\}\quad (d)$$

Die Ausdrücke (d) von Nro. 17, (f) und (h) von Nro. 18 geben sodann

$$\frac{\delta V_m}{V_m}=(K_m-K_1)\,\delta\frac{1}{c_1}-(S)_m\,\delta v$$

$$\delta K_m=\frac{\delta\,(Y)''_1}{\phi_1}+(K_m^2-2\,K_m\,K_1)\,\delta\frac{1}{c_1}+[(T)_m-K_m(S)_m]\,\delta v$$

$$\frac{\delta v_m}{v_m}=\frac{\alpha_m\,\delta v}{v_m}$$

Bemerken wir ferner, dass

$$\Sigma_1^i\,P^{(m)}=P_i$$

ist, so erhalten wir durch Substitution der vorhergehenden Werthe:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_1^i\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{4A\nu K^3}{V^4}-\frac{3BK^2}{V^2}+\frac{2EV^2}{\nu^2}\right)_m\frac{\delta V_m}{V_m}\\+\left(\frac{3A\nu K^2}{V^4}+\frac{3BK}{V^2}+\frac{D}{\nu}\right)_m\delta K_m\\+\left(\frac{A\nu K^3}{V^4}-\frac{DK}{\nu}-\frac{2EV^2}{\nu^2}\right)_m\frac{\delta\nu_m}{\nu_m}\end{array}\right\}=\\=-2P_iK_1\,\delta\frac{1}{c_1}+\Sigma_1^i\left\{\begin{array}{l}[-O^{(m)}K_m^2+2P^{(m)}K_m]\,\delta\frac{1}{c_1}\\+O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)_1''}{\phi_1\,\delta\nu}+(T)_m\right]\delta\nu\\+(O^{(m)}K_m-2P^{(m)})\left[(S)_m+\frac{\alpha_m}{\nu_m}\right]\delta\nu\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{(e)}$$

Vermöge (d) von Nro. 19 ist

$$\delta A_m=\frac{(A)_mV_m^2}{\nu_m}\left(\delta\frac{1}{c_1}-S_{m-1}\,\delta\nu\right)+\frac{[A]_m}{\nu_m}(\alpha_m-n_m\,\alpha_{m-1})\,\delta\nu$$

Diese Formel giebt unmittelbar δB_m, δD_m und δE_m, wenn man A mit B, D und E verwechselt.

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l}[P]^{(m)}=\left[\frac{(A)K^3}{V^2}+\frac{3(B)K^2}{2\nu}+\frac{3(C)V^2K}{\nu^2}\right]_m\\[P']^{(m)}=\left[\frac{[A]K^3}{V^4}+\frac{3[B]K^2}{2V^2\nu}+\frac{[D]K}{\nu^2}+\frac{[E]V^2}{\nu^3}\right]_m\\w^{(m)}=O^{(m)}K_m^2-2P^{(m)}K_m-[P]^{(m)}\end{array}\right\}\text{(f)}$$

wobei die Buchstaben (A), (B), $[A]$, $[B]$ etc. dieselbe Bedeutung wie in (g) von Nro. 11 haben, so wird

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\nu K^3}{V^4}\delta A+\frac{3K^2}{2V^2}\delta B+\frac{K}{\nu}\delta D+\frac{V^2}{\nu^2}\delta E\right)=\\\quad=[P]^{(m)}\left(\delta\frac{1}{c_1}-S_{m-1}\,\delta\nu\right)+[P']^{(m)}(\alpha_m-n_m\,\alpha_{m-1})\,\delta\nu\end{array}\right\}\text{(g)}$$

Durch die in (e), (f) und (g) gefundenen Werthe verwandelt sich der Ausdruck (c) in den folgenden

$$\left.\begin{array}{l}\delta P_i=-(2P_iK_1+w_i)\,\delta\frac{1}{c_1}\\+\delta\nu\,\Sigma_m^i\left\{\begin{array}{l}O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)_1''}{\phi_1\,\delta\nu}+(T)_m\right]\\+(O^{(m)}K_m-2P^{(m)})\left[(S)_m+\frac{\alpha_m}{\nu_m}\right]\\-[P]^{(m)}S_{m-1}+[P']^{(m)}(\alpha_m-n_m\,\alpha_{m-1})\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{(h)}$$

Substituiren wir endlich die in (b) und (h) entwickelten Werthe von $\delta\left(\frac{V_i\,\phi_1}{\nu_i}\right)$ und δP_i in (a), so erhalten wir mit Weglassung des dadurch entstehenden Gliedes

$$\frac{2V_i}{v_i} P_i \phi_1^2 \left(K_1 \phi_1 \delta\frac{1}{c_1} - \delta\phi_1\right)$$

welches nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt wird,

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)''_i =$$

$$= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} \delta\left(K_1\phi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right)'' - \left(K_1\phi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right)''\frac{\delta\phi_1}{\phi_1} \\ + \left[K_i\left(K_1\phi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\phi_1\right)'' - K_i P_i \phi_1^3\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right) \\ + w_i\,\phi_1^3\,\delta\frac{1}{c_1} \\ - \phi_1^3\,\delta v \sum_m^i \left\{\begin{array}{l} O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)''_1}{\phi_1\,\delta v} + (T)_m\right] \\ + (O^{(m)}K_m - 2P^{(m)})\left[(S)_m + \frac{\alpha_m}{v_m}\right] \\ - [P]^{(m)} S_{m-1} + [P']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(i)}$$

Die in (f) eingeführte Grösse $w^{(m)}$ kann auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Bringt man sie zuerst unter die Form:

$$w^{(m)} = (O^{(m)} K_m - 2P^{(m)})\,K_m + [P]^{(m)}$$

substituirt statt $(O^{(m)} K_m - 2P^{(m)})$ und $[P]^{(m)}$ ihre Werthe aus (d) und (f), und bemerkt, dass vermöge (f) von Nro. 8 und (g) von Nro. 11

$$\left(D + \frac{3}{2}(B)\right)_m = -(A')_m$$

$$(2E + 3(C))_m = (A'')_m$$

ist, so wird

$$w^{(m)} = \left[\frac{A\,v\,K^4}{V^4} - \frac{(A)\,K^3}{V^2} + \frac{(A')\,K^2}{v} - \frac{(A'')\,V^2 K}{v^2}\right]_m \quad \text{(k)}$$

Nach den zuletzt allegirten Formeln ist aber

$$(A) = n\left(\frac{dA}{dh}\right)$$

$$(A') = n^2\left(\frac{ddA}{2dh^2}\right)$$

$$(A'') = n^3\left(\frac{d^3A}{2.3\,dh^3}\right)$$

Der vorhergehende Werth von $w^{(m)}$ ist daher auch

$$w^{(m)} = \left(\frac{v K^4}{V^4}\right)_m \left\{\begin{array}{l} A - \left(\frac{dA}{dh}\right)\frac{nV^2}{vK} + \left(\frac{ddA}{2dh^2}\right)\left(\frac{nV^2}{vK}\right)^2 \\ - \left(\frac{d^3A}{2.3\,dh^3}\right)\left(\frac{nV^2}{vK}\right)^3 \end{array}\right\}_m$$

woraus folgt, dass $w^{(m)}$ denjenigen Werth bezeichnet, welchen die Grösse $\left(\frac{A\,v\,K^4}{V^4}\right)_m$ erhält, wenn man in A_m, h_m oder $\frac{1}{c_m}$ mit $\left(\frac{1}{c} - \frac{nV^2}{vK}\right)_m$ verwechselt.

Ferner erhalten wir aus (a) von Nro 7 und (a) von Nro. 10 in Verbindung mit den oben angeführten Werthen

$$\frac{(A)_m}{V_m^2} = l^{(m)} - \frac{3B_m}{2V_m^2}$$

$$\frac{(A')_m}{v_m} = -q^{(m)} + \frac{D_m}{v_m}$$

$$\frac{(A'')_m V_m^2}{v_m^2} = -\frac{E_m V_m^2}{v_m^2}$$

$$\left[\frac{A_v K^4}{V^4} + \frac{3BK^3}{2V^2} + \frac{DK^2}{v} + \frac{EV^2K}{v^2}\right]_m = P^{(m)} K_m$$

folglich, wenn wir dies in (k) substituiren und die durch das Zeichen Σ_1^i angedeutete Summe nehmen,

$$w_i = \Sigma_1^i w^{(m)} + \Sigma_1^i \left[P^{(m)} K_m - l^{(m)} K_m^3 - q^{(m)} K_m^2\right]$$

Die erste Formel (m) von Nro. 9 giebt aber durch Verwechselung von L mit P

$$\Sigma_1^i P^{(m)} K_m = K_i P_i - \Sigma_{1\,m}^i K^{(m)} P_{m-1}$$

folglich

$$w_i = K_i P_i - \Sigma_{1\,m}^i \left[K^{(m)} P_{m-1} + l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2\right]$$

Da die hier gebrauchten Werthe von $l^{(m)}$ und $q^{(m)}$ für alle Flächen gültig sind, so ist die unter dem Summationszeichen begriffene Grösse nach der am Ende von Nro. 10 eingeführten Bezeichnung $= P''^{(m)}$, mithin

$$w_i = K_i P_i - P_i'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

Ich gehe nun zur Entwickelung von $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i'' \delta\frac{1}{g_i}$

Aus der ersten Formel (g) von Nro. 10 folgt, wenn man blos die von φ_1 abhängigen Glieder beibehält und statt P_i'' seinen Werth aus (l) substituirt,

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i'' = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}\Delta (Y)_1'' \\ - K_i \left(K_1\, \varphi_1\, \Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\, \varphi_1\right)'' \\ + (K_i P_i - w_i)\, \varphi_1^3\end{array}\right.$$

Ferner ist vermöge (h) von Nro. 17

$$\delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left[\delta\frac{1}{c_1} - S_i\, \delta v\right]$$

Multipliciren wir daher diese beiden Ausdrücke, so wird

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i'' \delta\frac{1}{g_i} =$$

$$= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\Delta (Y)_1'' \left[\delta\frac{1}{c_1} - S_i\, \delta v\right] \\ -\left[K_i\left(K_1\, \varphi_1\, \Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\, \varphi_1\right)'' - K_i P_i\, \varphi_1^3\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\, \delta v\right) \\ - w_i\, \varphi_1^3\, \delta\frac{1}{c_1} + w_i\, S_i\, \varphi_1^3\, \delta v\end{array}\right\} \quad (m)$$

Die Summe von (i) und (m) giebt endlich

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{\mathrm{i}}+\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_{\mathrm{i}}\delta\frac{1}{g_{\mathrm{i}}}=$$

$$=\frac{V_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{array}{l}\delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''-\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1}\\ +\Delta(Y)''_1\left[\delta\frac{1}{c_1}-S_{\mathrm{i}}\,\delta v\right]+w_{\mathrm{i}}\,S_{\mathrm{i}}\,\varphi_1^3\,\delta v\\ -\varphi_1^3\,\delta v\,\Sigma_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}}{}_1\left\{\begin{array}{l}O^{(\mathrm{m})}\left[\frac{\delta(Y)''_1}{\varphi_1\,\delta v}+(T)_{\mathrm{m}}\right]\\ +(O^{(\mathrm{m})}K_{\mathrm{m}}-2P^{(\mathrm{m})})\left[(S)_{\mathrm{m}}+\frac{\alpha_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{m}}}\right]\\ -[P]^{(\mathrm{m})}S_{\mathrm{m}-1}\\ +[P']^{(\mathrm{m})}(\alpha_{\mathrm{m}}-n_{\mathrm{m}}\,\alpha_{\mathrm{m}-1})\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad(\mathrm{n})$$

Wir werden in der Folge sehen, dass $\Delta(Y)''_1$ blos von φ_1^3 abhängt, wodurch sich das Glied $-\Delta(Y)''_1\,S_{\mathrm{i}}\,\delta v$ mit den folgenden vereinigt, welche $\varphi_1^3\,\delta v$ als Factor enthalten. Setzen wir daher zur Abkürzung

$$W_{\mathrm{i}}=S_{\mathrm{i}}\left[\frac{\Delta(Y)''_1}{\varphi_1^3}-w_{\mathrm{i}}\right]$$

$$+\Sigma_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}}{}_1\left\{\begin{array}{l}O^{(\mathrm{m})}\left[\frac{\delta(Y)''_1}{\varphi_1\,\delta v}+(T)_{\mathrm{m}}\right]\\ +(O^{(\mathrm{m})}K_{\mathrm{m}}-2P^{(\mathrm{m})})\left[(S)_{\mathrm{m}}+\frac{\alpha_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{m}}}\right]\\ -[P]^{(\mathrm{m})}S_{\mathrm{m}-1}\\ +[P']^{(\mathrm{m})}(\alpha_{\mathrm{m}}-n_{\mathrm{m}}\,\alpha_{\mathrm{m}-1})\end{array}\right\},\quad\ldots\quad(\mathrm{o})$$

so nimmt der vorhergehende Ausdruck die Gestalt an:

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{\mathrm{i}}+\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_{\mathrm{i}}\delta\frac{1}{g_{\mathrm{i}}}=$$

$$=\frac{V_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}}}\left\{\begin{array}{l}\delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''-\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1}\\ +\Delta(Y)''_1\,\delta\frac{1}{c_1}-W_{\mathrm{i}}\,\varphi_1^3\,\delta v\end{array}\right\}\quad(\mathrm{p})$$

Vermittelst der in (q) und (s) von Nro. 17 gegebenen Werthe kann die Grösse W_{i} noch auf andere Art ausgedrückt werden. Gebrauchen wir die ersten jener Werthe, so ist

$$(S)_{\mathrm{m}}+\frac{\alpha_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{m}}}=K_{\mathrm{m}}\,S_{\mathrm{m}}-T_{\mathrm{m}}$$

$$(T)_{\mathrm{m}}=K_{\mathrm{m}}\,T_{\mathrm{m}}-u_{\mathrm{m}}$$

Ferner giebt die erste Formel (g) von Nro. 17

$$S_{\mathrm{m}-1}=S_{\mathrm{m}}-S^{(\mathrm{m})}$$

$$=S_{\mathrm{m}}+\frac{k_{\mathrm{m}}}{V_{\mathrm{m}}^2\,n_{\mathrm{m}}}(\alpha_{\mathrm{m}}-n_{\mathrm{m}}\,\alpha_{\mathrm{m}-1})$$

folglich, wenn diese Werthe in (o) substituirt werden,

$$W_i = S_i\left[\frac{\Delta(Y)_1''}{\varphi_1^3} - w_i\right] + \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i \left\{\begin{aligned} & O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1\,\delta v} - u_m\right] + 2P^{(m)}\,T_m \\ & + \left[O^{(m)}\,K_m^2 - 2P^{(m)}\,K_m - [P]^{(m)}\right] S_m \\ & + \left([P']^{(m)} - \frac{[P]^{(m)}\,k_m}{V_m^2\,n_m}\right)(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{aligned}\right.$$

Gebrauchen wir dagegen die zweiten Werthe, welche in (q) und (s) von Nro. 17 gefunden wurden, so ist

$$\begin{aligned} (S)_m + \frac{\alpha_m}{\nu_m} &= K_m\,S_{m-1} - T_{m-1} \\ &\quad + \frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}} \\ &= K_m\,S_{m-1} - T_{m-1} \\ &\quad + \frac{1}{\nu_m}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \\ (T)_m &= K_m\,T_{m-1} - u_{m-1} \end{aligned}$$

folglich

$$W_i = S_i\left[\frac{\Delta(Y)_1''}{\varphi_1^3} - w_i\right] + \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i \left\{\begin{aligned} & O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y_1'')}{\varphi_1\,\delta v} - u_{m-1}\right] + 2P^{(m)}\,T_{m-1} \\ & + \left[O^{(m)}\,K_m^2 - 2P^{(m)}\,K_m - [P]^{(m)}\right] S_{m-1} \\ & + \left([P']^{(m)} + \frac{O^{(m)}K_m - 2P^{(m)}}{\nu_m}\right)(\alpha_m - n_m\alpha_{m-1}) \end{aligned}\right.$$

Es ist aber vermöge (f)

$$O^{(m)}\,K_m^2 - 2P^{(m)}\,K_m - [P]^{(m)} = w^{(m)}$$
$$S_i\,w_i = S_i\,\Sigma_1^i\,w^{(m)} = \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i\,S_i\,w^{(m)}$$

Setzen wir daher noch ausserdem

$$\left.\begin{aligned} [P'']^{(m)} &= [P']^{(m)} - \frac{[P]^{(m)}\,k_m}{V_m^2\,n_m} \\ [P''']^{(m)} &= [P']^{(m)} + \frac{O^{(m)}\,K_m - 2P^{(m)}}{\nu_m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

so verwandeln sich die beiden vorhergehenden Ausdrücke von W_i in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} W_i &= \frac{S_i\,\Delta(Y)_1''}{\varphi_1^3} + \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i \left\{\begin{aligned} & O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1\,\delta v} - u_m\right] + 2P^{(m)}\,T_m \\ & - w^{(m)}(S_i - S_m) + [P'']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{aligned}\right. \\ &= \frac{S_i\,\Delta(Y)_1''}{\varphi_1^3} + \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i \left\{\begin{aligned} & O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1\,\delta v} - u_{m-1}\right] + 2P^{(m)}\,T_{m-1} \\ & - w^{(m)}(S_i - S_{m-1}) + [P''']^{(m)}(\alpha_m - n_m\alpha_{m-1}) \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (r)$$

Die hier eingeführten Grössen $[P'']^{(m)}$ und $[P''']^{(m)}$ lassen sich auf eine einfachere Form bringen. Substituirt man nämlich statt $[P]^{(m)}$, $[P']^{(m)}$ und $\left(\frac{O^{(m)}\,K_m - 2P^{(m)}}{\nu_m}\right)$ ihre Werthe aus (d) und (f), so wird

$$[P'']^{(m)} = \left\{\begin{aligned} & \left([A] - \frac{(A)k}{n}\right)\frac{K^3}{V^4} + \frac{3}{2}\left([B] - \frac{(B)k}{n}\right)\frac{K^2}{V^2\,\nu} \\ & + \left([D] - \frac{3(C)k}{n}\right)\frac{K}{\nu^2} + \frac{[E]\,V^2}{\nu^3} \end{aligned}\right\}_m$$

$$[P''']^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} ([A]+A)\dfrac{K^3}{V^4} + \dfrac{3}{2}[B]\dfrac{K^2}{V^2\nu} \\ + ([D]-D)\dfrac{K}{\nu^2} + ([E]-2E)\dfrac{V^2}{\nu^3} \end{array} \right\}_m$$

Wir können daher setzen:

$$\left.\begin{array}{l} [P'']^{(m)} = \left[\dfrac{[A']K^3}{V^4} + \dfrac{3[B']K^2}{2V^2\nu} + \dfrac{[D']K}{\nu^2} + \dfrac{[E']V^2}{\nu^3}\right]_m \\ [P''']^{(m)} = \left[\dfrac{[A'']K^3}{V^4} + \dfrac{3[B'']K^2}{2V^2\nu} + \dfrac{[D'']K}{\nu^2} + \dfrac{[E'']V^2}{\nu^3}\right]_m \end{array}\right\} \quad (s)$$

Durch Substitution der in (a) von Nro. 7, (f) von Nro. 8 und (g) von Nro. 11 gegebenen Werthe erhalten wir hierauf

$$\left.\begin{array}{rl} [A'] &= [A] - \dfrac{(A)\,k}{n} \\ &= \dfrac{-k^2}{2n}(k-h) = -\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{c}\right) \\ [B'] &= [B] - \dfrac{(B)\,k}{n} \\ &= -k\,(k-h) = -\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{c}\right) \\ [D'] &= [D] - \dfrac{3(C)\,k}{n} \\ &= -n\,(2k-h) = -n\left(\dfrac{2}{a}-\dfrac{3}{c}\right) \\ [E'] &= [E] = -n^2 \\ [A''] &= [A]+A \\ &= \dfrac{k^2}{2n^3}[(n-2)\,k+nh] \\ &= \dfrac{1}{2n^3}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)^2\left[\dfrac{n-2}{a}+\dfrac{2}{c}\right] \\ [B''] &= [B] \\ &= \dfrac{k}{n^2}[(n-2)\,k+n\,h] \\ &= \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{c}\right)\left[\dfrac{n-2}{a}+\dfrac{2}{c}\right] \\ [D''] &= [D]-D \\ &= \dfrac{1}{n}[(n-3)\,k+n\,h] \\ &= \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n-3}{a}+\dfrac{3}{c}\right] \\ [E''] &= [E]-2E = -1 \end{array}\right\} \quad (t)$$

Durch den Ausdruck (p) sind nunmehr alle Glieder der dritten Ordnung gegeben, welche δ und Δ zugleich enthalten und sich auf den farbigen Rand beziehen. Da sich jener Ausdruck auf sämmtliche brechende Flächen erstreckt, so enthält er auch denjenigen Theil

von $\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\frac{f}{g}\right)''_{i}$, der bei einem achromatischen Objective von diesem herrührt und in (h) von Nro. 19 bereits entwickelt wurde. Beide Formeln haben jedoch nicht einerlei Gestalt, es ist daher nothwendig, ihre Identität nachzuweisen.

Der Ausdruck (p) ist die Summe der beiden in (i) und (m) gefundenen, von welchen der letztere hier wegfällt, da durch die Wirkung des achromatischen Objectivs der darin enthaltene Factor $\delta\frac{1}{g_i}$ zu einer Grösse der dritten Ordnung geworden ist.

Aus demselben Grunde können auch die mit $\left(\delta\frac{1}{c_1}-S_i\,\delta\nu\right)$, $\delta\frac{1}{c_1}$ und $\delta\varphi_1$ multiplicirten Glieder vernachlässigt werden; mithin bleiben nur noch folgende Glieder von (i) übrig:

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{i}=$$

$$=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\\ -\varphi_1^3\,\delta\nu\,\Sigma_m^i\left\{\begin{array}{l}O^{(m)}\left[\frac{\delta(Y)''_1}{\varphi_1\delta\nu}+(T)_m\right]\\ +(O^{(m)}K_m-2P^{(m)})\left[(S)_m+\frac{\alpha_m}{\nu_m}\right]\\ -[P]^{(m)}S_{m-1}\\ +[P']^{(m)}(\alpha_m-n_m\,\alpha_{m-1})\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad\text{(u)}$$

In Nro. 19 wurden aber nur diejenigen Grössen beibehalten, welche ursprünglich von b oder f unabhängig waren, so dass die Formeln (b) von Nro. 11 hier anwendbar sind. Sie geben

$$O^{(m)}=3\,K_1^2\,L^{(m)}$$
$$P^{(m)}=K_1^3\,L^{(m)}$$
$$O^{(m)}K_m-2\,P^{(m)}=K_1^3\,L^{(m)}$$

Da bei jenen Formeln

$$(K_m-K_1)\,\varphi_1$$

vernachlässigt wurde, so kann

$$K_m=K_1$$

gesetzt werden. Hieraus folgt

$$\delta K_m=\delta K_1$$

Substituirt man darin statt δK_m seinen Werth aus (h) von Nro. 18, nämlich

$$\delta K_m=\delta K_1+[(T)_m-K_1(S)_m]\,\delta\nu$$

so wird

$$(T)_m=K_1\,(S)_m$$

Bemerken wir endlich, dass *B*, *C*, *D*, *E* und die davon abgeleiteten Coefficienten wegfallen, weil sie von Grössen herrühren, welche ursprünglich mit b oder f multiplicirt waren, so erhalten wir aus (f) der gegenwärtigen Nummer

$$[P]^{(m)} = \frac{K_1^3\,(A)^{(m)}}{V_m^2}$$

$$[P']^{(m)} = \frac{K_1^3\,[A]^{(m)}}{V_m^4}$$

Durch diese Werthe verwandelt sich der Ausdruck (u) in den folgenden

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i'' =$$

$$= \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} \delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)'' \\ -3L_i K_1^2 \varphi_1^2 \delta(Y)_1'' \\ -K_1^3\varphi_1^3\,\delta v \Sigma_m^i \left\{\begin{array}{l} 4L^{(m)}(S)_m + \frac{L^{(m)}\alpha_m}{v_m} \\ -\frac{(A)^{(m)} S_{m-1}}{V_m^2} + \frac{[A]^{(m)}}{V_m^4}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Das von L_i abhängige Glied wird nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt. Ferner ist

$$\delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)''$$

einerlei mit

$$\delta\left[(Y_1' + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right]''$$

und die unter dem Summationszeichen befindliche Grösse vermöge (e) von Nro. 19 $= U^{(m)}$.

Die vorhergehende Formel stimmt daher, wenn sie blos auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt wird, vollkommen mit derjenigen überein, welche in (h) jener Nummer gefunden wurde. Da hiernach alle darin enthaltene Glieder zugleich in der oben mit (p) bezeichneten Formel begriffen sind, so müssen wir, um dieselben nicht doppelt in Rechnung zu bringen, im Allgemeinen die erstere weglassen und die letztere an ihre Stelle setzen. Nur in dem Falle ist es erlaubt, den Ausdruck (h) von Nro. 19 statt des gegenwärtigen zu gebrauchen, wenn diejenigen Glieder vernachlässigt werden, welche δ und Δ enthalten und sich auf die Oculare beziehen, so wie es bei dem Galiläischen Fernrohre geschehen kann.

21) Die Grössen der dritten Ordnung, welche sich auf den farbigen Rand beziehen, sind in dem Vorhergehenden unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass die Producte von $\delta\frac{1}{g_i}$ in Abweichungen der zweiten Ordnung beibehalten werden; es ist jedoch leicht, die Formeln auf den Fall zurückzuführen, dass $\delta\frac{1}{g_i} = 0$ ist, jene Producte mithin wegfallen. Ob nun gleich die hierdurch erhaltenen Resultate mit den oben gefundenen vollkommen übereinstimmen, so ist es doch nicht unnütz, jene Reduction kennen zu lernen,

da sie zu einer anderen Methode führt, nach welcher die genannten Grössen berechnet werden können. Zu dem Ende betrachte ich sämmtliche Glieder der Ausdrücke (d) von Nro. 15, welche sich auf den farbigen Rand beziehen und aus den daselbst gegebenen durch die Beisetzung von zwei Accenten erhalten werden.

Diese Glieder sind:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -z_i \left\{ \begin{aligned} &\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)''_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i \\ &+ \delta\, Y''_i\, \delta\frac{1}{g_i} + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)''_i \\ &+ \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i \delta\frac{1}{g_i} \end{aligned}\right. \\ x_i &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (a)$$

Sie drücken die von der Farbenzerstreuung herrührende Abweichung desjenigen Strahles aus, dessen Einfallspunkt auf der ersten brechenden Fläche durch die Coordinaten

$$\mathfrak{X}_1 = 0$$
$$\mathfrak{Y}_1 = K_1\,\varphi_1 + \Delta(K_1\,\varphi_1)'' + \delta(K_1\,\varphi_1)$$
$$\mathfrak{Z}_1 = Z''_1 = \frac{K_1^2\,\varphi_1^2}{2\,a_1}$$

bestimmt ist. Dieser Strahl liegt ganz in der Ebene der yz und geht durch den Punct, dessen Coordinaten 0, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ sind, und welcher als leuchtender Punkt angenommen worden ist. Nun aber ist es klar, dass die Abweichungen desselben ungeändert bleiben, wenn man den letzteren Punkt mit einem anderen, willkührlich in dem einfallenden Strahle gewählten Punkte verwechselt, weil hierdurch die Lage des Strahles nicht abgeändert wird. Jenen willkührlichen Punkt kann man hierauf so bestimmen, dass die Rechnung so viel als möglich erleichtert wird.

Da der einfallende Strahl durch die beiden Punkte $0\ \mathfrak{Y}_1\ \mathfrak{Z}_1$ und $0\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1$ geht, so ist seine Gleichung

$$\frac{y-\mathfrak{b}_1}{z-\mathfrak{c}_1} = \frac{\mathfrak{Y}_1-\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{c}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Setzen wir hierin

$$y = \mathfrak{b}_1 + D\mathfrak{b}_1$$
$$z = \mathfrak{c}_1 + D\mathfrak{c}_1$$

und verstehen unter den mit der Charakteristik D versehenen Grössen willkührliche Variationen von der Ordnung δ, so wird

$$\frac{y-\mathfrak{b}_1}{z-\mathfrak{c}_1} = \frac{D\mathfrak{b}_1}{D\mathfrak{c}_1}$$

Es ist aber

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1\,(\varphi_1 + \Delta\varphi''_1 + \delta\varphi_1)$$

folglich, wenn man die Grössen von der Ordnung D^2 berücksichtigt,

$$D\mathfrak{b}_1 = (\varphi_1 + \Delta\varphi''_1 + \delta\varphi_1)\,D\mathfrak{c}_1$$
$$+ (\mathfrak{c}_1 + D\mathfrak{c}_1)\,D(\varphi_1 + \Delta\varphi''_1 + \delta\varphi_1)$$

und

$$\frac{D\mathfrak{b}_1}{D\mathfrak{c}_1} = (\varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1) + \left(\frac{\mathfrak{c}_1 + D\mathfrak{c}_1}{D\mathfrak{c}_1}\right) D(\varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1)$$

ferner

$$\mathfrak{c}_1 + D\mathfrak{c}_1 = \left(\frac{1}{\mathfrak{c}_1} + D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}\right)^{-1}$$

folglich

$$D\mathfrak{c}_1 = \left(\frac{1}{\mathfrak{c}_1} + D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}\right)^{-1} - \mathfrak{c}_1$$

und

$$\frac{\mathfrak{c}_1 + D\mathfrak{c}_1}{D\mathfrak{c}_1} = \frac{1}{1 - \mathfrak{c}_1\left(\frac{1}{\mathfrak{c}_1} + D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}\right)} = -\frac{1}{\mathfrak{c}_1 \, D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$\frac{y - \mathfrak{b}_1}{z - \mathfrak{c}_1} = \frac{D\mathfrak{b}_1}{D\mathfrak{c}_1} = \varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1 - \frac{D(\varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1)}{\mathfrak{c}_1 \, D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}} \quad \text{(c)}$$

Die obigen Werthe von $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ geben

$$\frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{b}_1}{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{c}_1} = \frac{\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1} - \frac{\mathfrak{Y}_1}{\mathfrak{c}_1}}{1 - \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{c}_1}} =$$

$$= \frac{\varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1 - \frac{1}{\mathfrak{c}_1}[\mathrm{K}_1\varphi_1 + \Delta(\mathrm{K}_1\varphi_1)'' + \delta(\mathrm{K}_1\varphi_1)]}{1 - \frac{Z_1''}{\mathfrak{c}_1}}$$

und mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung φ_1^5

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{b}_1}{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{c}_1} &= \varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1 \\ &- \frac{1}{\mathfrak{c}_1}\left[\mathrm{K}_1\varphi_1 + \Delta(\mathrm{K}_1\varphi_1)'' + \delta(\mathrm{K}_1\varphi_1) + Z_1''\varphi_1\left(\frac{\mathrm{K}_1}{c_1} - 1\right)\right] \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

Durch die in (c) und (d) gefundenen Werthe verwandelt sich die Gleichung (b) in folgende:

$$\left.\begin{aligned} &D(\varphi_1 + \Delta\varphi_1'' + \delta\varphi_1) = \\ &= D\frac{1}{\mathfrak{c}_1}\left[\mathrm{K}_1\varphi_1 + \Delta(\mathrm{K}_1\varphi_1)'' + \delta(\mathrm{K}_1\varphi_1) + Z_1''\varphi_1\left(\frac{\mathrm{K}_1}{c_1} - 1\right)\right] \end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

Nehmen wir an, dass die Grössen φ_1 etc. sämmtlich die mit der Charakteristik D bezeichneten willkührlichen Variationen erhalten, so ist die Gleichung (e) als eine Bedingungsgleichung zu betrachten, welcher jene Variationen Genüge leisten müssen. Es kommt jedoch noch eine zweite Bedingungsgleichung hinzu, welche darin ihren Ursprung hat, dass der Einfallspunkt, ungeachtet der Variationen, ungeändert bleiben, mithin $D\,\mathfrak{Y}_1 = 0$ seyn muss. Durch Substitution des oben angegebenen Werthes von $\mathfrak{Y}_1$ wird hiernach die zweite Bedingungsgleichung

$$0 = D[\mathrm{K}_1\,\varphi_1 + \Delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)'' + \delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)] \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(f)}$$

Der Gebrauch, den man von dieser Analyse bei der Reduction der Gleichung (a) machen kann, ist nun folgender. Jene Gleichung enthält die mit dem Index 1 und der Charakteristik δ versehenen Constanten; vermehrt man diese sämmtlich mit den correspondirenden durch die Charakteristik D bezeichneten Variationen, so bleibt die Gleichung (a) ungeändert, wofern nur jene so genommen werden, dass sie den Bedingungsgleichungen (e) und (f) Genüge leisten. Da die Anzahl der Variationen grösser als die der Bedingungsgleichungen ist, so können wir diejenigen, welche dadurch nicht bestimmt werden, nach Willkühr annehmen, und auf diese Art der Gleichung (a) eine einfachere Gestalt geben.

Hiernach folgt aus (l) von Nro. 17, wenn man $\delta\frac{1}{c_1}$ mit $\delta\frac{1}{c_1}+\mathrm{D}\frac{1}{c_1}$ verwechselt,

$$\delta\frac{1}{g_i}=\frac{V_i^2}{v_i}\left[\delta\frac{1}{c_1}+\mathrm{D}\frac{1}{c_1}-S_i\,\delta\nu\right]$$

Bestimmt man das willkührliche $\mathrm{D}\frac{1}{c_1}$ so, dass $\delta\frac{1}{g_i}=0$ wird, so ist

$$\mathrm{D}\frac{1}{c_1}=-\left(\delta\frac{1}{c_1}-S_i\,\delta\nu\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(g)$$

Setzen wir ferner

$$\mathrm{D}\,\Delta\frac{1''}{c_1}=\mathrm{D}\,\delta\frac{1}{c_1}=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(h)$$

so wird

$$\mathrm{D}\frac{1}{c_1}=\mathrm{D}\left[\frac{1}{c_1}+\Delta\frac{1''}{c_1}+\delta\frac{1}{c_1}\right]=\mathrm{D}\frac{1}{c_1}$$

und die Gleichung (e) zerfällt durch die abgesonderte Vergleichung der Grössen, welche zu den Ordnungen D, DΔ und Dδ gehören, in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{D}\,\varphi_1&=\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\mathrm{D}\frac{1}{c_1}\\ \mathrm{D}\,\Delta\varphi_1''&=\mathrm{D}\frac{1}{c_1}\left[\Delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)''+Z_1''\,\varphi_1\left(\frac{\mathrm{K}_1}{c_1}-1\right)\right]\\ \mathrm{D}\,\delta\varphi_1&=\mathrm{D}\frac{1}{c_1}\,\delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)\end{aligned}\right\}\;(i)$$

Ebenso giebt die Gleichung (f)

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{D}\,(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)&=0\\ \mathrm{D}\,\Delta\,(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)''&=0\\ \mathrm{D}\,\delta\,(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)&=0\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(k)$$

Aus (d) von Nro. 10 und (b) von Nro. 18 erhalten wir, wenn wir blos die von φ_1 abhängigen Glieder berücksichtigen,

$$\Delta(Y)_1''=\Delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)''+\mathrm{K}_1\,(\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1)''+Z_1''\varphi_1\left(\frac{\mathrm{K}_1}{c_1}-1\right)$$

$$\delta(Y)_1''=\delta(\mathrm{K}_1\,\varphi_1)+\mathrm{K}_1\left(\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1}-\delta\varphi_1\right)$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}&\Delta(K_1\varphi_1)'' + Z_1''\varphi_1\left(\frac{K_1}{c_1}-1\right) = \Delta(Y)_1'' - K_1\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)''\\ &\delta(K_1\varphi_1) = \delta(Y)_1'' - K_1\left(K_1\varphi_1\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)\end{aligned}\right\}\quad(l)$$

Durch Substitution der in (g) und (l) gefundenen Werthe verwandeln sich die Formeln (i) in die nachstehenden:

$$\left.\begin{aligned}&D\varphi_1 = -K_1\varphi_1\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right)\\ &D\Delta\varphi_1'' = -\left[\Delta(Y)_1'' - K_1\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)''\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right)\\ &D\delta\varphi_1 = -\left[\delta(Y)_1'' - K_1\left(K_1\varphi_1\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right)\end{aligned}\right\}\quad(m)$$

Ferner wird der vorhergehende Ausdruck von $\delta(Y)_1''$, wenn man darin δ mit D verwechselt,

$$D(Y)_1'' = D(K_1\varphi_1) + K_1\left(K_1\varphi_1 D\frac{1}{c_1} - D\varphi_1\right)$$

Vermöge der ersten Formeln (i) und (k) ist aber

$$D(K_1\varphi_1) = 0$$

$$\left(K_1\varphi_1 D\frac{1}{c_1} - D\varphi_1\right) = 0$$

mithin

$$D(Y)_1'' = 0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(n)$$

Endlich folgt aus (g) von Nro. 18

$$\delta K_1 = \frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1} - K_1^2\,\delta\frac{1}{c_1}$$

und ebenso durch Verwechselung von δ mit D

$$D\,K_1 = \frac{D(Y)_1''}{\varphi_1} - K_1^2\,D\frac{1}{c_1}$$

oder nach Substitution der in (g) und (n) gefundenen Werthe

$$D\,K_1 = K_1^2\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right)$$

folglich

$$\delta K_1 + D\,K_1 = \delta K_1 + K_1^2\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right) - \frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1} - K_1^2 S_i\,\delta v\quad.\quad(o)$$

Setzt man nun allen in der Gleichung (a) enthaltenen Grössen, welche mit der Charakteristik δ und dem Index 1 versehen sind, die correspondirenden Variationen zu, welche aus jenen durch die Verwechselung von einem δ mit D entstehen, und substituirt die vorhergehenden Werthe derselben, so muss man in der Gleichung (a) folgende Verwechselungen vornehmen:

$$\left.\begin{aligned}&\delta\frac{1}{c_1}\text{ mit }\delta\frac{1}{c_1} + D\frac{1}{c_1} = S_i\,\delta v\\ &\delta\varphi_1\text{ mit }\delta\varphi_1 + D\varphi_1 = \delta\varphi_1 - K_1\varphi_1\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta v\right)\\ &\delta^2\frac{1}{c_1}\text{ mit }\delta^2\frac{1}{c_1} + D\,\delta\frac{1}{c_1} = \delta^2\frac{1}{c_1}\end{aligned}\right\}\quad(p)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\delta^2 \varphi_1 \text{ mit } \delta^2 \varphi_1 + \mathrm{D}\,\delta\varphi_1 = \delta^2\varphi_1 \\
\quad - \left[\delta(Y)_1'' - \mathrm{K}_1\left(\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta\nu\right) \\
\delta\,\Delta\frac{1''}{c_1} \text{ mit } \delta\,\Delta\frac{1''}{c_1} + \mathrm{D}\,\Delta\frac{1''}{c_1} = \delta\,\Delta\frac{1''}{c_1} \\
\delta\,\Delta\,\varphi_1'' \text{ mit } \delta\,\Delta\,\varphi_1'' + \mathrm{D}\,\Delta\,\varphi_1'' = \delta\,\Delta\,\varphi_1'' \\
\quad - \left[\Delta(Y)_1'' - \mathrm{K}_1\left(\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)''\right]\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta\nu\right) \\
\delta(Y)_1'' \text{ mit } \delta(Y)_1'' + \mathrm{D}(Y)_1'' = \delta(Y)_1'' \\
\delta\mathrm{K}_1 \text{ mit } \delta\mathrm{K}_1 + \mathrm{D}\mathrm{K}_1 = \delta\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_1^2\left(\delta\frac{1}{c_1} - S_i\,\delta\nu\right) = \\
\quad = \frac{\delta(Y)_1''}{\varphi_1} - \mathrm{K}_1^2\,S_i\,\delta\nu \\
\delta\frac{1}{g_i} \text{ mit } 0
\end{array}\right\} \quad (\mathrm{p})$$

Durch diese Verwechselungen fallen die in der Gleichung (a) enthaltenen Glieder

$$\delta Y_1''\,\delta\frac{1}{g_i} \text{ und } \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i''\,\delta\frac{1}{g_i}$$

weg, der in (l) von Nro. 17 gefundene Werth von $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i''$ bleibt ungeändert, dagegen verwandeln sich die in (n) von Nro. 17 und (i) von Nro. 20 erhaltenen Ausdrücke von

$$\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i'' \text{ und } \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i''$$

wenn man darin die von $\left(\mathrm{K}_1\,\varphi_1\,\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1\right)$ abhängigen Glieder weglässt, in die Ausdrücke (i) von Nro. 18 und (n) von Nro. 20, so dass die Summe von allen diesen Grössen, welche in der Gleichung (a) allein vorkommt, nicht abgeändert wird. Durch die Anwendung der hier gebrauchten Reduction hätte man daher die Berechnung der Grössen

$$\delta Y_i''\,\delta\frac{1}{c_i} \text{ und } \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i''\,\delta\frac{1}{g_i}$$

ersparen können; da sie jedoch nur wenige Mühe verursacht, so habe ich die directe Entwickelung vorgezogen, um die Uebereinstimmung beider Methoden zu zeigen.

Dagegen leitet die vorhergehende Reduction zu einer anderen Bestimmung der in (p) von Nro. 20 gefundenen Grösse, wobei die etwas mühsame Berechnung von W_i umgangen wird. Die in (p) erwähnten Verwechselungen und die Formeln (b) und (a) jener Nummer geben nämlich

$$\delta\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''-\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1}=$$

$$=\delta\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''-\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1}$$

$$+\Delta(Y)''_1\left(\delta\frac{1}{c_1}-S_i\,\delta\nu\right)$$

$$\delta\left(\frac{V_i\,\varphi_1}{\nu_i}\right)=0$$

$$2P_i\,\varphi_1^2\,\delta\varphi_1=2K_1\,P_i\,S_i\,\varphi_1^3\,\delta\nu$$

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned}&\delta\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\\&-\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1}\\&+\Delta(Y)''_1\,\delta\frac{1}{c_1}\\&-\varphi_1^3\,\delta\nu\left[\frac{S_i\,\Delta(Y)''_1}{\varphi_1^3}+2K_1\,P_i\,S_i+\frac{\delta P_i}{\delta\nu}\right]\end{aligned}\right\}\quad(q)$$

unter der Voraussetzung, dass in δP_i noch jene Verwechselungen vorgenommen werden. Da $\delta\frac{1}{g_i}$ nunmehr mit 0 vertauscht werden muss, so tritt die vorhergehende Formel (q) an die Stelle derjenigen, welche in Nro. 20 mit (p) bezeichnet wurde. Die Vergleichung von beiden zeigt, dass

$$W_i=\frac{S_i\,\Delta(Y)''_1}{\varphi_1^3}+2K_1\,P_i\,S_i+\frac{\delta P_i}{\delta\nu}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(r)$$

ist. Die mit dem Index 1 versehenen Constanten, welche darin vorkommen, sollen in der Folge bestimmt werden, es bleibt daher nur übrig, S_i und δP_i zu finden. Wenn es nun nicht auf den analytischen Ausdruck, sondern nur auf die numerische Berechnung dieser Grössen ankommt, so kann dieselbe mit hinlänglicher Genauigkeit auf folgende Art geführt werden.

Zuerst berechnet man für denjenigen mittleren Strahl, dessen Einfallspunkt auf der ersten brechenden Fläche durch die Coordinaten

$$Y''_1=K_1\,\varphi_1$$
$$X_1=0$$

bestimmt wird, die Vereinigungsweiten von c_1 bis g_i, und dann P_i nach den in Nro. 4 und 8 gegebenen Formeln.

Hierauf wählt man nach Willkühr einen von den verschiedenen farbigen Strahlen, welche ursprünglich mit dem mittleren einen und denselben Strahl ausmachten, ehe sie durch die Brechungen von einander getrennt wurden. Für diesen zweiten Strahl bestimmt man c_1 nach dem Vorhergehenden so, dass die letzte Vereinigungsweite g_i der des mittleren Strahles gleich ist, den Einfallspunkt auf der ersten brechenden Fläche dagegen durch die Bedingung, dass

der Strahl mit dem mittleren ursprünglich zusammenfiel, und berechnet mit Berücksichtigung jener Bedingungen P_i eben so, wie es für den mittleren Strahl geschehen ist. Aus den hierdurch erhaltenen Resultaten können sodann die Werthe von S_i und δP_i leicht abgeleitet werden, wozu die folgenden Formeln dienen.

Da bei dieser Untersuchung keine einfach accentuirte Buchstaben vorkommen, so bezeichne ich alle Grössen, welche sich auf den zweiten Strahl beziehen, mit einem Accente, und setze diesen auch der Characteristik δ bei, um die dadurch angedeuteten Veränderungen von denen des allgemeinen farbigen Strahles zu unterscheiden. Dieses vorausgesetzt hat man vermöge (d) von Nro. 17, da hier nur die erste Potenz von $\delta' \nu$ beibehalten wird,

$$\left.\begin{aligned} \nu'_m &= \nu_m + \delta' \nu_m = \nu_m + \alpha_m \, \delta' \nu \\ n'_m &= \frac{\nu'_m}{\nu'_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (s)$$

wodurch die Brechungsverhältnisse des zweiten Strahles bei allen brechenden Flächen berechnet werden können.

Ferner giebt die Bedingung, dass die letzte Vereinigungsweite beider Strahlen dieselbe seyn soll,

$$g'_i = g_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (t)$$

Geht man von diesem bekannten Werthe von g'_i aus, so lassen sich vermittelst desselben alle vorhergehende Vereinigungsweiten bis zu c'_1 nach der in Nro. 4 angegebenen Methode berechnen. Da nun $\delta' \frac{1}{g_i} = 0$ angenommen worden ist, so müssen bei den übrigen mit der Charakteristik δ' bezeichneten Veränderungen die in (p) erwähnten Verwechselungen vorgenommen werden. Diess giebt, wenn wir in den obigen Formeln $\delta \nu$ mit $\delta' \nu$ vertauschen und bemerken, dass $\delta (Y)''_1$ den Factor $\delta \nu$ enthält,

$$\delta' \frac{1}{c_1} + D \frac{1}{c_1} = S_i \, \delta' \nu$$

$$\delta' K_1 + D K_1 = \left[\frac{\delta (Y)''_1}{\varphi_1 \, \delta \nu} - K_1^2 \, S_i \right] \delta' \nu$$

folglich

$$\frac{1}{c'_1} = \frac{1}{c_1} + \delta' \frac{1}{c_1} + D \frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_1} + S_i \, \delta' \nu$$

$$K'_1 = K_1 + \delta' K_1 + D K_1 = K_1 + \left[\frac{\delta (Y)''_1}{\varphi_1 \, \delta \nu} - K_1^2 \, S_i \right] \delta' \nu$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{\delta' \nu} \left(\frac{1}{c'_1} - \frac{1}{c_1} \right) \\ K'_1 &= K_1 + \frac{\delta (Y)''_1 \, \delta' \nu}{\varphi_1 \, \delta \nu} - K_1^2 \left(\frac{1}{c'_1} - \frac{1}{c_1} \right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (u)$$

Sobald daher, wie es in der Folge geschehen wird, $\delta (Y)''_1$ bestimmt ist, können wir aus den vorhergehenden Werthen der

Brechungsverhältnisse, der Vereinigungsweiten und der Grösse K_1' nach den in Nro. 4 und 8 gegebenen Formeln P_1' berechnen. Es ist aber

$$P_1' = P_1 + \delta' P_1$$

unter der Voraussetzung, dass in $\delta' P_1$ die angegebenen Verwechselungen vorgenommen werden, folglich

$$\delta' P_1 = P_1' - P_1$$

Da nur die erste Potenz von $\delta' v$ beibehalten wird, so ist

$$\frac{\delta P_1}{\delta v} = \frac{\delta' P_1}{\delta' v}$$

folglich

$$\frac{\delta P_1}{\delta v} = \frac{1}{\delta' v}(P_1' - P_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

Durch Substitution der in (u) und (v) gefundenen Werthe von S_1 und $\frac{\delta P_1}{\delta v}$ verwandelt sich der Ausdruck (r) in den folgenden

$$W_1 = \frac{1}{\delta' v}\left\{\left[\frac{\Delta (Y)_1''}{\varphi_1^3} + 2K_1 P_1\right]\left(\frac{1}{c_1'} - \frac{1}{c_1}\right) + P_1' - P_1\right\} \quad (w)$$

Diese Formeln enthalten nunmehr Alles, was zur numerischen Berechnung des Ausdrucks (p) von Nro. 20 erforderlich ist, vorausgesetzt, dass die mit dem Index 1 versehenen Constanten noch bestimmt werden.

Viertes Kapitel.

Gleichungen der gebrochenen und einfallenden Strahlen, mit Rücksicht auf die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung und einige dabei eintretende Nebenumstände.

In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir uns damit beschäftigt, die verschiedenen Glieder zu entwickeln, welche in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen vorkommen. Es bleibt nun noch übrig, die hierdurch erhaltenen Resultate, welche wegen der Weitläuftigkeit der Rechnung nur zerstreut gefunden werden konnten, zu sammeln, um jene Gleichungen zu erhalten. Da jedoch in denselben mehrere, bis jetzt unbestimmte Grössen vorkommen, welche theils wegen der Absonderung der von verschiedenen Argumenten abhängenden Glieder willkührlich angenommen, theils durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführt wurden, so ist es vorher nöthig, jene Grössen für die in der Ausübung gewöhnlich eintretenden Fälle zu bestimmen. Ausserdem erleiden die Gleichungen durch manche Nebenumstände Modificationen, welche ebenfalls angegeben werden müssen, um die Formeln bei den folgenden Anwendungen mit Leichtigkeit gebrauchen zu können. Diese Gegenstände machen den Inhalt des gegenwärtigen Kapitels aus.

Blendungen, Bestimmung der davon abhängenden Grössen.

22) Bei den bisherigen Untersuchungen ist die Lage der einfallenden Strahlen durch die Coordinaten ihrer Einfallspunkte auf der ersten brechenden Fläche bestimmt worden. Da aber viele von diesen Strahlen nicht durch das Instrument gehen, sondern durch die darin angebrachten Blendungen aufgehalten werden, so ist es erforderlich, statt jener Coordinaten andere einzuführen, welche die Lage der Strahlen so bestimmen, dass diejenigen leicht ausgeschlossen werden können, die wegen der Blendungen nicht zur Wirksamkeit kommen.

Um zu diesem Zwecke zu gelangen, nehme ich an, dass sich hinter der j^{ten} brechenden Fläche, in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene, eine Blendung befindet, deren Umfang die Grenze zwischen den wirksamen und unwirksamen Strahlen bildet. Diese Blendung nenne ich, zur Unterscheidung von anderen, etwa noch vorhandenen, die *Hauptblendung*. Wählt man

nun zur Bestimmung der Lage der Strahlen die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit der Ebene der Hauptblendung, so können die unwirksamen unter ihnen ausgeschlossen werden, wenn man jene Durchschnittspunkte bei allen Strahlen so annimmt, dass sie innerhalb der Oeffnung der Hauptblendung liegen.

Die Annahme einer, die Lage der einfallenden Strahlen bestimmenden Blendung begreift übrigens sämmtliche, bei den Instrumenten vorkommende Einrichtungen in sich, wenn auch keine eigentliche Blendungen an denselben angebracht sind. Finden nämlich alle, auf die erste brechende Fläche fallende Strahlen ungehinderten Durchgang durch das Instrument, wie es bei den meisten Fernröhren der Fall ist, bei welchen ein oder mehrere Bilder zu Stande kommen, so muss die Fassung des Objectivs als Hauptblendung angenommen werden. Hat aber das Instrument eine so grosse Oeffnung, dass die durch dasselbe gehenden Strahlen nicht alle durch die Pupille des hinter ihm befindlichen Auges gelassen werden, wie es bei dem Galileischen Fernrohre und den Loupen der Fall ist, so vertritt die Pupille die Stelle der Hauptblendung.

Ausser der Hauptblendung kommen bei den optischen Werkzeugen häufig noch andere Blendungen vor, von welchen aber hier keine Rede ist, da ihre Oeffnungen nach der Grösse des Gesichtsfeldes und der Oeffnung der Hauptblendung bestimmt werden, so dass sie den durch die letztere gehenden Strahlen kein Hinderniss in den Weg legen, mithin auch keinen Einfluss auf ihre Lage haben.

Es seyen nun

ζ_j die Entfernung der Hauptblendung von der j^{ten} brechenden Fläche, *hinter* derselben angenommen,

v_j und ξ_j die rechtwinkeligen Coordinaten des Durchschnittspunktes des allgemeinen farbigen Strahles mit der Ebene der Hauptblendung, parallel mit den Axen der y und x.

Da dieser Durchschnittspunkt dem durch die j^{te} Fläche gebrochenen Strahle angehört, so muss in den Gleichungen desselben gesetzt werden:

$$z_j = -\zeta_j$$
$$y_j = v_j$$
$$x_j = \xi_j$$

Bedienen wir uns daher der Gleichungen (a) von Nro. 6 und (c) von Nro. 15, weil die Hauptblendung im Allgemeinen nicht in der Nähe des dazu gehörigen Bildes angenommen werden kann, so erhalten wir daraus

$$v_j = -\zeta_j\left(\frac{f}{g}\right)_j + \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j Y_j$$
$$+ \zeta_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_j + \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_j$$
$$+ \zeta_j\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_j + \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j \delta Y_j$$

$$\xi_i = \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j X_j$$
$$+ \zeta_j \left(X\Delta \frac{1}{g}\right)_j + \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_j$$
$$+ \zeta_j \left(X\delta \frac{1}{g}\right)_j + \left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_j \delta X_j$$

Die Coordinaten v und ξ werden als unabhängige veränderliche Grössen betrachtet, so dass sie keinen mit Δ und δ bezeichneten Veränderungen unterworfen sind. Multiplicirt man daher die vorhergehenden Ausdrücke mit $\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j$, so giebt die abgesonderte Vergleichung der Grössen der ersten Ordnung und derjenigen, welche den Ordnungen Δ und δ zugehören, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j v_j = Y_j - \left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \left(\frac{f}{g}\right)_i \\
&0 = \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_j + \left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \left(Y\Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_j \\
&0 = \delta Y_j + \left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \left(Y\delta \frac{1}{g} - \delta \frac{f}{g}\right)_j \\
&\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = X_j \\
&0 = \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_j + \left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \left(X\Delta \frac{1}{g}\right)_j \\
&0 = \delta X_j + \left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \left(X\delta \frac{1}{g}\right)_j
\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Die drei letzten dieser Gleichungen entstehen aus den drei ersten, wenn darin v und Y mit ξ und X verwechselt und $\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ gesetzt werden.

Substituirt man in der ersten derselben statt Y_j und $\left(\frac{f}{g}\right)_j$ ihre Werthe aus Nro. 4:

$$Y_j = \frac{1}{V_j} (\acute{Y}_1 + K_j \varphi_1)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)_j = \frac{V_j}{v_j} \varphi_1$$

so wird jene Gleichung

$$\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j v_j = \frac{\acute{Y}_1}{V_j} + \frac{V_j \varphi_1}{v_j} \left[\frac{v K}{V^2} - \frac{g\zeta}{g+\zeta}\right]_j$$

K_j enthält die willkührliche Constante K_1, welche in Nro. 4 eingeführt wurde, um in dem Ausdrucke von Y_1 das von φ_1 abhängende Glied abzusondern. Hiernach ist der durch $\acute{Y}_1$ bezeichnete Theil von Y_1 unabhängig von φ_1, und da durch einen und denselben Punkt in der Ebene der Blendung Lichtstrahlen von allen Punkten des durch das Instrument betrachteten Gegenstandes gehen, die Lage der letzteren Punkte aber durch φ_1 bestimmt wird, so muss v_j eben-

falls unabhängig von φ_1 seyn. Die bis jetzt noch unbestimmte Constante K_1 muss daher so bestimmt werden, dass der inclavirte Factor von φ_1 in der vorhergehenden Gleichung $= 0$ wird, wodurch dieselbe in die beiden folgenden zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\nu K}{V^2} - \frac{g\zeta}{g+\zeta}\right]_j \\ \left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j v_j &= \frac{Y'_1}{V_j} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Ebenso erhält man aus der vierten Gleichung (a)

$$\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = \frac{X_1}{V_j} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Wird die Stellung der Hauptblendung als bekannt angenommen, so sind die Coordinaten ζ_j, v_j, ξ_j gegebene Grössen. Ferner ist aus (q) von Nro. 4

$$K_j - K_1 = \Sigma_{2\,m}^{j} K^{(m)} = - \Sigma_{2\,m}^{j} \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\nu_{m-1}}$$

wonach $(K_j - K_1)$ als eine bekannte Grösse betrachtet werden kann. Die Gleichungen (b) und (c) enthalten daher in diesem Falle nur noch die unbekannten Grössen K_1, Y'_1 und X_1, zu deren Bestimmung sie hinreichen. Sie geben

$$\left.\begin{aligned} K_j &= \frac{V_j^2}{\nu_j}\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \\ K_1 &= K_j - (K_j - K_1) = -(K_j - K_1) + \frac{V_j^2}{\nu_j}\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \\ Y'_1 &= \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j \\ X_1 &= \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j \end{aligned}\right\} (d)$$

Ist dagegen die Stellung der Hauptblendung willkührlich, so müssen K_1, Y'_1 und X_1 durch andere Rücksichten bestimmt werden, die Gleichungen (b) und (c) dienen alsdann zur Bestimmung von ζ_j, v_j und ξ_j, und es folgt daraus, da K_1, Y'_1 und X_1 nunmehr bekannt sind:

$$\left.\begin{aligned} K_j &= K_1 - \Sigma_{2\,m}^{j} \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{\nu_{m-1}} \\ \frac{1}{\zeta_j} &= \frac{V_j^2}{\nu_j K_j} - \frac{1}{g_j} \\ v_j &= \left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_j Y'_1 \\ \xi_j &= \left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_j X_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (e)$$

Die vorhergehenden Formeln enthalten mehrere Grössen, welche sich auf die, der Blendung unmittelbar vorhergehende brechende Fläche beziehen; es ist jedoch bisweilen bequemer, statt derselben

die correspondirenden Grössen in Bezug auf die folgende brechende Fläche zu gebrauchen. Nennt man

ζ'_{j+1} die Entfernung der Hauptblendung von der $(j+1)^{\text{ten}}$ brechenden Fläche, *vor* derselben angenommen, so ist

$$\zeta_j = d_j - \zeta'_{j+1}$$

Aus Nro. 4 erhält man ferner

$$g_j + d_j = c_{j+1}$$

$$V_j = \frac{V_{j+1}\, c_{j+1}}{g_j}$$

$$K_j = K_{j+1} - K^{(j+1)} = K_{j+1} + \frac{V_j^2\, g_j\, d_j}{v_j\, c_{j+1}}$$

mithin

$$(g+\zeta)_j = (g+d)_j - \zeta'_{j+1} = (c-\zeta')_{j+1}$$

$$\left(\frac{g}{g+\zeta}\right)_j = \frac{g_j}{c_{j+1}} \left(\frac{c}{c-\zeta'}\right)_{j+1}$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Formeln (b) und (c) in folgende:

$$0 = \frac{v_j\, K_{j+1}}{V_{j+1}^2} + \left(\frac{c\,\zeta'}{c-\zeta'}\right)_{j+1}$$

$$\left(\frac{c}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j = \frac{Y'_1}{V_{j+1}}$$

$$\left(\frac{c}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j = \frac{X_1}{V_{j+1}}$$

Sie entstehen aus den ersteren, wenn darin K_j, V_j, g_j, ζ_j mit K_{j+1}, V_{j+1}, c_{j+1}, $-\zeta'_{j+1}$ verwechselt werden. Durch diese Verwechselungen geben daher die Ausdrücke (d) die folgenden, bei welchen angenommen ist, dass sich die Hauptblendung *vor* der $(j+1)^{\text{ten}}$ brechenden Fläche, und zwar in der Entfernung ζ'_{j+1} von derselben befindet:

$$\left.\begin{aligned}
K_{j+1} &= -\frac{V_{j+1}^2}{v_j}\left(\frac{c\,\zeta'}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \\
K_1 &= -(K_{j+1} - K_1) - \frac{V_{j+1}^2}{v_j}\left(\frac{c\,\zeta'}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \\
Y'_1 &= \left(\frac{V c}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j \\
X_1 &= \left(\frac{V c}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

Ebenso erhalten wir aus (e) für den Fall, dass K_1, Y'_1 und X_1 als bekannt vorausgesetzt werden, die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
K_{j+1} &= K_1 - \Sigma_{2\;m}^{j+1} \frac{V_{m-1}\, V_m\, d_{m-1}}{v_{m-1}} \\
\frac{1}{\zeta'_{j+1}} &= \frac{1}{c_{j+1}} - \frac{V_{j+1}^2}{v_j\, K_{j+1}} \\
v_j &= \left(\frac{c-\zeta'}{V c}\right)_{j+1} Y'_1 \\
\xi_j &= \left(\frac{c-\zeta'}{V c}\right)_{j+1} X_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

Obgleich durch die vorhergehenden Ausdrücke K_1, $\acute{Y}_1$ und X_1 bestimmt worden sind, so werde ich doch diese Grössen der Einfachheit wegen in den allgemeinen Formeln beibehalten.

23) Gehen wir jetzt zu der zweiten Gleichung (a) von Nro. 22 über. Sie wird, wenn wir darin statt $\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j$ seinen Werth

$$\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j = \left(\frac{\nu K}{V^2}\right)_j$$

aus der ersten Gleichung (b) derselben Nummer substituiren,

$$0 = \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_j + \left(\frac{\nu K}{V^2}\right)_j \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_j \text{(a)}$$

Die Formeln (g) von Nro. 8 und (g) von Nro. 10 geben aber durch Verwechselung von i mit j

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_j = \frac{1}{V_j}\left\{\begin{aligned} &\Delta(Y)_1 \\ &- K_j\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\varphi_1\right] \\ &+ L''_j\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &+ M''_j\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &+ q'_j\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ &+ O''_j\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 + P''_j\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right.$$

$$\left(\frac{\nu K}{V^2}\right)_j\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_j = \frac{1}{V_j}\left\{\begin{aligned} &K_j\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\,\varphi_1\right] \\ &- K_j\,L_j\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &- K_j\,M_j\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &- K_j\,O_j\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 - K_j\,P_j\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right.$$

Da vermöge (a) die Summe dieser beiden Grössen $= 0$ ist, so erhalten wir daraus

$$\left.\begin{aligned} \Delta(Y)_1 = {} & (KL - L'')_j\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ & + (KM - M'')_j\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ & - q'_j\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ & + (KO - O'')_j\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 \\ & + (KP - P'')_j\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

In mehreren der vorhergehenden Formeln kommt derjenige Theil von $\Delta(Y)_1$ vor, welcher von φ_1 allein abhängt und mit $\Delta(Y)''_1$ bezeichnet wurde. Hiernach ist

$$\Delta(Y)''_1 = (KP - P'')_j\,\varphi_1^3$$

Substituiren wir darin statt $(\mathrm{K}P - P'')_j$ seinen Werth

$$(\mathrm{K}P - P'')_j = w_j$$

aus (l) von Nro. 20, so wird

$$\Delta (Y)''_1 = (\mathrm{K}P - P'')_j \, \varphi_1^3 = w_j \, \varphi_1^3 \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Behandelt man auf dieselbe Weise die fünfte Gleichung (a) von Nro. 22, so wird sie zuerst

$$0 = \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_j + \left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j X_j \, \Delta \frac{1}{g_j} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Sodann geben die Formeln (q) von Nro. 4, (h) von Nro. 7 und (g) von Nro. 10

$$\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_j = \frac{1}{V_j} \left\{ \begin{array}{l} \Delta (X)_1 - \mathrm{K}_j \, X_1 \, \Delta \frac{1}{c_1} \\ + L''_j \, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \, X_1 \\ + M''_j \, X_1 \, \acute{Y}_1 \, \varphi_1 + N''_j \, X_1 \, \varphi_1^2 \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j X_j \, \Delta \frac{1}{g_j} = \frac{1}{V_j} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{K}_j \, X_1 \, \Delta \frac{1}{c_1} - \mathrm{K}_j \, L_j \, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \, X_1 \\ - \mathrm{K}_j \, M_j \, X_1 \, \acute{Y}_1 \, \varphi_1 - \mathrm{K}_j \, N_j \, X_1 \, \varphi_1^2 \end{array} \right.$$

folglich, da die Summe dieser Ausdrücke vermöge (d) $= 0$ ist,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta (X)_1 = (\mathrm{K}L - L'')_j \, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2) \, X_1 \\ \qquad + (\mathrm{K}M - M'')_j \, X_1 \, \acute{Y}_1 \, \varphi_1 \\ \qquad + (\mathrm{K}N - N'')_j \, X_1 \, \varphi_1^2 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

24) Es bleibt nun noch übrig, die dritte und sechste Gleichung (a) von Nro. 22 zu betrachten. Substituiren wir darin, ebenso wie es bei der zweiten geschehen ist, statt $\left(\frac{g \zeta}{g + \zeta}\right)_j$ seinen Werth

$$\left(\frac{g \zeta}{g + \zeta}\right)_j = \left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j$$

so verwandeln sie sich in folgende:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = \delta Y_j + \left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j \left(Y \delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_j \\ 0 = \delta X_j + \left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j X_j \, \delta \frac{1}{g_j} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Aus (q) von Nro. 4, (h) von Nro. 17 und (c) von Nro. 18 erhalten wir aber

$$\delta Y_j = \frac{1}{V_j} \left\{ \begin{array}{l} \delta (Y)_1 - \mathrm{K}_j \left[(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1 \, \varphi_1) \, \delta \frac{1}{c_1} - \delta \varphi_1 \right] \\ + (S)_j \, \acute{Y}_1 \, \delta \nu + (T)_j \, \varphi_1 \, \delta \nu \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\nu \mathrm{K}}{V^2}\right)_j \left(Y \delta \frac{1}{g} - \delta \frac{f}{g}\right)_j = \frac{1}{V_j} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{K}_j \left[(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1 \, \varphi_1) \, \delta \frac{1}{c_1} - \delta \varphi_1 \right] \\ - \mathrm{K}_j \, S_j \, \acute{Y}_1 \, \delta \nu - \mathrm{K}_j \, T_j \, \varphi_1 \, \delta \nu \end{array} \right.$$

$$\delta X_j = \frac{1}{V_j} \left\{ \begin{array}{l} \delta (X)_1 - \mathrm{K}_j \, X_1 \, \delta \frac{1}{c_1} \\ + (S)_j \, X_1 \, \delta \nu \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\nu K}{V^2}\right)_j X_j \,\delta\frac{1}{g_j} = \frac{1}{V_j}\left\{K_j X_1 \,\delta\frac{1}{c_1} - K_j S_j X_1 \,\delta\nu\right\}$$

folglich, da vermöge (a) sowohl die Summe der beiden ersten dieser Ausdrücke, als auch die Summe der beiden letzten $= 0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \delta(Y)_1 &= [KS-(S)]_j \, \acute{Y}_1 \,\delta\nu + [KT-(T)]_j \,\varphi_1 \,\delta\nu \\ \delta(X)_1 &= [KS-(S)]_j \, X_1 \,\delta\nu \end{aligned}\right\}\text{(b)}$$

Vermittelst der in (q) und (s) von Nro. 17 gefundenen Werthe kann man diesen Formeln eine andere Gestalt geben. Es ist nämlich

$$[KS-(S)]_j = \left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j$$
$$[KT-(T)]_j = u_j$$

daher

$$\left.\begin{aligned} \delta(Y)_1 &= \left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j \acute{Y}_1 \,\delta\nu + u_j \,\varphi_1 \,\delta\nu \\ \delta(X)_1 &= \left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j X_1 \,\delta\nu \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; \text{(c)}$$

In mehreren der oben entwickelten Ausdrücken wurde $\delta(Y)_1$ in die beiden Theile $\delta(Y)'_1$ und $\delta(Y)''_1$ zerlegt und dabei angenommen, dass der letztere von φ_1 allein abhängig sey.

Hiernach folgt aus (b) und (c)

$$\left.\begin{aligned} \delta(Y)'_1 &= [KS-(S)]_j \, \acute{Y}_1 \,\delta\nu = \left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j \acute{Y}_1 \,\delta\nu \\ \delta(Y)''_1 &= [KT-(T)]_j \,\varphi_1 \,\delta\nu = u_j \,\varphi_1 \,\delta\nu \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

25) Wir können jetzt die in den beiden vorhergehenden Nummern gefundenen Werthe in den früher erhaltenen Formeln substituiren.

Durch die in (b) und (e) von Nro. 23 gegebenen Werthe verwandeln sich zuerst die Formeln (e) und (g) von Nro. 10 in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \Delta Y_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned} &- K_i \left[(\acute{Y}_1 + K_1 \varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ &+ [L'_i + (KL - L'')_j]\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ &+ [M'_i + (KM - M'')_j]\left(\frac{X_1^2 + 3\,\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &+ [q_i - q'_i]\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ &+ [O'_i + (KO - O'')_j]\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 \\ &+ [P'_i + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right. \\ \Delta X_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned} &- K_i X_1 \,\Delta\frac{1}{c_1} \\ &+ [L'_i + (KL - L'')_j]\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,X_1 \\ &+ [M'_i + (KM - M'')_j]\,X_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\ &+ [N'_i + (KN - N'')_j]\,X_1\,\varphi_1^2 \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\}\text{(a)}$$

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} -K_i\left[(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ +[L_i'' + (KL - L'')_j](X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1 \\ +[M_i'' + (KM - M'')_j]\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ +[q_i' - q_j'](X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\varphi_1 \\ +[O_i'' + (KO - O'')_j]\acute{Y}_1\varphi_1^2 \\ +[P_i'' + (KP - P'')_j]\varphi_1^3 \end{array}\right.$$

$$\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} -K_i X_1\Delta\frac{1}{c_1} \\ +[L_i'' + (KL - L'')_j](X_1^2 + \acute{Y}_1^2)X_1 \\ +[M_i'' + (KM - M'')_j]X_1\acute{Y}_1\varphi_1 \\ +[N_i'' + (KN - N'')_j]X_1\varphi_1^2 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Sodann erhalten wir aus (c) von Nro. 18 durch Substitution der in (b) von Nro. 24 gegebenen Werthe:

$$\delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} -K_i[(\acute{Y}_1 + K_1\varphi_1)\delta\frac{1}{c_1} - \delta\varphi_1] \\ +[(S)_i + (KS - (S))_j]\acute{Y}_1\delta v \\ +[(T)_i + (KT - (T))_j]\varphi_1\delta v \end{array}\right.$$

$$\delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} -K_i X_1\delta\frac{1}{c_1} \\ +[(S)_i + KS - (S))_j]X_1\delta v \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Substituiren wir ferner in den Ausdrücken (k) und (l) von Nro. 18 statt $\delta(Y)_1''$ seinen Werth aus (d) von Nro. 24, so werden dieselben

$$\left.\begin{array}{l} t_i = u_j S_i + \Sigma_m^i [T^{(m)}\gamma_m + K^{(m)}T_{m-1}(S_i - S_{m-1})] \\ \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i'' + \delta\acute{Y}_i\,\delta\frac{1}{g_i} = \\ = \frac{V_i}{v_i}\left\{K_1\varphi_1\delta^2\frac{1}{c_1} - \delta^2\varphi_1 + u_j\varphi_1\delta v\,\delta\frac{1}{c_1} - t_i\varphi_1\delta v^2\right\} \end{array}\right\} . \quad (c)$$

Endlich geben die Formeln (o), (p) und (r) von Nro. 20, wenn man darin die in (c) von Nro. 23 und (d) von Nro. 24 gefundenen Werthe substituirt,

$$\left.\begin{array}{l} \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i'' + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i''\delta\frac{1}{g_i} = \\ = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} \delta\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)'' \\ -\left(K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)''\frac{\delta\varphi_1}{\varphi_1} \\ + w_j\varphi_1^2\delta\frac{1}{c_1} - W_i\varphi_1^3\delta v \end{array}\right. \end{array}\right\} . \quad (d)$$

$$W_i = -S_i[w_i - w_j] + \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

$$+\sum_m^i \left\{\begin{array}{l} O^{(m)}[(T)_m + (KT-(T))_j] \\ +(O^{(m)}K_m - 2P^{(m)})\left[(S)_m + \frac{\alpha_m}{v_m}\right] \\ +[P]^{(m)} S_{m-1} \\ -[P']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{array}\right.$$

$$= w_j S_i + \sum_m^i \left\{\begin{array}{l} -O^{(m)}(u_m - u_j) + 2P^{(m)}T_m \\ -w^{(m)}(S_i - S_m) + [P'']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{array}\right.$$

$$= w_j S_i + \sum_m^i \left\{\begin{array}{l} -O^{(m)}(u_{m-1} - u_j) + 2P^{(m)}T_{m-1} \\ -w^{(m)}(S_i - S_{m-1}) + [P''']^{(m)}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \end{array}\right\} \quad . \quad (d)$$

In Nro. 21 wurde eine zweite Methode angeführt, die Grösse W_i numerisch zu berechnen. Substituiren wir in den dortigen Ausdrücken (u) und (w), statt $\Delta(Y)_1''$ und $\delta(Y)_1''$, ihre Werthe aus (c) von Nro. 23 und (d) von Nro. 24, so werden dieselben

$$\left.\begin{array}{l} K_1' = K_1 + u_j\,\delta'v - K_1'^2\left(\frac{1}{c_1'} - \frac{1}{c_1}\right) \\ W_i = \frac{1}{\delta'v}\left\{[w_j + 2K_1 P_i]\left(\frac{1}{c_1'} - \frac{1}{c_1}\right) + P_i' - P_i\right\} \end{array}\right\} \quad . \quad (e)$$

Der hierdurch erhaltene Werth von K_1' muss zur Berechnung von P_i' nach der in der allegirten Nummer angegebenen Methode gebraucht werden, worauf der durch die letzte Formel gefundene Werth von W_i an die Stelle der mit (d) bezeichneten gesetzt werden kann.

Bestimmung der durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführten Constanten.

26) Die mit dem Index 1 und den Charakteristiken Δ und δ versehenen willkührlichen Constanten, welche durch die Integration der endlichen Differenzengleichungen eingeführt wurden, haben wir in den vorhergehenden Formeln beibehalten, um diese auf die Verbindung mehrerer Systeme von brechenden Flächen anwenden zu können, in welchem Falle die Constanten bei jedem derselben durch die Abweichungen des vorhergehenden gegeben sind. Damit jedoch die ohnehin schon weitläuftigen Formeln nicht durch unnöthige Glieder noch complicirter werden, ist es zweckmässig, jene Constanten schon jetzt für die in der Ausübung vorkommenden Fälle zu bestimmen.

Ich betrachte zuerst ein einziges Instrument und setze voraus, dass dasselbe für einen in der unveränderlichen Entfernung c_1 befindlichen Gegenstand eingerichtet ist, welchen ich als eine auf der Axe der z senkrecht stehende Ebene annehme. In dieser Ebene liegen daher alle leuchtende Punkte, von denen Lichtstrahlen in das Instrument fallen.

Bei der Entwickelung der vorhergehenden Formeln wurden statt der rechtwinkeligen Coordinaten $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$, durch welche im Anfange die Lage des leuchtenden Punktes bestimmt war, die Grössen

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_1} = \frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1}{c_1} + \Delta^2\frac{1}{c_1} + \delta\frac{1}{c_1} + \delta^2\frac{1}{c_1} + \delta\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1} = \varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \Delta^2\varphi_1 + \delta\varphi_1 + \delta^2\varphi_1 + \delta\Delta\varphi_1$$

eingeführt, welche die Stelle jener Coordinaten vertreten. Hierbei bezeichnen die mit den Charakteristiken Δ und δ versehenen Grössen im Allgemeinen Veränderungen in der Lage des leuchtenden Punktes, welche entweder willkührlich angenommen oder durch vorhergehende Brechungen hervorgebracht worden sind.

Soll daher der leuchtende Punkt dem in der unveränderlichen Entfernung c_1 befindlichen Gegenstande angehören, so sind alle jene Veränderungen $= 0$, und die Lage des leuchtenden Punktes wird durch die Coordinaten

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_1} = \frac{1}{c_1}$$

$$\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1} = \varphi_1$$

bestimmt.

Hiernach erhält man aus den oben gefundenen Ausdrücken die folgenden, welchen ich zur leichteren Vergleichung die Nummern, in denen sie entwickelt wurden, und die den Formeln daselbst beigesetzten Buchstaben hinzufüge:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i}{v_i}\,\varphi_1 \\ Y_i &= \frac{1}{V_i}\,[Y'_1 + K_i\,\varphi_1] \\ X_i &= \frac{X_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{Nro. 4 (m), (q)}$$

$$\Delta\frac{1}{g_i} = -\frac{V_i^2}{v_i}\,[L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2) + M_i\,Y'_1\,\varphi_1 + N_i\,\varphi_1^2] \quad \ldots \quad \text{Nro. 7 (h)}$$

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = -\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned} &L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,Y'_1 \\ &+ M_i\left(\frac{X_1^2 + 3\,Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &+ O_i\,Y'_1\,\varphi_1^2 + P_i\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{Nro. 8 (g)}$$

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y - f}{g}\right) Z\right]_i =$$

$$= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned} &[L''_i + (KL - L'')_j]\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,Y'_1 \\ &+ [M''_i + (KM - M'')_j]\left(\frac{X_1^2 + 3\,Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &+ [q'_i - q'_j]\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,\varphi_1 \\ &+ [O''_i + (KO - O'')_j]\,Y'_1\,\varphi_1^2 \\ &+ [P''_i + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{Nro. 25 (a)}$$

$$\left[\Delta \mathrm{X} + \frac{\mathrm{XZ}}{g}\right]_i =$$

$$= \frac{1}{V_i} \left\{ \begin{array}{l} [L_i'' + (\mathrm{K}L - L'')_j](\mathrm{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\mathrm{X}_1 \\ + [M_i'' + (\mathrm{K}M - M'')_j]\,\mathrm{X}_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\ + [N_i'' + (\mathrm{K}N - N'')_j]\,\mathrm{X}_1\,\varphi_1^2 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad \text{Nro. 25 (a)}$$

$$\Delta^2 \frac{1}{g_i} = -\frac{V_i^2}{v_i} Q_i\,[\mathrm{X}_1^2 + (\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\varphi_1)^2]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Nro. 13 (q)}$$

$$\left(Y\Delta^2 \frac{1}{g} - \Delta^2 \frac{f}{g}\right)_i = -\frac{V_i}{v_i} Q_i\,(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\varphi_1)\,[\mathrm{X}_1^2 + (\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\varphi_1)^2]^2 \quad \text{No. 14 (e)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta \dfrac{1}{g_i} = -\dfrac{V_i^2}{v_i} S_i\,\delta v \\ \left(Y\delta \dfrac{1}{g} - \delta \dfrac{f}{g}\right)_i = -\dfrac{V_i}{v_i}\,[S_i\,\acute{Y}_1\,\delta v + T_i\,\varphi_1\,\delta v] \end{array} \right\} \quad \text{Nro. 17 (h)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta Y_i = \dfrac{1}{V_i} \left\{ \begin{array}{l} [(S)_i + (\mathrm{K}S - (S))]\,\acute{Y}_1\,\delta v \\ + [(T)_i + (\mathrm{K}S - (T))_j]\,\varphi_1\,\delta v \end{array} \right. \\ \delta \mathrm{X}_i = \dfrac{1}{V_i}\,[(S)_i + (\mathrm{K}S - (S))_j]\,\mathrm{X}_1\,\delta v \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Nro. 25 (b)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta^2 \dfrac{1}{g_i} = -\dfrac{V_i^2}{v_i} s_i\,\delta v^2 \\ \left(Y\delta^2 \dfrac{1}{g} - \delta^2 \dfrac{f}{g}\right)_i' = -\dfrac{V_i}{v_i} s_i\,\acute{Y}_1\,\delta v^2 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Nro. 17 (n)}$$

$$\left(Y\delta^2 \frac{1}{g} - \delta^2 \frac{f}{g}\right)_i'' + \delta \acute{Y}_i\,\delta \frac{1}{g_i} = -\frac{V_i}{v_i} t_i\,\varphi_1\,\delta v^2 \quad . \quad . \quad \text{Nro. 25 (c)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta \acute{Y}_i\,\delta \dfrac{1}{g_i} = 0 \\ \delta \mathrm{X}_i\,\delta \dfrac{1}{g_i} = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Nro. 18 (m)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta\left(Y\Delta \dfrac{1}{g} - \Delta \dfrac{f}{g}\right)_i' = \\ = -\dfrac{V_i}{v_i} U_i \left\{(\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\varphi_1)[\mathrm{X}_1^2 + (\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\varphi_1)^2] - \mathrm{K}_1^3\,\varphi_1^3\right\} \delta v \\ \delta\left(\mathrm{X}\Delta \dfrac{1}{g}\right)_i = -\dfrac{V_i}{v_i} U_i\,\mathrm{X}_1\,[\mathrm{X}_1^2 + (\acute{Y}_1 + \mathrm{K}_1\,\varphi_1)^2]\,\delta v \end{array} \right\} \quad \text{Nro. 19 (h)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta\left(Y\Delta \dfrac{1}{g} - \Delta \dfrac{f}{g}\right)_i'' + \left[\Delta Y + \left(\dfrac{Y - f}{g}\right) \mathrm{Z}\right]_i'' \delta \dfrac{1}{g_i} = \\ \quad = -\dfrac{V_i}{v_i} W_i\,\varphi_1^3\,\delta v \end{array} \right\} \quad . \quad \text{Nro. 25 (d)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[\Delta Y + \left(\dfrac{Y - f}{g}\right) \mathrm{Z}\right]_i' \delta \dfrac{1}{g_i} = 0 \\ \left[\Delta \mathrm{X} + \dfrac{\mathrm{XZ}}{g}\right]_i \delta \dfrac{1}{g_i} = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Nro. 19}$$

Die Ausdrücke (a) von Nro. 6 und (c) von Nro. 15 geben für einen beliebigen Werth von z_i die folgenden Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles unter der Voraussetzung, dass blos die Grössen der zweiten Ordnung beibehalten werden:

$$\left.\begin{array}{l}
y_i = -z_i \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ + \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\ + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \left\{Y_i + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i + \delta Y_i\right\} \end{array}\right. \\
x_i = -z_i \left\{\begin{array}{l} X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} + X_i\, \delta\frac{1}{g_i} \\ + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \left\{X_i + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i + \delta X_i\right\} \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus (c) von Nro. 5 und (d) von Nro. 15 die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles, wenn seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet wird. Trennt man darin, sowie es bei den vorhergehenden Entwickelungen geschehen ist, diejenigen Glieder der dritten Ordnung, welche sich auf die Farbenzerstreuung beziehen, und entweder X_1 und Y'_1 oder φ_1 allein enthalten, so sind jene Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}
y_i = -z_i \left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\ + \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)'_i \\ + \delta Y'_i\, \delta\frac{1}{g_i} + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i \\ + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]'_i \delta\frac{1}{g_i} \\ + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)''_i + \delta Y''_i\, \delta\frac{1}{g_i} \\ + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)''_i + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]''_i \delta\frac{1}{g_i} \\ + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_i \end{array}\right. \\
x_i = -z_i \left\{\begin{array}{l} X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} + X_i\, \Delta^2\frac{1}{g_i} \\ + X_i\, \delta\frac{1}{g_i} + X_i\, \delta^2\frac{1}{g_i} + \delta X_i\, \delta\frac{1}{g_i} \\ + \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \delta\frac{1}{g_i} \\ + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_i \end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

Substituiren wir jetzt in den Gleichungen (a) und (b) die vorhergehenden Werthe, so erhalten wir

I. die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles für einen beliebigen Werth von z_i *und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten und höheren Ordnungen*

$$
\left.
\begin{array}{l}
y_i = \dfrac{V_i z_i}{v_i} \left\{
\begin{array}{l}
\varphi_1 + L_i (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, \acute{Y}_1 + M_i \left(\dfrac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right) \varphi_1 \\
+ O_i\, \acute{Y}_1\, \varphi_1^2 + P_i\, \varphi_1^3 + S_i\, \acute{Y}_1\, \delta v + T_i\, \varphi_1\, \delta v \\
- \dfrac{v_i}{V_i^2} \left(\dfrac{z-g}{g z}\right)_i \left\{
\begin{array}{l}
\acute{Y}_1 + K_i\, \varphi_1 \\
+ [L_i'' + (K L - L'')_j]\, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, \acute{Y}_1 \\
+ [M_i'' + (K M - M'')_j] \left(\dfrac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right) \varphi_1 \\
+ [q_i' - q_j']\, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, \varphi_1 \\
+ [O_i'' + (K O - O'')_j]\, \acute{Y}_1\, \varphi_1^2 \\
+ [P_i'' + (K P - P'')_j]\, \varphi_1^3 \\
+ [(S)_i + (K S - (S))_j]\, \acute{Y}_1\, \delta v \\
+ [(T)_i + (K T - (T))_j]\, \varphi_1\, \delta v
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\[2ex]
x_i = \dfrac{V_i z_i}{v_i} \left\{
\begin{array}{l}
L_i (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, X_1 + M_i\, X_1\, \acute{Y}_1\, \varphi_1 \\
+ N_i\, X_1\, \varphi_1^2 + S_i\, X_1\, \delta v \\
- \dfrac{v_i}{V_i^2} \left(\dfrac{z-g}{g z}\right)_i \left\{
\begin{array}{l}
X_1 + [L_i'' + (K L - L'')_j]\, (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, X_1 \\
+ [M_i'' + (K M - M'')_j]\, X_1\, \acute{Y}_1\, \varphi_1 \\
+ [N_i'' + (K N - N'')_j]\, X_1\, \varphi_1^2 \\
+ [(S)_i + (K S - (S))_j]\, X_1\, \delta v
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}
\right\} \text{(c)}
$$

II. die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles, wenn seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet wird,

$$
\left.
\begin{array}{l}
y_i = \dfrac{V_i z_i}{v_i} \left\{
\begin{array}{l}
\varphi_1 + L_i (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, \acute{Y}_1 + M_i \left(\dfrac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right) \varphi_1 \\
+ O_i\, \acute{Y}_1\, \varphi_1^2 + P_i\, \varphi_1^3 \\
+ Q_i\, (\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)\, [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)^2]^2 \\
+ S_i\, \acute{Y}_1\, \delta v + s_i\, \acute{Y}_1\, \delta v^2 \\
+ U_i\, [(\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)(X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)^2) - K_1^3\, \varphi_1^3]\, \delta v \\
+ T_i\, \varphi_1\, \delta v + t_i\, \varphi_1\, \delta v^2 + W_i\, \varphi_1^3\, \delta v \\
- \dfrac{v_i}{V_i^2} \left(\dfrac{z-g}{g z}\right)_i \acute{Y}_1 - \dfrac{v_i K_i}{V_i^2} \left(\dfrac{z-g}{g z}\right)_i \varphi_1
\end{array}\right. \\[2ex]
x_i = \dfrac{V_i z_i}{v_i} \left\{
\begin{array}{l}
L_i (X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\, X_1 + M_i\, X_1\, \acute{Y}_1\, \varphi_1 \\
+ N_i\, X_1\, \varphi_1^2 + Q_i\, X_1\, [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)^2]^2 \\
+ S_i\, X_1\, \delta v + s_i\, X_1\, \delta v^2 \\
+ U_i\, X_1\, [X_1^2 + (\acute{Y}_1 + K_1\, \varphi_1)^2]\, \delta v \\
- \dfrac{v_i}{V_i^2} \left(\dfrac{z-g}{g z}\right)_i X_1
\end{array}\right.
\end{array}
\right\} \text{(d)}
$$

Die Formeln (q) und (r) von Nro. 4, (i) von Nro. 9, (d) von Nro. 18, (a) und (b) von Nro. 25 geben endlich

III. die Coordinaten des Einfallspunktes auf der i^{ten} brechenden Fläche und die Veränderungen derselben, welche durch die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung hervorgebracht werden,

$$\left.\begin{aligned}
Y_i &= \frac{1}{V_i}(\acute{Y}_1 + K_i\,\varphi_1) \\
X_i &= \frac{X_1}{V_i} \\
Z_i &= \frac{X_i^2 + Y_i^2}{2a_i} = \frac{X_1^2 + (\acute{Y} + K_i\,\varphi_1)^2}{2a_i\,V_i^2} \\
\Delta Y_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&[L_i' + (KL - L'')_j]\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\
&+ [M_i' + (KM - M'')_j]\left(\frac{X_1^2 + 3\,\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\
&+ [q_i - q_j']\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\
&+ [O_i' + (KO - O'')_j]\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 \\
&+ [P_i' + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3
\end{aligned}\right. \\
\Delta X_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&[L_i' + (KL - L'')_j]\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,X_1 \\
&+ [M_i' + (KM - M'')_j]\,X_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\
&+ [N_i' + (KN - N'')_j]\,X_1\,\varphi_1^2
\end{aligned}\right. \\
\Delta Z_i &= \frac{1}{2a_i}\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{2a}\right)^2 + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y\right]_i \\
\delta Y_i &= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&[(S)_i + (KS - (S))_j]\,\acute{Y}_1\,\delta\nu \\
&+ [(T)_i + (KT - (T))_j]\,\varphi_1\,\delta\nu
\end{aligned}\right. \\
\delta X_i &= \frac{1}{V_i}\,[(S)_i + (KS - (S))_j]\,X_1\,\delta\nu \\
\delta Z_i &= \frac{1}{a_i}\,[X\delta X + Y\delta Y]_i
\end{aligned}\right\}\quad . \quad (e)$$

Die Vergleichung der Formeln *I.* und *II.* zeigt übrigens, wie nothwendig es ist, sich bei den letzteren, welche am häufigsten ihre Anwendung finden, der oben gebrauchten Abkürzungen zu bedienen, indem dieselben, wenn man sie eben so vollständig, als die Formeln *I.* entwickeln wollte, so weitläuftig werden würden, dass ihr Gebrauch mit allzugrossen Beschwerden verbunden wäre.

Ist das Instrument mit einem achromatischen Objective versehen, und können diejenigen Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden, welche von den Ocularen herrühren, so giebt die dritte Formel (h) von Nro. 19

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i'' = -\frac{V_i}{\nu_i}\,U_i\,K_1^3\,\varphi_1^3\,\delta\nu$$

Oben wurde gefunden

$$\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_{i}=-\frac{V_i}{v_i}W_i\,\varphi_i^3\,\delta v$$

Wir können daher in diesem Falle W_i mit $U_i\ K_i^3$ verwechseln, wodurch die Rechnung vereinfacht wird.

Befindet sich vor der ersten und hinter der letzten brechenden Fläche einerlei durchsichtiges Mittel, so ist

$$v_i = 1$$
$$\delta v_i = 0$$

Man hat folglich in diesem Falle vermöge (d) von Nro. 17

$$v_i = 1$$
$$\alpha_i = 0$$
$$\beta_i = 0$$

Ebenso ist

$$v_j = 1$$
$$\alpha_j = 0$$

wenn sich die Hauptblendung in demselben durchsichtigen Mittel befindet.

Einfluss einer Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes.

27) Bei den Formeln der vorhergehenden Nummer ist die Entfernung des durch das Instrument betrachteten Gegenstandes als unveränderlich vorausgesetzt worden. Da jedoch die Fernröhre häufig bei sehr verschieden entfernten Gegenständen gebraucht werden, so ist es wichtig, den Einfluss zu bestimmen, welchen eine Veränderung in der bei der Berechnung des Instrumentes angenommenen Entfernung des Gegenstandes auf die Lage der gebrochenen Strahlen äussert.

In jener Nummer wurde die Lage des leuchtenden Punktes durch die Coordinaten

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_1}=\frac{1}{c_1}$$
$$\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1}=\varphi_1$$

bestimmt. Aendert sich nun die Entfernung des Gegenstandes, so kann man annehmen, dass sich dadurch $\frac{1}{\mathfrak{c}_1}$ in

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_1}=\frac{1}{c_1}+\Delta\frac{1}{c_1}$$

verwandelt, wobei $\Delta\frac{1}{c_1}$ eine Veränderung von $\frac{1}{c_1}$ bezeichnet, welche für alle Punkte des Gegenstandes und für alle von denselben ausgehende Strahlen einerlei, d. h. von φ_1, Y_1, X_1 und v unabhängig ist. Da die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 als unabhängige veränderliche Grössen betrachtet werden, so können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, die, $\Delta\frac{1}{c_1}$ entsprechende Veränderung von $\varphi_1 = 0$ setzen,

indem hierdurch weiter nichts bestimmt wird, als dass sich die Formeln bei den verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes stets auf denjenigen Punkt desselben beziehen, dessen scheinbare Entfernung von der Axe φ_1 zur Tangente hat, welches nicht hindert, sie durch eine schickliche Bestimmung dieser Grösse auf sämmtliche, ihm zugehörige Punkte anzuwenden.

Jede Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes macht es nothwendig, die innere Einrichtung des Fernrohrs ebenfalls abzuändern, damit der Gegenstand stets deutlich gesehen werden kann. Die der letzten brechenden Fläche des Objectivs zugehörige Vereinigungsweite g hängt nämlich von der Entfernung des Gegenstandes ab und verändert sich daher mit dieser, welches auch bei allen folgenden Vereinigungsweiten stattfinden würde, wenn man nicht durch Verschiebung des Ocularеinsatzes bewirkte, dass das von der letzten brechenden Fläche hervorgebrachte Bild eine unveränderte Entfernung von derselben behielte, um dem dahinter befindlichen Auge stets in gleicher Entfernung zu erscheinen. Hierdurch bleibt folglich die letzte Vereinigungsweite g_i bei allen Lagen des Gegenstandes unverändert, und da die zu dem Ocularеinsatze gehörenden brechenden Flächen bei der Verschiebung stets dieselbe Entfernung von einander behalten, so folgt daraus, dass auch alle vorhergehende Vereinigungsweiten c und g, welche sich auf die Oculare beziehen, keine Aenderungen erleiden.

Nach Nro. 2 ist der Ursprung der Abscisse z_i derjenige Punkt, in welchem die i^{te} brechende Fläche die Axe des Instrumentes durchschneidet. Durch die Verschiebung des Ocularеinsatzes ändert sich daher die Lage jenes Ursprungs ab; da aber z_i als unabhängige veränderliche Grösse zu betrachten ist, von welcher die beiden anderen Coordinaten x_i und y_i Functionen sind, so kann z_i bei der Verschiebung als unveränderlich angesehen werden, wonach sich die Formeln stets auf denjenigen Punkt des gebrochenen Strahles beziehen, dem dieselbe Abscisse z_i zugehört.

Dieses vorausgesetzt, nehmen wir die Gleichungen des gebrochenen Strahles in der Nähe des letzten Bildes, welche in (b) von Nro. 26 gegeben sind, mit Vernachlässigung aller Glieder der dritten Ordnung. Diese Gleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -z_i \left\{ \begin{aligned} &-\left(\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\ &+ \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_i \end{aligned} \right\} \\ x_i &= -z_i \left\{ X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} + X_i\,\delta\frac{1}{g_i} + \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_i \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (a)$$

Bezeichnet man nun mit der Characteristik $\mathfrak{D}$ die Veränderungen, welche dadurch entstehen, dass $\frac{1}{c_1}$ um die Grösse $\Delta\frac{1}{c_1}$ zunimmt, und

vernachlässigt die Producte der mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ multiplicirten Glieder in $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$, da letztere Grösse als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet wird, so geben die vorhergehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}y_i &= -z_i\left[-\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i+\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i+\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i\right]\\ \mathfrak{D}x_i &= -z_i\left[\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i+\mathfrak{D}\left(X\delta\frac{1}{g}\right)_i\right]\end{aligned}\right\}(b)$$

Bei der weiteren Entwickelung dieser Ausdrücke nehme ich an, dass die Abweichung wegen der Gestalt, die Farbenzerstreuung in der Axe und der farbige Rand bis auf Grössen der dritten Ordnung gehoben sind, so oft die auf jene Abweichungen sich beziehenden Glieder gebraucht werden, daher

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i,\ \Delta\frac{1}{g_i},\ \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)'_i,\ \delta\frac{1}{g_i}\ \text{und}\ \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)''_i$$

als solche Grössen betrachtet werden müssen, deren Producte mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ in den correspondirenden Gliedern vernachlässigt werden können.

28) Zuerst ist es nothwendig, die Veränderungen derjenigen Grössen zu bestimmen, von welchen die verschiedenen Glieder der Ausdrücke (b) der vorhergehenden Nummer Functionen sind. Fände keine Verschiebung des Ocularеinsatzes statt, so würden diese Veränderungen durch die obigen Formeln unmittelbar gegeben seyn, wenn sie vollständig entwickelt worden wären. Wir haben aber bei den darin enthaltenen Grössen der dritten Ordnung in Bezug auf die Veränderungen von $\frac{1}{c_1}$ nur diejenigen Glieder beibehalten, welche zur Berechnung des Einflusses vorhergegangener Brechungen nothwendig sind, weil damals die Umstände, die bei der gegenwärtigen Untersuchung in Betracht kommen, noch nicht gehörig erörtert werden konnten, daher es erforderlich ist, das Fehlende hier noch nachzuholen. Da ausserdem bei jenen Formeln ein unveränderliches Instrument vorausgesetzt wurde, so sind sie nur auf die Flächen des Objectivs anwendbar, für die zu den Ocularen gehörigen Flächen dagegen müssen die Formeln besonders entwickelt werden.

Zu dem Ende nehme ich an, dass die e^{te} Fläche die letzte ist, welche zu dem Objective gehört. Das von ihr entworfene Bild kann in Bezug auf den Ocularеinsatz als der Gegenstand angesehen, und der Ocularеinsatz unter jener Voraussetzung als ein abgesondertes Instrument berechnet werden. Die auf diese Art erhaltenen Grössen bezeichne ich mit den bisher gebrauchten Buchstaben und einem Accente, ohne jedoch den Index, welcher ihnen in Bezug auf das ganze Instrument zukommt, abzuändern, so dass die erste Fläche des Ocularеinsatzes den Index $(e+1)$ erhält.

Für die Flächen des Objectivs sind die Werthe von $\mathfrak{D}\frac{1}{g_m}$ und $\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_m}$ durch die Formeln (f) von Nro. 7 und (r) von Nro. 13 gegeben, wenn man in denselben nur diejenigen Glieder berücksichtigt, welche mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ und $\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2$ multiplicirt sind, ohne zugleich andere Abweichungen zu enthalten. Mithin ist

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}\frac{1}{g_m} &= \frac{V_m^2}{v_m}\,\Delta\frac{1}{c_1}\\ \mathfrak{D}^2\frac{1}{g_m} &= \frac{V_m^2}{v_m}\,(K_m - K_1)\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Die Ausdrücke (a) von Nro. 4 und (m) von Nro. 13, verbunden mit dem ersten der vorhergehenden, geben ferner in Bezug auf das Objectiv

$$\mathfrak{D}k_m = -\,\mathfrak{D}\frac{1}{c_m}$$

$$\mathfrak{D}\frac{1}{c_m} = \frac{g_{m-1}^2}{c_m^2}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}}$$

$$\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}} = \frac{V_{m-1}^2}{v_{m-1}}\,\Delta\frac{1}{c_1} = \frac{c_m^2\,V_m^2}{g_{m-1}^2\,v_{m-1}}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

folglich

$$\mathfrak{D}k_m = -\,\frac{V_m^2}{v_{m-1}}\,\Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Bei den Flächen des Oculareinsatzes sind alle diese Grössen = 0, weil die zu demselben gehörigen Vereinigungsweiten keine Aenderungen erleiden.

Den dem Objective entsprechenden Werth von $\frac{\mathfrak{D}\,V_m}{V_m}$ erhalten wir sehr leicht aus (f) von Nro. 18.

Die Formeln nämlich, welche die Farbenzerstreuung betreffen, sind unter der Voraussetzung berechnet worden, dass $\frac{1}{c_1}$, ν und alle davon abhängende Grössen um die mit der Characteristik δ bezeichneten Variationen zunehmen. Da nun $\delta\frac{1}{c_1}$ und $\delta\nu$ willkührlich sind, so können wir

$$\delta\frac{1}{c_1} = \Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\delta\nu = 0$$

setzen, worauf jene Formeln unmittelbar die mit der Characteristik $\mathfrak{D}$ bezeichneten Veränderungen bestimmen. Hierdurch wird der allegirte Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{D}\,V_m}{V_m} = (K_m - K_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Um $\frac{\mathfrak{D}^2\,V_m}{V_m}$ zu finden, bemerke ich, dass

$$V_m = \frac{V_{m-1}\,g_{m-1}}{c_m} = V_{m-1}\left(\frac{1}{c_m}\right)\left(\frac{1}{g_{m-1}}\right)^{-1} \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

ist. Substituirt man hierin $(V_m + \mathfrak{D} V_m + \mathfrak{D}^2 V_m)$ statt V_m und verfährt ebenso bei den übrigen Grössen, dividirt sodann die auf diese Weise erhaltene Gleichung durch die vorhergehende, so folgt daraus

$$\left(1 + \frac{\mathfrak{D} V}{V} + \frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m =$$

$$= \left(1 + \frac{\mathfrak{D} V}{V} + \frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_{m-1} \left(1 + c\,\mathfrak{D}\frac{1}{c} + c\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{c}\right)_m \left(1 + g\,\mathfrak{D}\frac{1}{g} + g\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g}\right)^{-1}_{m-1}$$

Vergleichen wir nach vorheriger Entwickelung des zweiten Theiles dieser Gleichung die zur zweiten und dritten Ordnung gehörigen Grössen abgesondert, so entstehen die beiden Differenzengleichungen

$$\left(\frac{\mathfrak{D} V}{V}\right)_m = \left(\frac{\mathfrak{D} V}{V}\right)_{m-1} + c_m\,\mathfrak{D}\frac{1}{c_m} - g_{m-1}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m = \left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_{m-1} + \left(c_m\,\mathfrak{D}\frac{1}{c_m} - g_{m-1}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}}\right)\left(\frac{\mathfrak{D} V}{V} - g\,\mathfrak{D}\frac{1}{g}\right)_{m-1}$$
$$+ c_m\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{c_m} - g_{m-1}\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_{m-1}}$$

Das Integral der ersteren dieser Gleichungen ist die bereits gefundene Gleichung (c). Um die zweite Gleichung zu integriren substituire ich zuerst statt $\mathfrak{D}\frac{1}{c_m}$ und $\mathfrak{D}^2\frac{1}{c_m}$ ihre Werthe aus (m) von Nro 13, nämlich

$$\mathfrak{D}\frac{1}{c_m} = \frac{g^2_{m-1}}{c^2_m}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}}$$

$$\mathfrak{D}^2\frac{1}{c_m} = \frac{g^2_{m-1}}{c^2_m}\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_{m-1}} - \frac{g^3_{m-1}}{c^3_m}\left(\mathfrak{D}\frac{1}{g}\right)^2_{m-1}$$

sodann statt $\mathfrak{D}\frac{1}{g_{m-1}}$, $\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_{m-1}}$ und $\left(\frac{\mathfrak{D} V}{V}\right)_{m-1}$ ihre Werthe, welche aus (a) und (c) durch Verwechselung von m mit $(m-1)$ folgen, und bemerke, dass

$$c_m = g_{m-1} + d_{m-1}$$

ist. Hierdurch verwandelt sich die zweite Differenzengleichung in die folgende:

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m = \left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_{m-1} + \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2\,V^2_{m-1}\,g_{m-1}\,d_{m-1}}{v_{m-1}\,c_m}\,(K_{m-1} - K_1) \\ + \left(\dfrac{V^2_{m-1}\,g_{m-1}\,d_{m-1}}{v_{m-1}\,c_m}\right)^2 \end{array} \right.$$

Es ist aber

$$-\frac{V^2_{m-1}\,g_{m-1}\,d_{m-1}}{v_{m-1}\,c_m} = -\frac{V_{m-1}\,V_m\,d_{m-1}}{v_{m-1}} = K^{(m)}$$

$$K_{m-1} + K^{(m)} = K_m$$

die vorhergehende Gleichung kann daher unter die Gestalt gebracht werden

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m = \left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_{m-1} + \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 [(K_m - K_1)^2 - (K_{m-1} - K_1)^2]$$

Das Integral dieser Gleichung, nach der zweiten Formel (M) von Nro. 3 genommen, ist, wenn man das dortige m mit n verwechselt,

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m = \left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_1 + \Sigma_2^m \left[(K_n - K_1)^2 - (K_{n-1} - K_1)^2\right] \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_1 + \Sigma_1^{m-1} \left[(K_{n+1} - K_1)^2 - (K_n - K_1)^2\right] \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2$$

Da $V_1 = 1$, so ist

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_1 = 0$$

Nimmt man ferner die durch Σ angedeutete Summe nach (S) von Nro. 3, so wird in Bezug auf das Objectiv

$$\left(\frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_m = (K_m - K_1)^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Für die Oculare ist vermöge (l) von Nro. 4

$$V_m = \frac{g_{m-1}}{c_m} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{g_{e+1}}{c_{e+2}} \cdot \frac{g_e}{c_{e+1}} \cdot \frac{g_{e-1}}{c_e} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{g_1}{c_2}$$

$$V'_m = \frac{g_{m-1}}{c_m} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{g_{e+1}}{c_{e+2}}$$

$$V_e = \frac{g_{e-1}}{c_e} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{g_1}{c_2}$$

folglich

$$V_m = \frac{V'_m g_e V_e}{c_{e+1}} = \frac{V'_m}{c_{e+1}} V_e \left(\frac{1}{g}\right)_e^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

V'_m und c_{e+1} hängen bloss von den Vereinigungsweiten der Oculare ab und sind folglich unveränderlich.

Behandeln wir daher die Gleichung (f) auf dieselbe Weise, wie es bei der Gleichung (d) geschehen ist, so entsteht daraus die folgende Gleichung:

$$(V + \mathfrak{D} V + \mathfrak{D}^2 V)_m =$$

$$= \frac{V'_m}{c_{e+1}} (V + \mathfrak{D} V + \mathfrak{D}^2 V)_e \left(\frac{1}{g} + \mathfrak{D}\frac{1}{g} + \mathfrak{D}^2\frac{1}{g}\right)_e^{-1}$$

$$= V_m \left(1 + \frac{\mathfrak{D} V}{V} + \frac{\mathfrak{D}^2 V}{V}\right)_e \left(1 + g\,\mathfrak{D}\frac{1}{g} + g\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g}\right)_e^{-1}$$

$$= V_m \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\mathfrak{D} V_e}{V_e} - g_e\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e} \\ &+ \frac{\mathfrak{D}^2 V_e}{V_e} - g_e\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_e} - g_e \frac{\mathfrak{D} V_e}{V_e}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e} + g_e^2 \left(\mathfrak{D}\frac{1}{g}\right)_e^2 \end{aligned} \right.$$

mithin ist

$$\frac{\mathfrak{D} V_m}{V_m} = \frac{\mathfrak{D} V_e}{V_e} - g_e\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}$$

$$\frac{\mathfrak{D}^2 V_m}{V_m} = \frac{\mathfrak{D}^2 V_e}{V_e} - g_e\,\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_e} - g_e \frac{\mathfrak{D} V_e}{V_e}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e} + g_e^2 \left(\mathfrak{D}\frac{1}{g}\right)_e^2$$

Substituirt man hierin statt der mit dem Index e versehenen Grössen ihre Werthe, welche aus (a), (c) und (e) durch Verwechselung

von m mit e folgen, bemerkt man ferner, dass $v_e = 1$ ist, weil sich hinter dem Objective Luft befindet, und setzt zur Abkürzung

$$(K)_e = K_e - V_e^2\, g_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

so geben die vorhergehenden Gleichungen für die Oculare

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{D} V_m}{V_m} &= [(K)_e - K_1]\, \Delta\frac{1}{c_1} \\ \frac{\mathfrak{D}^2 V_m}{V_m} &= [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

Um den Werth von $\mathfrak{D} K_m$ zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Hauptblendung am Objective oder am Oculareinsatze angebracht ist, da K_m von der Stellung derselben abhängt.

Im ersten Falle können die früher entwickelten Formeln auf das Objectiv angewendet werden. Nach der oben gemachten Bemerkung erhalten wir daher aus (h) von Nro. 18, da $\delta(Y)_1''$ von $\delta\frac{1}{c_1}$ unabhängig ist, bei dem Objective

$$\mathfrak{D} K_m = (K_m^2 - 2 K_m K_1)\, \Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Für die Flächen der Oculare ist vermöge (q) von Nro. 4, wenn man das dortige m mit n verwechselt,

$$K_m = K_1 + \Sigma_2^e\, K^{(n)} + K^{(e+1)} + \Sigma_{e+2}^m\, K^{(n)}$$

$$K_e = K_1 + \Sigma_2^e\, K^{(n)}$$

$$K^{(e+1)} = -\frac{V_e V_{e+1}}{v_e}\, d_e = -\frac{V_e^2\, g_e\, d_e}{c_{e+1}}$$

und für diejenigen Werthe von n, welche grösser als $e+1$ sind,

$$K^{(n)} = -\frac{V_{n-1}\, V_n\, d_{n-1}}{v_{n-1}}$$

folglich, wenn man statt V_{n-1} und V_n ihre Werthe aus (f) substituirt,

$$K^{(n)} = -\frac{V_e^2 g_e^2}{c_{e+1}^2} \cdot \frac{V'_{n-1}\, V'_n\, d_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{V_e^2 g_e^2}{c_{e+1}^2}\, K'^{(n)}$$

und

$$\Sigma_{e+2}^m\, K^{(n)} = \frac{V_e^2 g_e^2}{c_{e+1}^2}\, (K_m - K_{e+1})'$$

Hierdurch wird

$$K_m = K_e - \frac{V_e^2\, g_e\, d_e}{c_{e+1}} + \frac{V_e^2\, g_e^2}{c_{e+1}}\, (K_m - K_{e+1})'$$

und

$$\frac{K_m}{V_m^2} = \frac{K_m\, c_{e+1}^2}{V_m'^2 V_e^2 g_e^2} =$$

$$= \frac{c_{e+1}^2}{V_m'^2} \cdot \frac{K_e}{V_e^2 g_e^2} - \frac{c_{e+1}}{V_m'^2}\, \frac{d_e}{g_e} + \left(\frac{K_m - K_{e+1}}{V_m^2}\right)'$$

Das letzte Glied hängt bloss von den Vereinigungsweiten der Oculare ab und ist mithin unveränderlich. Differentiiren wir daher den vorhergehenden Ausdruck nach der Characteristik $\mathfrak{D}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_m = \frac{c_{e+1}^2}{V_m^2}\left\{\frac{\mathfrak{D}K_e}{V_e^2\,g_e^2} - \frac{2K_e}{V_e^2\,g_e^2}\,\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e} + \frac{2K_e}{V_e^2\,g_e}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e} - \frac{1}{c_{e+1}}\,\mathfrak{D}\left(\frac{d}{g}\right)_e\right.$$

Es ist aber

$$\mathfrak{D}\left(\frac{d}{g}\right)_e = \mathfrak{D}\left(\frac{c_{e+1}-g_e}{g_e}\right) = \mathfrak{D}\left(\frac{c_{e+1}}{g_e}-1\right) = c_{e+1}\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}$$

folglich

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_m = \frac{1}{V_m^2}\left[\mathfrak{D}K_e - 2K_e\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e} + (2K_e g_e - V_e^2 g_e^2)\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}\right] \quad \text{(k)}$$

Substituiren wir hierin statt $\mathfrak{D}K_e$, $\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e}$ und $\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}$ ihre Werthe, welche aus (a), (c) und (i) folgen, wenn man m mit e verwechselt und $\nu_e = 1$ setzt, so wird

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_m = -\frac{(K)_e^2}{V_m^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(l)}$$

Dieser Ausdruck giebt sogleich den Werth von $\mathfrak{D}K_m$. Es ist nämlich

$$\mathfrak{D}K_m = \mathfrak{D}V_m^2\left(\frac{K}{V^2}\right)_m$$

$$= 2K_m\frac{\mathfrak{D}V_m}{V_m} + V_m^2\,\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_m$$

Hieraus folgt, wenn man die in (c) und (l) gefundenen Werthe substituirt, in Bezug auf die Oculare

$$\mathfrak{D}K_m = \left\{2K_m\left[(K)_e - K_1\right] - (K)_e^2\right\}\Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots \text{(m)}$$

Ist die Hauptblendung an den Ocularen, und zwar vor oder hinter der j^{ten} Fläche derselben angebracht, so giebt der Ausdruck (k), bei welchem noch keine Voraussetzung hinsichtlich der Stellung der Blendung gemacht worden ist,

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_j = \frac{1}{V_j^2}\left[\mathfrak{D}K_e - 2K_e\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e} + (2K_e g_e - V_e^2 g_e^2)\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}\right]$$

Aus (d) und (f) von Nro. 22 erhalten wir aber, je nachdem die Hauptblendung vor oder hinter der j^{ten} Fläche steht,

$$\left(\frac{K}{V^2}\right)_j = \frac{1}{\nu_j}\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j = -\frac{1}{\nu_{j-1}}\left(\frac{c\zeta'}{c-\zeta'}\right)_j$$

Beide Werthe sind unveränderlich, da die Blendung stets dieselbe Entfernung von der j^{ten} Fläche behält, folglich ist

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_j = 0$$

Der vorhergehende Ausdruck von $\mathfrak{D}\left(\frac{K}{V^2}\right)_j$ giebt daher

$$\mathfrak{D}K_e = 2K_e\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e} - (2K_e g_e - V_e^2 g_e^2)\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_e}$$

oder wenn man statt $\frac{\mathfrak{D}V_e}{V_e}$ und $\mathfrak{D}\frac{1}{g_o}$ ihre Werthe aus (a) und (c) substituirt,

$$\mathfrak{D}K_e = [2K_e(K_e - K_1) - V_e^2(2K_e g_e - V_e^2 g_e^2)]\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Vermöge (h) von Nro. 18 ist

$$\mathfrak{D}K_m = \mathfrak{D}K_1 + (K_m^2 - 2K_m K_1 + K_1^2)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$-\mathfrak{D}K_e = -\mathfrak{D}K_1 - (K_e^2 - 2K_e K_1 + K_1^2)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Addiren wir nun die drei vorhergehenden Ausdrücke, so erhalten wir für die Flächen des Objectivs

$$\mathfrak{D}K_m = [K_m^2 - 2K_m K_1 + (K)_e^2]\,\Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

Es unterliegt keinen Schwierigkeiten, auch in dem letzteren Falle den Werth von $\mathfrak{D}K_m$ für die Oculare zu berechnen; da jedoch bei den Fernröhren, welche die angegebene Einrichtung haben, alle von den Ocularen herrührende Glieder als zu einer höheren Ordnung gehörig betrachtet werden, so können die Producte von den ihnen entsprechenden Abweichungen in $\Delta\frac{1}{c_1}$ vernachlässigt werden, wodurch jene Berechnung unnöthig wird.

29) Nach diesen Prämissen können wir zur Entwickelung der in den Ausdrücken (b) von Nro. 27 enthaltenen Grössen übergehen.

Nach (m) von Nro. 4 ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i \varphi_1}{v_i}$$

Hierin sind φ_1 und v_i unveränderlich. Behalten wir daher das Quadrat von $\Delta\frac{1}{c_1}$ bei, so ist

$$\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i \varphi_1}{v_i}\left(\frac{\mathfrak{D}V_i}{V_i} + \frac{\mathfrak{D}^2 V_i}{V_i}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

folglich, wenn wir die in (h) der vorhergehenden Nummer gefundenen Werthe substituiren,

$$\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i \varphi_1}{v_i}\left\{[(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right\} \quad (b)$$

Berechnen wir jetzt diejenigen Glieder der allegirten Ausdrücke, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt beziehen.

Da nach Nro. 26 das Instrument ursprünglich für $\Delta\frac{1}{c_1} = \Delta\varphi_1 = 0$ berechnet war, so ist nach der daselbst enthaltenen Zusammenstellung

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = -\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,Y_1' \\ + M_i\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ + O_i\,Y_1'\,\varphi_1^2 + P_i\,\varphi_1^3 \end{array}\right.$$

$$X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} = -\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,X_1 \\ + M_i\,X_1\,Y_1'\,\varphi_1 + N_i\,X_1\,\varphi_1^2 \end{array}\right.$$

Der Voraussetzung nach sind aber sowohl $\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i$ als $\Delta\frac{1}{g_i}$ auf Grössen der dritten Ordnung reducirt, welches nur dann für alle Werthe von X_1, $\acute{Y}_1$ und φ_1 möglich ist, wenn die Coefficienten L_i, M_i, N_i, O_i und P_i durch die Einrichtung des Instrumentes so klein gemacht werden, dass sie als Grössen von der Ordnung X_1^2 zu betrachten sind. Da nun jene Coefficienten noch ausserdem mit Factoren von der Ordnung X_1^3 multiplicirt sind, so können die Producte derselben in $\Delta\frac{1}{c_1}$ und folglich auch in die durch die Characteristik $\mathfrak{D}$ bezeichneten Veränderungen nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden. Die vorhergehenden Formeln geben daher, wenn man sie nach jener Characteristik differentiirt

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i &= -\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1\,\mathfrak{D}L_i\\ &+\left(\frac{X_1^2+3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\,\mathfrak{D}M_i\\ &+\acute{Y}_1\,\varphi_1^2\,\mathfrak{D}O_i+\varphi_1^3\,\mathfrak{D}P_i\end{aligned}\right.\\
\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i &= -\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\,X_1\,\mathfrak{D}L_i\\ &+X_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1\,\mathfrak{D}M_i\\ &+X_1\,\varphi_1^2\,\mathfrak{D}N_i\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Vermöge (g) von Nro. 7 und (f) von Nro. 8 ist

$$L^{(m)} = \left(\frac{A\,\nu}{V^4}\right)_m$$
$$M^{(m)} = \left(\frac{2A\,\nu\,K}{V^4}+\frac{B}{V^2}\right)_m$$
$$N^{(m)} = \left(\frac{A\,\nu\,K^2}{V^4}+\frac{BK}{V^2}+\frac{C}{\nu}\right)_m$$
$$O^{(m)} = 3N^{(m)}+\left(\frac{D-3C}{\nu}\right)_m$$
$$P^{(m)} = \left(\frac{A\,\nu\,K^3}{V^4}+\frac{3BK^2}{2V^2}+\frac{DK}{\nu}+\frac{EV^2}{\nu^2}\right)_m$$

Ferner ist

$$L_i = \Sigma_1^i\,L^{(m)}$$

Da jedoch nach den angenommenen Grundsätzen die von den Ocularen herrührenden Glieder als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet und ihre Producte in $\Delta\frac{1}{c_1}$ vernachlässigt werden, so reicht es hin, die durch das Zeichen Σ angedeuteten Summen nur auf die Flächen des Objectivs auszudehnen, d. h. bei denselben i mit e zu verwechseln. Diess giebt

$$L_i = \Sigma_1^e\,L^{(m)}$$
$$\mathfrak{D}L_i = \Sigma_1^e\,\mathfrak{D}L^{(m)}$$

und ebenso in Bezug auf die übrigen Coefficienten. Differentiiren wir daher die vorhergehenden Ausdrücke derselben nach der Characteristik $\mathfrak{D}$, so wird

$$\mathfrak{D}L^{(m)} = \left[\frac{\nu}{V^4}\,\mathfrak{D}A - \frac{4A\nu}{V^4}\cdot\frac{\mathfrak{D}V}{V}\right]_m$$

$$\mathfrak{D}M^{(m)} = \left\{\begin{aligned}&\frac{2\nu K}{V^4}\,\mathfrak{D}A + \frac{1}{V^2}\,\mathfrak{D}B\\ &-\left(\frac{8A\nu K}{V_4} + \frac{2B}{V^2}\right)\frac{\mathfrak{D}V}{V} + \frac{2A\nu}{V^4}\,\mathfrak{D}K\end{aligned}\right\}_m$$

$$\mathfrak{D}N^{(m)} = \left\{\begin{aligned}&\frac{\nu K^2}{V^4}\,\mathfrak{D}A + \frac{K}{V^2}\,\mathfrak{D}B + \frac{1}{\nu}\,\mathfrak{D}C\\ &-\left(\frac{4A\nu K^2}{V^4} + \frac{2BK}{V^2}\right)\frac{\mathfrak{D}V}{V} + \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)\mathfrak{D}K\end{aligned}\right\}_m \quad \text{(d)}$$

$$\mathfrak{D}O^{(m)} = 3\,\mathfrak{D}N^{(m)} + \mathfrak{D}\left(\frac{D-3C}{\nu}\right)_m$$

$$\mathfrak{D}P^{(m)} = \left\{\begin{aligned}&\frac{\nu K^3}{V^4}\,\mathfrak{D}A + \frac{3K^2}{2V^2}\,\mathfrak{D}B + \frac{K}{\nu}\,\mathfrak{D}D + \frac{V^2}{\nu^2}\,\mathfrak{D}E\\ &-\left(\frac{4A\nu K^3}{V^4} + \frac{3BK^2}{V^2} - \frac{2EV^2}{\nu^2}\right)\frac{\mathfrak{D}V}{V}\\ &+\left(\frac{3A\nu K^2}{V^4} + \frac{3BK}{V^2} + \frac{D}{\nu}\right)\mathfrak{D}K\end{aligned}\right\}_m$$

Der Werth von $\mathfrak{D}A_m$ folgt aus (d) von Nro. 13, wenn man bloss das von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängige Glied beibehält, welches allgemein gültig ist, wenn man ferner ΔA_m mit $\mathfrak{D}A_m$ verwechselt. Diess giebt

$$\mathfrak{D}A_m = \frac{(A)_m V_m^2}{\nu_m}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

woraus $\mathfrak{D}B_m$ etc. durch blosse Verwechselung von *A* mit *B* etc. erhalten werden.

Nach (g) von Nro. 11 ist

$$(D) = 3(C)$$
$$(E) = 0$$

folglich

$$\mathfrak{D}D_m = 3\,\mathfrak{D}C_m = \frac{3(C)_m V_m^2}{\nu_m}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$
$$\mathfrak{D}E_m = 0$$

Da bloss die Flächen des Objectivs berücksichtigt werden, so sind die Werthe von $\frac{\mathfrak{D}V_m}{V_m}$ und $\mathfrak{D}K_m$ durch die in (c), (i) und (n) der vorhergehenden Nummer gefundenen Formeln gegeben, welche unter die gemeinschaftliche Gestalt gebracht werden können:

$$\frac{\mathfrak{D}V_m}{V_m} = (K_m - K_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D}K_m = [K_m^2 - 2K_m K_1 + (K)_0^2]\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

worin man entweder

$$(K)_0 = 0$$

oder $(K)_e = K_e - V_e^2\, g_e$

setzen muss, je nachdem die Hauptblendung an dem Objective oder an den Ocularen angebracht ist.

Diese Werthe müssen nunmehr in (d) substituirt werden. Gebrauchen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen, bei denen angenommen ist, dass alle in den Parenthesen enthaltene Grössen, welche nicht mit dem Index 1 oder *e* versehen sind, den Index *m* haben, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
(L)^{(m)} &= \left[\frac{(A)}{V^2} - \frac{4A\nu}{V^4}(K - K_1)\right]_m \\
(M)^{(m)} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{2(A)K}{V^2} + \frac{(B)}{\nu} \\ &- \frac{2A\nu}{V^4}(3K^2 - 2KK_1 - (K)_e^2) - \frac{2B}{V^2}(K - K_1)\end{aligned}\right\}_m \\
(N)^{(m)} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{(A)K^2}{V^2} + \frac{(B)K}{\nu} + \frac{(C)V^2}{\nu^2} \\ &- \frac{2A\nu K}{V^4}(K^2 - (K)_e^2) - \frac{B}{V^2}(K^2 - (K)_e^2)\end{aligned}\right\}_m \\
(P)^{(m)} &= \left\{\begin{aligned}&\frac{(A)K^3}{V^2} + \frac{3(B)K^2}{2\nu} + \frac{3(C)V^2K}{\nu^2} \\ &- \frac{A\nu K^2}{V^4}(K^2 + 2KK_1 - 3(K)_e^2) - \frac{3BK}{V^2}(KK_1 - (K)_e^2) \\ &+ \frac{D}{\nu}(K^2 - 2KK_1 + (K)_e^2) + \frac{2EV^2}{\nu^2}(K - K_1)\end{aligned}\right\}_m
\end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

so ist das Resultat der erwähnten Substitution:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{D}L^{(m)} &= (L)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \\
\mathfrak{D}M^{(m)} &= (M)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \\
\mathfrak{D}N^{(m)} &= (N)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \\
\mathfrak{D}O^{(m)} &= 3\mathfrak{D}N^{(m)} = 3(N)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1} \\
\mathfrak{D}P^{(m)} &= (P)^{(m)}\,\Delta\frac{1}{c_1}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(f)}$$

Durch die in Nro. 7 eingeführte Bezeichnung erhalten wir hieraus ferner

$$\mathfrak{D}L_i = \Sigma_1^e\, \mathfrak{D}L^{(m)} = (L)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

und ebenso in Bezug auf die übrigen Coefficienten.

Multipliciren wir daher die Formeln (c) mit $-z_i$ und substituiren darin statt $\mathfrak{D}L_i$ u. s. w. die Werthe, welche auf die angegebene Weise aus (f) folgen, so erhalten wir für die von der Abweichung

wegen der Gestalt abhängigen Glieder, welche in (b) von Nro. 27 vorkommen, die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} -z_i\,\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i z_i}{v_i}\,\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}&(L)_e\,(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1\\&+(M)_e\left(\frac{X_1^2+3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\\&+3(N)_e\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2+(P)_e\,\varphi_1^3\end{aligned}\right.\\ -z_i\,\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i &= \frac{V_i z_i}{v_i}\,\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}&(L)_e\,(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\,X_1\\&+(M)_e\,X_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1\\&+(N)_e\,X_1\,\varphi_1^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad(g)$$

30) Es bleibt jetzt noch übrig, diejenigen Glieder zu entwickeln, welche von der Farbenzerstreuung herrühren. Vermöge (h) von Nro. 17 ist, da das Instrument ursprünglich für $\delta\frac{1}{c_1}=\delta\varphi_1=0$ berechnet war,

$$\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i=-\frac{V_i}{v_i}\,[S_i\;\acute{Y}_1\,\delta v+T_i\,\varphi_1\,\delta v]$$

$$X_i\,\delta\frac{1}{g_i}=-\frac{V_i}{v_i}\,S_i\,X_1\,\delta v$$

Die letzte dieser Formeln entsteht aus der ersten, wenn man $\acute{Y}_1$ mit X_1 verwechselt und $\varphi_1=0$ setzt, daher die Entwickelung der ersten hinreicht. Nach der Voraussetzung sind $\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)'$, $\delta\frac{1}{g_i}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)''_i$ bis auf Grössen der dritten Ordnung gehoben, deren Producte in $\Delta\frac{1}{c_1}$ nicht berücksichtigt werden. Es folgt daher aus (l) von Nro. 17, dass auch die Producte von S_i und T_i in die mit der Characteristik $\mathfrak{D}$ versehenen Grössen vernachlässigt werden können. Hiernach giebt die erste der vorhergehenden Formeln

$$\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i=-\frac{V_i\,\delta v}{v_i}\,[\acute{Y}_1\;\mathfrak{D}S_i+\varphi_1\;\mathfrak{D}T_i]$$

oder, wenn wir statt S_i und T_i ihre Werthe

$$S_i=\Sigma_1^i\;S^{(m)}$$
$$T_i=\Sigma_1^i\;T^{(m)}$$

substituiren,

$$\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i=-\frac{V_i\,\delta v}{v_i}\,[\acute{Y}_1\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}S^{(m)}+\varphi_1\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}T^{(m)}]\quad(a)$$

Nach (g) von Nro. 17 ist

$$\left.\begin{aligned}S^{(m)}&=-\frac{k_m}{V_m^2\,n_m}\,(\alpha_m-n_m\,\alpha_{m-1})\\T^{(m)}&=K_m\;S^{(m)}-\left(\frac{\alpha_m}{v_m}-\frac{\alpha_{m-1}}{v_{m-1}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

daher

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_1^e\,\mathfrak{D}S^{(m)} &= -\left[2T_e - 2K_1\,S_e + \frac{\alpha_e}{v_e}\right]\Delta\frac{1}{c_1}\\ \Sigma_1^e\,\mathfrak{D}T^{(m)} &= -\,u_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(f)$$

Für die Flächen der Oculare ist

$$\mathfrak{D}k_m = 0$$

und vermöge (h) und (m) von Nro. 28

$$\frac{\mathfrak{D}V_m}{V_m} = [(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D}K_m = \left\{2K_m\,[(K)_e - K_1] - (K)_e^2\right\}\Delta\frac{1}{c_1}$$

folglich, wenn man diese Werthe in (c) substituirt,

$$\mathfrak{D}S^{(m)} = \frac{2k_m}{V_m^2\,n_m}\,(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1})\,(K_e - K_1 - V_e^2\,g_e)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D}T^{(m)} = K_m\,\mathfrak{D}S^{(m)} + 2K_m\,S^{(m)}\,(K_e - K_1 - V_e^2\,g_e)\,\Delta\frac{1}{c_1} - S^{(m)}\,(K_e - V_e^2\,g_e)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Substituiren wir nun in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}S^{(m)}$ den ersten in (e) gefundenen Werth, das hierdurch erhaltene Resultat sodann in dem Ausdrucke von $\mathfrak{D}T^{(m)}$, so wird

$$\mathfrak{D}S^{(m)} = -\,2\,S^{(m)}\,[(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D}T^{(m)} = -\,S^{(m)}\,(K)_e^2\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Von diesen Grössen muss die Summe für sämmtliche Flächen der Oculare, d. h. von $m = (e+1)$ bis $m = i$ genommen werden; wir erhalten daher

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_{e+1}^i\,\mathfrak{D}S^{(m)} &= -\,2(S_i - S_e)\,[(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1}\\ \Sigma_{e+1}^i\,\mathfrak{D}T^{(m)} &= -\,(S_i - S_e)\,(K)_e^2\,\Delta\frac{1}{c_1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(g)$$

Die Vereinigung der in (f) und (g) erhaltenen Werthe giebt

$$\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}S^{(m)} = \Sigma_1^e\,\mathfrak{D}S^{(m)} + \Sigma_{e+1}^i\,\mathfrak{D}S^{(m)} =$$

$$= -\,\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}&2T_e - 2K_1\,S_i + \frac{\alpha_e}{v_e}\\ &+ 2(S_i - S_e)\,(K)_e\end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}T^{(m)} = \Sigma_1^e\,\mathfrak{D}T^{(m)} + \Sigma_{e+1}^i\,\mathfrak{D}T^{(m)} =$$

$$= -\,\Delta\frac{1}{c_1}\left\{u_e + (S_i - S_e)\,(K)_e^2\right\}$$

Vermöge (q) von Nro. 17 ist

$$(S)_e = -\,T_e + K_e\,S_e - \frac{\alpha_e}{v_e}$$

die erste der vorhergehenden Formeln kann daher auch unter die Gestalt gebracht werden:

$$\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}S^{(m)} = \Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}&2(S)_e - 2(K_e - K_1)\,S_i\\ &+ 2V_e^2\,g_e\,(S_i - S_e) + \frac{\alpha_e}{v_e}\end{aligned}\right.$$

Nach der Voraussetzung ist $\delta\frac{1}{g_i}$, so oft die ihm entsprechenden Glieder gebraucht werden, durch die Wirkung des Objectivs auf eine Grösse der dritten Ordnung reducirt, und da die von den Ocularen herrührenden Glieder, welche darin vorkommen, ebenfalls zur dritten Ordnung gerechnet werden, so folgt daraus, dass S_i und S_e sehr kleine Grössen sind, deren Producte in $\Delta\frac{1}{c_1}$ in dem Ausdrucke von $\Sigma_1^i\, \mathfrak{D}S^{(m)}$ vernachlässigt werden können. Ausserdem ist $\alpha_e = 0$, weil sich vor und hinter dem Objective Luft befindet.

Bei dem farbigen Rande dagegen haben wir eine ähnliche Voraussetzung in Bezug auf S_i und S_e nicht gemacht, setzt man daher

$$(u)_i = u_e + (S_i - S_e)\,(K)_e^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1^i\, \mathfrak{D}S^{(m)} &= \mathfrak{D}S_i = 2(S)_e\,\Delta\frac{1}{c_1} = -2T_e\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ \Sigma_1^i\, \mathfrak{D}T^{(m)} &= \mathfrak{D}T_i = -(u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

Multiplicirt man daher den Ausdruck (a) mit $-z_i$, substituirt die vorhergehenden Werthe und leitet dann den correspondirenden Ausdruck in Bezug auf $X_i\,\delta\frac{1}{g_i}$ durch die angegebenen Verwechselungen ab, so wird

$$\left.\begin{aligned} -z_i\,\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i &= \frac{V_i\,z_i\,\delta\nu\,\Delta\frac{1}{c_1}\left[2(S)_e Y_1 - (u)_i\varphi_1\right]}{\nu_i} \\ -z_i\,\mathfrak{D}\left(X\delta\frac{1}{g}\right)_i &= \frac{V_i\,z_i}{\nu_i}\,.\,2(S)_e\,X_1\,\delta\nu\,\Delta\frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \text{(k)}$$

Ist die Hauptblendung an den Ocularen angebracht, so ist für die Flächen des Objectivs nach (b), (c) und (n) von Nro. 28

$$\mathfrak{D}k_m = -\frac{V_m^2}{\nu_{m-1}}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\frac{\mathfrak{D}V_m}{V_m} = (K_m - K_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D}K_m = \left[K_m^2 - 2K_m\,K_1 + (K)_e^2\right]\Delta\frac{1}{c_1}$$

Die Vergleichung dieser Werthe mit den in (d) für den ersten Fall erhaltenen zeigt, dass der daraus abgeleitete Werth von $\mathfrak{D}S^{(m)}$ ungeändert bleibt, dass dagegen zu $\mathfrak{D}T^{(m)}$ noch das folgende Glied hinzukommt:

$$\mathfrak{D}T^{(m)} = S^{(m)}\,\mathfrak{D}K_m = S^{(m)}\,(K)_e^2\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Die Summe hiervon für sämmtliche Flächen des Objectivs ist

$$\Sigma_1^e\,\mathfrak{D}T^{(m)} = S_e\,(K)_e^2\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Bei den Instrumenten, welche die letzte Einrichtung haben, ist es aber erlaubt, die Producte vor S_i und S_e in $\Delta\frac{1}{c_1}$ zu vernachlässigen, wodurch das vorhergehende Glied wegfällt, und da in

diesem Falle auch die von den Ocularen herrührenden Glieder nicht berücksichtigt werden, so bleiben die Ausdrücke (i) und (k) ungeändert und es wird in denselben

$$(u)_i = u_e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

31) Sammeln wir nun die in (b), (g) von Nro. 29 und (k) von Nro. 30 entwickelten Grössen und addiren dazu die in (d) von Nro. 26 gefundenen Ausdrücke von y_i und x_i, bemerken wir ferner, dass die Grössen Q_i und U_i nur auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt werden dürfen, mithin nach der nunmehr eingeführten Bezeichnung den Index *e* statt *i* bekommen, so erhalten wir

die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles, wenn seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet wird, und mit Rücksicht auf eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes

$$\left.\begin{aligned}
y_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{\begin{aligned}
&\left\{1 + [(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2\right\} \varphi_1 \\
&+ \left[L_i + (L)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] (X_1^2 + Y_1'^2)\; Y_1' \\
&+ \left[M_i + (M)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \left(\frac{X_1^2 + 3\,Y_1'^2}{2}\right) \varphi_1 \\
&+ \left[O_i + 3(N)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] Y_1'\,\varphi_1^2 + \left[P_i + (P)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1^3 \\
&+ Q_e\,(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,[X_1^2 + (Y_1' + K_1\,\varphi_1)^2]^2 \\
&+ \left[S_i + 2(S)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] Y_1'\,\delta v + s_i\,Y_1'\,\delta v^2 \\
&+ U_e[(Y_1' + K_1\varphi_1)\left(X_1^2 + (Y_1' + K_1\varphi_1)^2\right) - K_1^3\varphi_1^3]\,\delta v \\
&+ \left[T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1\,\delta v + t_i\,\varphi_1\,\delta v^2 + W_i\,\varphi_1^3\,\delta v \\
&- \frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_1' - \frac{v_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \varphi_1
\end{aligned}\right. \\[2ex]
x_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{\begin{aligned}
&\left[L_i + (L)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] (X_1^2 + Y_1'^2)\; X_1 \\
&+ \left[M_i + (M)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] X_1\,Y_1'\,\varphi_1 \\
&+ \left[N_i + (N)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] X_1\,\varphi_1^2 \\
&+ Q_e\,X_1\,[X_1^2 + (Y_1' + K_1\,\varphi_1)^2]^2 \\
&+ \left[S_i + 2(S)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] X_1\,\delta v + s_i\,X_1\,\delta v^2 \\
&+ U_e\,X_1\,[X_1^2 + (Y_1' + K_1\,\varphi_1)^2]\,\delta v \\
&- \frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_1
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

Da diese Formeln alle Glieder enthalten, welche in den Formeln (d) von Nro. 26 vorkommen, so brauchen die letzteren nun nicht mehr betrachtet zu werden, indem sie ein specieller Fall der ersteren sind, und aus denselben entstehen, wenn man die Entfernung des Gegenstandes als unveränderlich annimmt, mithin $\Delta\frac{1}{c_1} = 0$ setzt.

Besteht ein Instrument bloss aus einem achromatischen Objective ohne Oculare, wodurch ein Bild des Gegenstandes auf einer Projectionsebene entworfen wird, so wie es bei der Camera obscura stattfindet, so sind die vorhergehenden Formeln ebenfalls anwendbar, da alsdann die Projectionsebene bei verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes ebensoviel verschoben werden muss, wie die Oculare bei Fernröhren.

Einfluss einer Veränderung in der Lage des Gegenstandes bei unveränderter Einrichtung des Instrumentes.

32) Die in den vorhergehenden Nummern enthaltenen Formeln erleiden eine Modification, wenn das Instrument bei den verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes stets eine unveränderte Einrichtung behält, so dass keine Verschiebung der Oculare oder der Projectionsebene stattfindet. Da nämlich nunmehr kein Unterschied zwischen den Flächen des Objectivs und der Oculare gemacht zu werden braucht, so gelten die Formeln, welche für die ersteren Flächen unter der Voraussetzung gefunden wurden, dass die Hauptblendung an dem Objective angebracht ist, jetzt für sämmtliche Flächen des Instrumentes. Sodann müssen wir in den Gleichungen des gebrochenen Strahles ausser den im vorhergehenden Falle beibehaltenen Gliedern noch diejenigen berücksichtigen, durch deren Entwickelung Grössen hervorgebracht werden, welche den in den Formeln bereits enthaltenen analog sind. Hiernach kommen vermöge (a) von Nro. 26 zu den in (a) von Nro. 27 gegebenen Werthen von y_i und x_i noch die folgenden Glieder:

$$y_i = -z_i\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i - z_i\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \delta Y_i$$

$$x_i = -z_i\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i - z_i\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \delta X_i$$

und die Gleichungen des gebrochenen Strahles werden, wenn man $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ mit $\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i$ verwechselt,

$$y_i = -z_i\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{f}{g}\right)_i + \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i Y_i\\ &+\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\\ &+\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i \delta Y_i\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

$$x_i = -z_i \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i X_i + X_i \Delta \frac{1}{g_i} + \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \\ + X_i\, \delta \frac{1}{g_i} + \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \delta X_i \end{array} \right\} \quad (a)$$

Um hieraus $\mathfrak{D} y_i$ und $\mathfrak{D} x_i$ abzuleiten, müssen wir bemerken, dass z_i unveränderlich, daher mit Beibehaltung des Quadrates von $\Delta \frac{1}{c_1}$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i = \mathfrak{D}\frac{1}{g_i} + \mathfrak{D}^2 \frac{1}{g_i}$$

ist, dass ferner nach den angenommenen Grundsätzen die Producte der mit $\Delta \frac{1}{c_1}$ multiplicirten Glieder in $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i$ vernachlässigt werden. Wir erhalten folglich aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{D} y_i = -z_i \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i + Y_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} + Y_i \mathfrak{D}^2 \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D} Y_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} \\ + \mathfrak{D}\left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_i + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} \\ + \mathfrak{D}\left(Y \delta \frac{1}{g} - \delta \frac{f}{g}\right)_i + \delta Y_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} \end{array} \right. \\ \mathfrak{D} x_i = -z_i \left\{ \begin{array}{l} X_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} + X_i \mathfrak{D}^2 \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D} X_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D}\left(X \Delta \frac{1}{g}\right)_i \\ + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D}\left(X \delta \frac{1}{g}\right)_i + \delta X_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (b)$$

Den Werth von $\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i$ haben wir bereits in (a) von Nro. 29 gefunden, nämlich

$$\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i \varphi_1}{v_i}\left(\frac{\mathfrak{D} V_i}{V_i} + \frac{\mathfrak{D}^2 V_i}{V_i}\right)$$

Ferner ist vermöge (a) von Nro. 25

$$\mathfrak{D} Y_i = -\frac{K_i}{V_i}\,(Y'_1 + K_1 \varphi_1)\, \Delta \frac{1}{c_1}$$

$$\mathfrak{D} X_i = -\frac{K_i}{V_i}\, X_1\, \Delta \frac{1}{c_1}$$

Substituirt man daher ausserdem statt Y_i und X_i ihre Werthe aus (q) von Nro. 4, sodann statt $\mathfrak{D}\frac{1}{g_i}$, $\mathfrak{D}^2\frac{1}{g_i}$, $\frac{\mathfrak{D} V_i}{V_i}$ und $\frac{\mathfrak{D}^2 V_i}{V_i}$ ihre Werthe aus (a), (c) und (e) von Nro. 28, so wird

$$\left. \begin{array}{l} -z_i\left[-\mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i + Y_i \mathfrak{D}\frac{1}{g_i} + Y_i \mathfrak{D}^2 \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D} Y_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i}\right] = \\ \quad = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ \begin{array}{l} -(Y'_1 + K_1 \varphi_1)\, \Delta \frac{1}{c_1} \\ + K_1\, (Y'_1 + K_1 \varphi_1) \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2 \end{array} \right. \\ -z_i\left[X_i \mathfrak{D}\frac{1}{g_i} + X_i \mathfrak{D}^2 \frac{1}{g_i} + \mathfrak{D} X_i \mathfrak{D} \frac{1}{g_i}\right] = \\ \quad = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ -X_1\, \Delta \frac{1}{c_1} + K_1 X_1 \left(\Delta \frac{1}{c_1}\right)^2 \right. \end{array} \right\} \quad (c)$$

Die folgenden Glieder $-z_i\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i$ und $-z_i\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i$ behalten die in (g) von Nro. 29 gefundenen Werthe, nur muss in den Coefficienten $(L)_e$ etc. stets $(K)_e = 0$ gesetzt werden, weil das hiervon abhängige Glied in $\mathfrak{D}K_m$ bei einem unveränderlichen Instrumente wegfällt.

Die Werthe von

$$-z_i\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\mathfrak{D}\frac{1}{g_i} \text{ und } -z_i\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_i\mathfrak{D}\frac{1}{g_i}$$

folgen sehr leicht aus den beiden letzten Formeln (a) von Nro. 25, wenn darin $\Delta\frac{1}{c_1}$ und $\Delta\varphi_1 = 0$ gesetzt, dieselben sodann mit $-z_i\mathfrak{D}\frac{1}{g_i} = -\frac{V_i^2 z_i}{v_i}\Delta\frac{1}{c_1}$ multiplicirt werden. Es entstehen dadurch Glieder, welche mit den in

$$-z_i\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \text{ und } -z_i\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i$$

enthaltenen einerlei Argumente haben und mit diesen vereinigt werden können. Da jedoch die letzteren nur auf die Flächen des Objectivs ausgedehnt wurden, so muss dasselbe auch bei den ersteren geschehen, der Index i folglich mit e verwechselt werden. Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
(L')_e &= (L)_e - L''_e - (KL - L'')_j\\
(M')_e &= (M)_e - M''_e - (KM - M'')_j\\
(N')_e &= (N)_e - N''_e - (KN - N'')_j\\
(O')_e &= 3(N)_e - O''_e - (KO - O'')_j\\
(P')_e &= (P)_e - P''_e - (KP - P'')_j\\
(q')_e &= -(q'_e - q'_j)
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&-z_i\mathfrak{D}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i - z_i\left[\Delta Y-\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\mathfrak{D}\frac{1}{g_i} =\\
&= \frac{V_i z_i}{v_i}\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}
&(L')_e(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1\\
&+(M')_e\left(\frac{X_1^2+3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\\
&+(q')_e(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\varphi_1\\
&+(O')_e\acute{Y}_1\varphi_1^2+(P')_e\varphi_1^3
\end{aligned}\right.\\
&-z_i\mathfrak{D}\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i - z_i\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_i\mathfrak{D}\frac{1}{g_i} =\\
&= \frac{V_i z_i}{v_i}\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned}
&(L')_e(X_1^2+\acute{Y}_1^2)X_1\\
&+(M')_e X_1\acute{Y}_1\varphi_1\\
&+(N')_e X_1\varphi_1^2
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\text{(e)}$$

Um $-z_i\,\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i$ zu finden, müssen wir in (a) von Nro. 30 statt $\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}S^{(m)}$ und $\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}T^{(m)}$ ihre Werthe substituiren, welche aus (f) jener Nummer durch Verwechselung von e mit i folgen, wobei nach den angenommenen Grundsätzen in $\Sigma_1^i\,\mathfrak{D}S^{(m)}$ das Product von $\Delta\frac{1}{c_1}$ und S_i vernachlässigt wird. Diess giebt

$$-z_i\,\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i=$$
$$=-\frac{z_i\,V_i\,\delta\nu\,\Delta\frac{1}{c_1}}{\nu_i}\left[\left(2T_i+\frac{\alpha_i}{\nu_i}\right)Y_1'+u_i\,\varphi_1\right]$$

Da $\delta\frac{1}{c_1}$ und $\delta\varphi_1=0$ sind, so wird vermöge (c) von Nro. 25, wenn man darin statt $(S)_i$, $(S)_j$, $(T)_i$ und $(T)_j$ ihre Werthe aus (q) und (s) von Nro. 17 substituirt und T_i in den Gliedern vernachlässigt, welche sich auf den farbigen Rand beziehen,

$$\delta Y_i=\frac{\delta\nu}{V_i}\begin{cases}\left[-T_i-\frac{\alpha_i}{\nu_i}+T_j+\frac{\alpha_j}{\nu_j}\right]Y_1'\\+\left[-u_i+u_j\right]\varphi_1\end{cases}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned}&-z_i\left[\mathfrak{D}\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i+\delta Y_i\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_i}\right]=\\&=-\frac{z_i\,V_i\,\delta\nu\,\Delta\frac{1}{c_1}}{\nu_i}\left[\left(T_i+T_j+\frac{\alpha_j}{\nu_j}\right)Y_1'+u_j\,\varphi_1\right]\end{aligned}\right\}\quad(f)$$

woraus durch Verwechselung von Y mit X und Weglassung des von φ_1 abhängigen Gliedes unmittelbar

$$\left.\begin{aligned}&-z_i\left[\mathfrak{D}\left(X\delta\frac{1}{g}\right)_i+\delta X_i\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_i}\right]=\\&=-\frac{z_i\,V_i\,\delta\nu\,\Delta\frac{1}{c_1}}{\nu_i}\left(T_i+T_j+\frac{\alpha_j}{\nu_j}\right)X_1\end{aligned}\right\}\quad.\ .\ (g)$$

folgt.

Wir haben in dem vorhergehenden Falle angenommen, dass φ_1 bei der Veränderung von $\frac{1}{c_1}$ stets einerlei Werth behält. Wollen wir jetzt auch bei jener Grösse eine Veränderung eintreten lassen, welche ich mit $\Delta\varphi_1$ bezeichne und von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{c_1}$ annehme, so ist, um dieselbe zu berücksichtigen, weiter nichts erforderlich, als in den für $(y_i+\mathfrak{D}y_i)$ und $(x_i+\mathfrak{D}x_i)$ erhaltenen Werthen φ_1 um $\Delta\varphi_1$ zunehmen zu lassen. Da die in

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i,\ \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i,\ \left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i\ \text{und}\ \left(X\delta\frac{1}{g}\right)_i$$

enthaltenen Coefficienten, ebenso wie $\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i$ von φ_1 unabhängig

sind und nach den angenommenen Grundsätzen ihre Producte in $\Delta\varphi_1$ vernachlässigt werden, so kommen hierbei vermöge (a), (b) und (c) nur die folgenden Glieder von $(y_i + \mathfrak{D}y_i)$ in Betracht:

$$y_i + \mathfrak{D}y_i = -z_i\left[-\left(\frac{f}{g}\right)_i - \mathfrak{D}\left(\frac{f}{g}\right)_i + Y_i\,\mathfrak{D}\frac{1}{g_i}\right]$$
$$= \frac{V_i\,z_i}{v_i}\left[\varphi_1 - (\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]$$

woraus durch die Veränderung von φ_1 das folgende Glied entsteht, welches den bereits gefundenen Gliedern von $\mathfrak{D}y_i$ zugesetzt werden muss,

$$\mathfrak{D}y_i = \frac{V_i\,z_i}{v_i}\left[\Delta\varphi_1 - K_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\,\Delta\varphi_1\right] \quad \ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

$\mathfrak{D}x_i$ dagegen erleidet keine Abänderung.

Vereinigen wir nun die in (c), (e), (f), (g) und (h) gefundenen Werthe, so erhalten wir dadurch

$$\mathfrak{D}y_i = \frac{V_i\,z_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&-\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right]\left(1 - K_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)\\&+ (L')_e\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\\&+ (M')_e\left(\frac{X_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1} + (q')_e(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\\&+ (O')_e\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2\,\Delta\frac{1}{c_1} + (P')_e\,\varphi_1^3\,\Delta\frac{1}{c_1}\\&-\left(T_i + T_j + \frac{\alpha_j}{v_j}\right)\acute{Y}_1\,\delta v\,\Delta\frac{1}{c_1} - u_j\,\varphi_1\,\delta v\,\Delta\frac{1}{c_1}\end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

$$\mathfrak{D}x_i = \frac{V_i\,z_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&- X_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\left(1 - K_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)\\&+ (L')_e\,(X_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,X_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\\&+ (M')_e\,X_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1} + (N')_e\,X_1\,\varphi_1^2\,\Delta\frac{1}{c_1}\\&-\left(T_i + T_j + \frac{\alpha_j}{v_j}\right)X_1\,\delta v\,\Delta\frac{1}{c_1}\end{aligned}\right\}$$

Die hierin enthaltenen Glieder müssen den in (d) von Nro. 26 gefundenen Ausdrücken von y_i und x_i zugesetzt werden, um die Veränderung in der Lage des Gegenstandes bei unveränderter Einrichtung des Instrumentes zu berücksichtigen. Die Vergleichung derselben mit den Formeln (a) von Nro. 31 zeigt, dass sie aus den letzteren entstehen, wenn man darin

$$[(K)_e - K_1]\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\,\varphi_1\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2$$

mit

$$-\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right]\left(1 - K_1\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)$$

$(L)_0$ mit $(L')_0$
$(M)_0$ mit $(M')_0$
$3(N)_0$ mit $(O')_0$
$(N)_0$ mit $(N')_0$
$2(S)_0$ mit $-\left(T_i + T_j + \frac{\alpha_j}{v_j}\right)$
$(u)_i$ mit u_j

verwechselt, und dem inclavirten Factor von y_i das Glied

$$(q')_0 \, \Delta\frac{1}{c_1} \, (X_1^2 + Y_1'^2) \, \varphi_1,$$

dem von x_i dagegen das Glied

$$- X_1 \, \Delta\frac{1}{c_1}\left(1 - K_1 \, \Delta\frac{1}{c_1}\right)$$

zusetzt. Da hierdurch jene Formeln leicht auf den gegenwärtigen Fall angewendet werden können, welcher ohnehin selten vorkommt, so werde ich dieselben bei den ferneren Untersuchungen zu Grund legen.

33) Werden die Glieder der dritten und höheren Ordnungen in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen vernachlässigt, so ist es leicht, bei einem beliebigen Werthe von z_i den Einfluss zu berechnen, welchen eine Veränderung in der Lage des Gegenstandes hervorbringt. Wir haben nämlich bei der Entwickelung der Grössen, welche in den Gleichungen (a) von Nro. 26 vorkommen, die durch die Integration eingeführten Constanten $\Delta\frac{1}{c_1}$ und $\Delta\varphi_1$ beibehalten, wodurch willkührliche Veränderungen von $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 ausgedrückt werden. Sammeln wir daher die davon abhängigen Glieder, so wird durch dieselben der erwähnte Einfluss bestimmt. Hiernach ist, wenn nur jene Glieder berücksichtigt werden,

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{V_i}{v_i}\left[(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \quad . \; . \text{ Nro. 8 (g)}$$

$$X_i \, \Delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i}{v_i} \, X_1 \, \Delta\frac{1}{c_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nro. 4 (q)} \\ \text{Nro. 7 (h)} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i = -\frac{K_i}{V_i}\left[(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i = -\frac{K_i}{V_i}\,X_1\,\Delta\frac{1}{c_1} \end{array}\right\} \text{Nro. 25 (a)}$$

Bezeichnen wir nun, wie oben, durch $\mathfrak{D}y_i$ und $\mathfrak{D}x_i$ die Aenderungen, welche y_i und x_i durch eine Veränderung in der Lage des Gegenstandes erleiden, so ist vermöge der allegirten Gleichungen, für einen beliebigen Werth von z_i

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}y_i = -\frac{V_i z_i}{v_i}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i\right]\left[(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ \mathfrak{D}x_i = -\frac{V_i z_i}{v_i}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i\right] X_1\,\Delta\frac{1}{c_1} \end{array}\right\} \text{(a)}$$

welche den in (c) von Nro. 26 gefundenen Ausdrücken von y_i und x_i zugesetzt werden müssen.

Auf gleiche Weise erhält man aus (a) von Nro. 25 die dadurch in ΔY_i und ΔX_i hervorgebrachten Veränderungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{D}\Delta Y_i = -\frac{K_i}{V_i}\left[(\acute{Y}_1 + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ \mathfrak{D}\Delta X_i = -\frac{K_i}{V_i}\,X_1\,\Delta\frac{1}{c_1} \end{array}\right\} \quad . \quad . \text{(b)}$$

welche zu den in (e) von Nro. 26 gegebenen Werthen von ΔY_i und ΔX_i kommen.

Hauptstrahlen.

34) Unter den verschiedenen Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten leuchtenden Punkte ausgehen, giebt es einen von mittlerer Brechbarkeit, dessen Durchschnittspunkt mit der Ebene der Hauptblendung in der Axe des Instrumentes liegt. Diesen Strahl nenne ich den *Hauptstrahl.* Da der Ursprung der Coordinaten $\mathfrak{v}_j$ und $\mathfrak{x}_j$ ebenfalls in der Axe des Instrumentes angenommen worden ist, so hat man für den Hauptstrahl

$$\mathfrak{v}_j = \mathfrak{x}_j = 0$$

folglich auch vermöge (d) von Nro. 22

$$\acute{Y}_1 = X_1 = 0$$

ferner, weil der Hauptstrahl von mittlerer Brechbarkeit angenommen wird,

$$\delta\nu = 0$$

Substituiren wir diese Werthe in den Gleichungen (c) und (e) von Nro. 26, und (a) von Nro. 31, welche für alle Strahlen, mithin auch für den Hauptstrahl gültig sind; bezeichnen wir ferner die Coordinaten x, y, X, Y und Z, die sich auf den Hauptstrahl beziehen, mit zwei Accenten, so erhalten wir in Bezug auf denselben die folgenden Resultate:

I. Die Gleichungen des Hauptstrahles für einen beliebigen Werth von z_i und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung

$$\left.\begin{array}{l} y''_i = \frac{V_i\,z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\varphi_1 + P_i\,\varphi_1^3 \\ -\frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i \{K_i\,\varphi_1 + [P''_j + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3\}\end{array}\right. \\ x''_i = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(a)}$$

II. Die Gleichungen des Hauptstrahles, wenn seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet wird,

$$\left.\begin{array}{l} y''_i = \frac{V_i\,z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1 + [(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ -\frac{\nu_i\,K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i \end{array}\right\}\varphi_1 \\ + \left[P_i + (P)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ + Q_e\,K_1^5\,\varphi_1^5 \end{array}\right. \\ x'' = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

III. Die Coordinaten des Einfallspunktes des Hauptstrahles auf der i^{ten} brechenden Fläche und die Veränderungen derselben, welche durch die Abweichung wegen der Gestalt entstehen,

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{Y}_i &= \frac{K_i\,\varphi_1}{V_i} \\ \overset{''}{X}_i &= 0 \\ \overset{''}{Z}_i &= \frac{K_i^2\,\varphi_1^2}{2a_i\,V_i^2} \\ \Delta\overset{''}{Y}_i &= \frac{1}{V_i}\,[P_i' + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3 \\ \Delta\overset{''}{X}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Die vorhergehenden Werthe von $\overset{''}{x}_i$, $\overset{''}{X}_i$ und $\Delta\overset{''}{X}_i$ zeigen, dass sich der Hauptstrahl ganz in der Ebene der yz befindet, d. h. in derjenigen Ebene, welche durch den dem Hauptstrahle zugehörigen leuchtenden Punkt und die Axe des Instrumentes gelegt ist. Ferner giebt die erste Formel (c), wenn sie auf die erste brechende Fläche angewendet wird, für welche $V_1 = 1$ ist,

$$\overset{''}{Y}_1 = K_1\,\varphi_1$$

Die willkührliche Grösse $K_1\,\varphi_1$, welche in Nro. 4 eingeführt wurde, um den Ausdrücken von Y_1 und Y_i dieselbe Gestalt zu geben, bezeichnet daher die Ordinate des Einfallspunktes des Hauptstrahles auf der ersten brechenden Fläche, wenn man seine Abweichungen vernachlässigt.

Jedem Punkte des Gegenstandes gehört ein besonderer Hauptstrahl zu, dessen Gleichungen aus den vorhergehenden dadurch gefunden werden, dass man statt φ_1 denjenigen Werth nimmt, welcher jenem Punkte entspricht.

In Nro. 2 wurde angenommen, dass die Ebene der yz durch die Axe des Instrumentes und den leuchtenden Punkt gelegt sey. Denken wir uns nun wie in Nro. 26 den Gegenstand, welcher durch das Instrument betrachtet wird, als eine auf der Axe desselben senkrecht stehende Ebene, so können wir die vorhergehenden Gleichungen auf alle Punkte des Gegenstandes anwenden, wenn wir zuerst der Grösse φ_1 nach und nach alle Werthe von $\varphi_1 = 0$ bis zu ihrem äussersten Werthe beilegen, sodann annehmen, dass sich die Ebene der yz um die Axe des Instrumentes dreht, bis sie in ihre anfängliche Lage zurückkommt. In jeder Lage dieser Ebene sind die vorhergehenden Gleichungen anwendbar, und es bezeichnen alsdann $\overset{''}{y}_i$ und $\overset{''}{Y}_i$ die senkrechten Abstände von der Axe des Instrumentes, jedesmal in derjenigen Ebene gemessen, welche durch jene Axe und den entsprechenden Punkt des Gegenstandes gelegt ist, und in welcher sich der Hauptstrahl befindet.

Hieraus folgt ferner, dass $\overset{''}{y}_i$, $\overset{''}{Y}_i$ und $\Delta\overset{''}{Y}_i$ für alle diejenigen Punkte des Gegenstandes einerlei sind, welchen einerlei Werth von φ_1 zugehört, d. h. welche gleichen Abstand von der Axe haben oder in dem Umfange eines mit dem Halbmesser $b_1 = c_1\,\varphi_1$ beschriebenen Kreises liegen.

Coordinaten vom Hauptstrahle an gezählt.

35) Den Ursprung der Coordinaten y_i, x_i, Y_i und X_i haben wir bisher in der Axe des Instrumentes angenommen; für die folgenden Untersuchungen ist es aber bequemer, jene Coordinaten von dem dazu gehörigen Hauptstrahle an zu zählen, die Abscisse z_i dagegen wie bisher beizubehalten. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als von den allgemeinen Coordinaten diejenigen abzuziehen, welche bei einerlei Abscisse z_i dem Hauptstrahle zugehören. Demnach ist, wenn die vom Hauptstrahle an gezählten Coordinaten mit einem Accente bezeichnet werden,

$$
\left.
\begin{aligned}
y'_i &= y_i - y''_i \\
x'_i &= x_i - x''_i = x_i \\
Y'_i &= Y_i - Y''_i \\
X'_i &= X_i - X''_i = X_i
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)
$$

Substituirt man hierin die in (c) und (e) von Nro. 26, (a) von Nro. 31, (a), (b) und (c) von Nro. 34 gefundenen Werthe, so erhält man die folgenden Resultate, bei welchen der Ursprung der Coordinaten y'_i, x'_i, Y'_i und X'_i in dem dazu gehörigen Hauptstrahle angenommen ist, nämlich

I. die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles für einen beliebigen Werth von z_i und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung

$$
\left.
\begin{aligned}
y'_i &= \frac{V_i z_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}
L_i\,(X'^2_1 + Y'^2_1)\,Y'_1 \\
+ M_i\left(\dfrac{X'^2_1 + 3Y'^2_1}{2}\right)\varphi_1 + O_i\,Y'_1\,\varphi_1^2 \\
+ S_i\,Y'_1\,\delta v + T_i\,\varphi_1\,\delta v \\
-\dfrac{v_i}{V_i^2}\left(\dfrac{z-g}{gz}\right)_i \left\{\begin{array}{l}
Y'_1 + [L''_i + (KL - L'')_j]\,(X'^2_1 + Y'^2_1)\,Y'_1 \\
+ [M''_i + (KM - M'')_j]\left(\dfrac{X'^2_1 + 3Y'^2_1}{2}\right)\varphi_1 \\
+ [q'_i - q'_j]\,(X'^2_1 + Y'^2_1)\,\varphi_1 \\
+ [O''_i + (KO - O'')_j]\,Y'_1\,\varphi_1^2 \\
+ [(S)_i + (KS - (S))_j]\,Y'_1\,\delta v \\
+ [(T)_i + (KT - (T))_j]\,\varphi_1\,\delta v
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
x'_i &= \frac{V_i z_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}
L_i\,(X'^2_1 + Y'^2_1)\,X'_1 \\
+ M_i\,X'_1\,Y'_1\,\varphi_1 + N_i\,X'_1\,\varphi_1^2 \\
+ S_i\,X'_1\,\delta v \\
-\dfrac{v_i}{V_i^2}\left(\dfrac{z-g}{gz}\right)_i \left\{\begin{array}{l}
X'_1 + [L''_i + (KL - L'')_j]\,(X'^2_1 + Y'^2_1)\,X'_1 \\
+ [M''_i + (KM - M'')_j]\,X'_1\,Y'_1\,\varphi_1 \\
+ [N''_i + (KN - N'')_j]\,X'_1\,\varphi_1^2 \\
+ [(S)_i + (KS - (S))_j]\,X'_1\,\delta v
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{aligned}
\right\} (b)
$$

II. Die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles, wenn seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet wird, mit Rücksicht auf eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes

$$
y'_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ \begin{array}{l}
\left[L_i + (L)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] (X'^2_1 + Y'^2_1)\, Y'_1 \\
+ \left[M_i + (M)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] \left(\frac{X'^2_1 + 3Y'^2_1}{2}\right) \varphi_1 \\
+ \left[O_i + 3(N)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] Y'_1\, \varphi_1^2 \\
+ Q_e \left[(Y'_1 + K_1\varphi_1)\left(X'^2_1 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2\right)^2 - K_1^5 \varphi_1^5\right] \\
+ \left[S_i + 2(S)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] Y'_1\, \delta v + s_i\, Y'_1\, \delta v^2 \\
+ U_e \left[(Y'_1 + K_1\varphi_1)\left(X'^2_1 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2\right) - K_1^3\varphi_1^3\right] \delta v \\
+ \left[T_i - (u)_i \Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1\, \delta v + t_i\, \varphi_1\, \delta v^2 + W_i\, \varphi_1^3\, \delta v \\
- \frac{v_i}{V_i^2} \left(\frac{z - g}{g z}\right)_i Y'_1
\end{array} \right.
$$

$$
x'_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ \begin{array}{l}
\left[L_i + (L)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] (X'^2_1 + Y'^2_1)\, X'_1 \\
+ \left[M_i + (M)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] X'_1\, Y'_1\, \varphi_1 \\
+ \left[N_i + (N)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] X'_1\, \varphi_1^2 \\
+ Q_e\, X'_1 \left[X'^2_1 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2\right]^2 \\
+ \left[S_i + 2(S)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] X'_1\, \delta v + s_i\, X'_1\, \delta v^2 \\
+ U_e\, X'_1 \left[X'^2_1 + (Y'_1 + K_1\varphi_1)^2\right] \delta v \\
- \frac{v_i}{V_i^2} \left(\frac{z - g}{g z}\right)_i X'_1
\end{array} \right\} \quad \text{(c)}
$$

III. Die Coordinaten des Einfallspunktes auf der i*ten* *brechenden Fläche und die Veränderungen derselben, welche durch die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung hervorgebracht werden,*

$$
\left. \begin{array}{l}
Y'_i = \frac{Y'_1}{V_i} \\
X'_i = \frac{X'_1}{V_i} \\
Z'_i = \frac{X'^2_1 + Y'^2_1 + 2K_i\, Y'_1\, \varphi_1}{2 a_i V_i^2}
\end{array} \right\} \quad \text{(d)}
$$

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta \acute{Y}_i = \dfrac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}[L'_i + (KL - L'')_j]\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\ + [M'_i + (KM - M'')_j]\left(\dfrac{\acute{X}_1^2 + 3\,\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\ + [q_i - q'_j]\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\ + [O'_i + (KO - O'')_j]\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2\end{array}\right. \\
\Delta \acute{X}_i = \dfrac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}[L'_i + (KL - L'')_j]\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{X}_1 \\ + [M'_i + (KM - M'')_j]\,\acute{X}_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\ + [N'_i + (KN - N'')_j]\,\acute{X}_1\,\varphi_1^2\end{array}\right. \\
\delta \acute{Y}_i = \dfrac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}[(S)_i + (KS - (S))_j]\,\acute{Y}_1\,\delta v \\ + [(T)_i + (KT - (T))_j]\,\varphi_1\,\delta v\end{array}\right. \\
\delta \acute{X}_i = \dfrac{1}{V_i}\,[(S)_i + (KS - (S))_j]\,\acute{X}_1\,\delta v
\end{array}\right\} \quad (d)$$

Um die vorhergehenden Formeln auf alle Punkte des Gegenstandes anzuwenden, müssen wir, wie in der vorhergehenden Nummer, zuerst der Grösse φ_1 nach und nach alle Werthe von $\varphi_1 = 0$ bis zu ihrem äussersten Werthe beilegen; sodann müssen wir annehmen, dass sich die Ebene der yz um die Axe des Instrumentes dreht, bis sie in ihre anfängliche Lage zurückkommt. In den verschiedenen Lagen jener Ebene beziehen sich alsdann die Coordinaten $\acute{y}_i$, $\acute{x}_i$, $\acute{Y}_i$ und $\acute{X}_i$ auf zwei bewegliche Axen, so dass die Axe der y jedesmal in der Ebene des entsprechenden Hauptstrahles liegt, die Axe der $\acute{x}$ dagegen auf dieser Ebene senkrecht steht.

Es würde leicht seyn, die Coordinaten vermittelst der bekannten Formeln zur Verwandlung derselben in andere umzuändern, welche sich auf fixe Axen beziehen; die Folge wird jedoch zeigen, dass die beweglichen Axen für den Gebrauch, welchen man von den vorhergehenden Formeln macht, bequemer sind, daher es unnütz ist, jene Verwandlung vorzunehmen.

Gleichungen der einfallenden Strahlen.

36) Die Gleichungen des einfallenden Strahles können aus (b) und (d) von Nro. 1 gefunden werden, wenn man darin statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ihre Werthe substituirt, die Resultate sodann in Reihen entwickelt, sowie es bei dem gebrochenen Strahle geschehen ist. Man erhält sie aber auch sehr leicht und ohne vorherige Entwickelung aus den Gleichungen des gebrochenen Strahles, wenn man, wie am Ende von Nro. 2, voraussetzt, dass der Strahl, ehe er die erste brechende Fläche trifft, durch eine eingebildete Fläche gegangen ist, welche mit jener zusammenfällt und keine brechende Kraft ausübt. Unter dieser Voraussetzung ist der durch die eingebildete Fläche gebrochene Strahl mit dem einfallenden einerlei, und die Gleichungen

des letzteren folgen unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen des gebrochenen Strahles, wenn man darin diejenigen Werthe substituirt, welche sich auf die eingebildete Fläche beziehen.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des einfallenden Strahles mit den bisher gebrauchten Buchstaben, ohne Index; unterscheiden wir ferner die Buchstaben, welche sich auf die eingebildete Fläche beziehen, durch den Index 0, so ist

$$a_0 = a_1$$
$$c_0 = g_0 = c_1$$
$$d_0 = 0$$
$$n_0 = \nu_0 = 1$$
$$\alpha_0 = \gamma_0 = 0$$
$$V_0 = 1$$
$$K_0 = K_1$$

Die Coefficienten A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, $(A)_0$, $(B)_0$, $(C)_0$, L_0, M_0, N_0, O_0, P_0, Q_0, L''_0, M''_0, N''_0, O''_0, P''_0, q'_0, $(L)_0$, $(M)_0$, $(N)_0$, S_0, T_0, $(S)_0$, $(T)_0$, s_0, t_0, werden sämmtlich $= 0$.

Ferner ist hinsichtlich des Einfallspunktes des Strahles auf der ersten brechenden Fläche

$$X_0 = X_1$$
$$Y_0 = Y_1$$
$$Z_0 = Z_1$$
$$l^0 = l^{(1)} = -\frac{1}{2a_1 c_1}$$
$$q_0 = q_1 = q^{(0)} = q^{(1)} = \frac{1}{2a_1}$$
$$L'_0 = L'_1 = l^{(1)}$$
$$M'_0 = M'_1 = 2l^{(1)} K_1$$
$$N'_0 = N'_1 = l^{(1)} K_1^2$$
$$O'_0 = O'_1 = 3l^{(1)} K_1^2 + 2q^{(1)} K_1$$
$$P'_0 = P'_1 = l^{(1)} K_1^3 + q^{(1)} K_1^2$$

Vermittelst dieser Werthe erhalten wir aus (a) und (c) von Nro. 34:

I. die Gleichungen des einfallenden Hauptstrahles für einen beliebigen Werth von z und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y} &= z\varphi_1 - \left(\frac{z - c_1}{c_1}\right)[K_1 \varphi_1 + (KP - P'')_1 \varphi_1^3] \\ \overset{''}{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

II. Die Coordinaten des Einfallspunktes des einfallenden Hauptstrahles auf der ersten brechenden Fläche und die Veränderungen, welche durch die Abweichungen wegen der Gestalt entstehen,

$$\left.\begin{aligned}
\overset{''}{Y} &= K_1\,\varphi_1 \\
\overset{''}{X} &= 0 \\
\overset{''}{Z} &= \frac{K_1^2\,\varphi_1^2}{2a_1} \\
\Delta\overset{''}{Y} &= [P_1' + (K P - P'')_j]\,\varphi_1 \\
\Delta\overset{''}{X} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Ferner geben die Formeln (b) und (d) von Nro. 35:

III. die Gleichungen des einfallenden allgemeinen farbigen Strahles für einen beliebigen Werth von z und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung

$$\left.\begin{aligned}
\acute{y} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left\{\begin{aligned}
&\acute{Y}_1 + (K L - L'')_j\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\
&+ (K M - M'')_j\left(\frac{\acute{X}_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\
&- q_j'\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 + (K O - O'')_j\,\acute{Y}_1\,\varphi_1^2 \\
&+ (K S - (S))_j\,\acute{Y}_1\,\delta v + (K T - (T))_j\,\varphi_1\,\delta v
\end{aligned}\right. \\
\acute{x} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left\{\begin{aligned}
&\acute{X}_1 + (K L - L'')_j\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{X}_1 \\
&+ (K M - M'')_j\,\acute{X}_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\
&+ (K N - N'')_j\,\acute{X}_1\,\varphi_1^2 + (K S - (S))_j\,\acute{X}_1\,\delta v
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

IV. Die Coordinaten des Einfallspunktes desselben auf der ersten brechenden Fläche und die Veränderungen, welche dabei durch die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung hervorgebracht werden,

$$\left.\begin{aligned}
\acute{Y} &= \acute{Y}_1 \\
\acute{X} &= \acute{X}_1 \\
\acute{Z} &= \frac{\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2 + 2K_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1}{2a_1} \\
\Delta\acute{Y} &= [L_1' + (K L - L'')_j]\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{Y}_1 \\
&\quad + [M_1' + (K M - M'')_j]\left(\frac{\acute{X}_1^2 + 3\acute{Y}_1^2}{2}\right)\varphi_1 \\
&\quad + [q_1 - q_j']\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\varphi_1 \\
&\quad + [O_1' + (K O - O'')_j]\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\
\Delta\acute{X} &= [L_1' + (K L - L'')_j]\,(\acute{X}_1^2 + \acute{Y}_1^2)\,\acute{X}_1 \\
&\quad + [M_1' + (K M - M'')_j]\,\acute{X}_1\,\acute{Y}_1\,\varphi_1 \\
&\quad + [N_1' + (K N - N'')_j]\,\acute{X}_1\,\varphi_1^2 \\
\delta\acute{Y} &= [(K S - (S))]_j\,\acute{Y}_1\,\delta v + [K T - (T)]_j\,\varphi_1\,\delta v \\
\delta\acute{X} &= [K S - (S)]_j\,\acute{X}_1\,\delta v
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

in welchen Formeln auch statt $[KS-(S)]_j$ und $[KT-(T)]_j$ ihre Werthe

$$[KS-(S)]_j = \left(T+\frac{\alpha}{v}\right)_j$$
$$[KT-(T)]_j = u_j$$

aus (q) und (s) von Nro. 17 substituirt werden können.

Die Voraussetzungen, welche in Nro. 27 bei Berechnung der von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängigen Glieder gemacht wurden, finden bei dem einfallenden Strahle keine Anwendung; lässt man daher jene Glieder in den Gleichungen (b) von Nro. 34 und (c) von Nro. 35 weg und wendet dieselben auf den einfallenden Strahl an, so verwandeln sie sich in die obigen Gleichungen (a) und (c) mit Weglassung der Producte von $\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)$ in Grössen der zweiten Ordnung, daher es unnütz ist, sie besonders zu schreiben.

Da der leuchtende Punkt der Vereinigungspunkt der einfallenden Strahlen ist, so vertritt derselbe dabei die Stelle des Bildes, so dass sich die Formeln, welche bei den gebrochenen Strahlen nur in der Nähe des Bildes brauchbar sind, bei dem einfallenden Strahle nur in der Nähe des leuchtenden Punktes Anwendung finden, was die Vernachlässigung der erwähnten Producte zur Folge hat.

Endlich erhält man aus (d) von Nro. 32, wenn man bemerkt, dass die Coefficienten $(L')_e$ u. s. w. eigentlich den Index i haben, welcher nur in e verwandelt wurde, um die von den Ocularen herrührenden Glieder zu vernachlässigen, daher gegenwärtig e mit 0 verwechselt werden muss,

$$(L')_0 = -(KL-L'')_j$$
$$(M')_0 = -(KM-M'')_j$$
$$(N')_0 = -(KN-N'')_j$$
$$(O')_0 = -(KO-O'')_j$$
$$(P')_0 = -(KP-P'')_j$$
$$(q')_0 = q'_j$$

Hierdurch werden vermöge (i) von Nro. 32, (a) und (b) von Nro. 33

V. die Veränderungen, welche die Coordinaten der einfallenden Strahlen und ihrer Einfallspunkte durch eine Veränderung in der Lage des Gegenstandes erleiden,

1) in Bezug auf die Coordinaten der Strahlen bei einem beliebigen Werthe von z und mit Vernachlässigung der Glieder der dritten Ordnung,

für den Hauptstrahl

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D}\overset{''}{y} &= -z\left[1-K_1\left(\frac{z-c_1}{c_1 z}\right)\right]\left(K_1\,\varphi_1\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\right)\\ \mathfrak{D}\overset{''}{x} &= 0\end{aligned}\right\}\quad (e)$$

für den allgemeinen farbigen Strahl

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}y' &= -z\left[1-K_1\left(\frac{z-c_1}{c_1 z}\right)\right] Y_1' \Delta\frac{1}{c_1} \\ \mathfrak{D}x' &= -z\left[1-K_1\left(\frac{z-c_1}{c_1 z}\right)\right] X_1' \Delta\frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(f)}$$

2) in Bezug auf die Coordinaten der Strahlen in der Nähe des leuchtenden Punktes,

für den Hauptstrahl

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}y'' &= -z\left\{\begin{aligned} &\left(K_1 \varphi_1 \Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right)\left(1-K_1\Delta\frac{1}{c_1}\right) \\ &+(K P - P'')_j \varphi_1^3 \Delta\frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \\ \mathfrak{D}x'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(g)}$$

für den allgemeinen farbigen Strahl

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}y' &= -z\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned} &Y_1'\left(1-K_1\Delta\frac{1}{c_1}\right) + (K L - L'')_j (X_1'^2 + Y_1'^2) Y_1' \\ &+(K M - M'')_j \left(\frac{X_1'^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ &-q_j' (X_1'^2 + Y_1'^2)\varphi_1 + (K O - O'')_j Y_1' \varphi_1^2 \\ &+\left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j Y_1' \delta_\nu + u_j \varphi_1 \delta_\nu \end{aligned}\right. \\ \mathfrak{D}x' &= -z\Delta\frac{1}{c_1}\left\{\begin{aligned} &X_1'\left(1-K_1\Delta\frac{1}{c_1}\right) + (K L - L'')_j (X_1'^2 + Y_1'^2) X_1' \\ &+(K M - M'')_j X_1' Y_1' \varphi_1 \\ &+(K N - N'')_j X_1' \varphi_1^2 + \left(T+\frac{\alpha}{\nu}\right)_j X_1' \delta_\nu \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

3) in Bezug auf die Coordinaten der Einfallspunkte,

für den Hauptstrahl

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}\Delta Y'' &= -K_1\left[K_1\varphi_1\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ \mathfrak{D}\Delta X'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

für den allgemeinen farbigen Strahl

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}\Delta Y' &= -K_1 Y_1' \Delta\frac{1}{c_1} \\ \mathfrak{D}\Delta X' &= -K_1 X_1' \Delta\frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(k)}$$

Bei dem ersten Anblick fällt es auf, dass die Gleichungen der einfallenden Strahlen von der Farbenzerstreuung abhängen, da doch in jedem derselben Strahlen von allen Farben vereinigt sind. Der Grund hiervon lässt sich jedoch leicht einsehen, wenn wir uns an das in Nro. 22 und den folgenden Nummern gebrauchte Verfahren erinnern, wonach der Einfallspunkt eines jeden Strahles auf der

ersten brechenden Fläche nicht als gegeben betrachtet, sondern durch die Bedingung bestimmt wurde, dass der Strahl durch einen gegebenen Punkt der Hauptblendung gehen sollte. Verfolgen wir nun die Wege der verschiedenen farbigen Strahlen, welche durch denselben Punkt der Hauptblendung gehen, so ist ersichtlich, dass dieselben zwischen dieser und der ersten brechenden Fläche, wegen der verschiedenen Brechbarkeit der Strahlen, nicht zusammenfallen können. Hiernach durchschneiden jene Strahlen die erste brechende Fläche in verschiedenen Punkten und gehören daher nicht einem und demselben einfallenden Strahle an, sondern es ist jeder farbige Strahl aus einem anderen einfallenden Strahle entnommen. Dieser Umstand wird durch die von der Farbenzerstreuung abhängigen Glieder in den vorhergehenden Formeln ausgedrückt.

Soll der Ursprung der Coordinaten in der Axe des Instrumentes angenommen werden, so ist vermöge (a) von Nro. 35

$$\left.\begin{aligned} y &= y' + y'' \\ x &= x' \\ Y &= Y' + Y'' \\ X &= X' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wodurch jene Coordinaten leicht vermittelst der vorhergehenden Formeln erhalten werden.

Bezeichnungen und Berechnung der in den Formeln enthaltenen Grössen.

37) Die Bezeichnungen, welche in den Formeln der vorhergehenden Nummern vorkommen, sind bei der früheren Entwickelung so zerstreut eingeführt worden, dass es zweckmässig erscheint, sie hier zu sammeln und Alles hinzuzufügen, was zur Berechnung der in den Formeln enthaltenen Grössen erforderlich ist.

Hiernach bezeichnet

c_1 die auf der Axe des Instrumentes gemessene Entfernung des Gegenstandes von der ersten brechenden Fläche. Der Gegenstand wird als eine auf jener Axe senkrecht stehende Ebene betrachtet;

φ_1 die Tangente des Winkels, welchen eine von einem beliebigen Punkte des Gegenstandes nach dem Scheitel der ersten brechenden Fläche gezogene Linie mit der Axe des Instrumentes macht;

$\Delta\frac{1}{c_1}$ eine willkührliche Veränderung von $\frac{1}{c_1}$, welche dadurch entsteht, dass der Gegenstand sich näher bei dem Instrumente befindet, als bei der ursprünglichen Berechnung desselben angenommen wurde;

a_m den Halbmesser der m^{ten} brechenden Fläche, so genommen, dass ihre Concavität dem Gegenstande zugekehrt ist;

d den zwischen der m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Fläche liegenden Theil der Axe, oder ihre Entfernung von einander;

c_m und g_m die Vereinigungsweiten vor und nach der Brechung durch die m^{te} Fläche, beide von dieser Fläche an gezählt und vor derselben angenommen;

n_m das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles bei dem Uebergange aus dem $(m-1)^{ten}$ in das m^{te} durchsichtige Mittel;

ν_m das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles unter der Voraussetzung, dass derselbe unmittelbar in das m^{te} durchsichtige Mittel dringt, ohne die vorhergehenden zu durchlaufen;

ν dasselbe für denjenigen Körper, welcher zur Vergleichung der übrigen gebraucht wird;

$\delta\nu_m$ und $\delta\nu$ die Veränderungen, welche ν_m und ν erleiden, wenn man von dem mittleren Strahle zu dem allgemeinen farbigen Strahle übergeht;

α_m, β_m, γ_m Coefficienten, welche von der farbenzerstreuenden Kraft des m^{ten} und $(m-1)^{ten}$ Mittels abhängen, so dass

$$\delta\nu_m = \alpha_m\,\delta\nu + \beta_m\,\delta\nu^2$$

$$\gamma_m = \frac{\beta_m - n_m\,\beta_{m-1}}{\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}}$$

x_i, y_i, z_i die rechtwinkeligen Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles nach seiner Brechung durch die i^{te} Fläche;

X_i, Y_i, Z_i die Coordinaten seines Einfallspunktes auf der i^{ten} Fläche, ohne Rücksicht auf die Abweichungen;

ΔX_i, ΔY_i, ΔZ_i die Aenderungen, welche die letzteren Coordinaten durch die Abweichung wegen der Gestalt erleiden;

δX_i, δY_i, δZ_i die correspondirenden Veränderungen wegen der Farbenzerstreuung.

Der Ursprung dieser Coordinaten befindet sich im Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche, die Axe der z fällt mit der Axe des Instrumentes zusammen, die Ebene der yz ist eine durch diese Axe und den leuchtenden Punkt gelegte Ebene, die z werden als positiv angenommen, wenn sie vor dem Scheitel der i^{ten} Fläche, d. h. nach dem Gegenstande zu liegen, die y dagegen, wenn sie sich mit der Ordinate des leuchtenden Punktes auf einerlei Seite der Axe befinden.

x''_i, y''_i, X''_i, Y''_i, $\Delta X''_i$, $\Delta Y''_i$ die den vorhergehenden entsprechenden Grössen in Bezug auf den Hauptstrahl;

x'_i, y'_i, X'_i, Y'_i, $\Delta X'_i$, $\Delta Y'_i$, $\delta X'_i$, $\delta Y'_i$ die correspondirenden Grössen in Bezug auf den allgemeinen farbigen Strahl, wenn der Ursprung der x'_i, y'_i, X'_i und Y'_i in dem dazu gehörigen Hauptstrahle angenommen wird;

e den Index der letzten Fläche des achromatischen Objectivs;

j den Index derjenigen Fläche, hinter welcher die Hauptblendung steht;

ζ_j den Abstand der Hauptblendung von der j^{ten} Fläche, *hinter* derselben angenommen;

ζ'_{j+1} den Abstand der Hauptblendung von der $(j+1)^{ten}$ Fläche, *vor* derselben angenommen;

ξ_j, v_j die Coordinaten des Durchschnitts zwischen dem allgemeinen farbigen Strahle und der Ebene der Hauptblendung, von der Axe des Instrumentes an gezählt.

Zuerst berechnet man die sämmtlichen Vereinigungsweiten vermittelst der Formeln

$$c_m = g_{m-1} + d_{m-1}$$

$$\frac{1}{g_m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m \frac{1}{a_m} + \frac{1}{n_m c_m}$$

indem man von dem bekannten c_1 ausgeht, dem Index m nach und nach alle Werthe von $m = 1$ bis $m = i$ giebt und die Formeln abwechselnd gebraucht, oder man bedient sich hierzu der anderen in Nro. 4 angegebenen Methode. Sodann erhält man V_m und K_m für sämmtliche Werthe des Index sehr leicht, wenn man die in Nro. 4 gefundenen Formeln unter die Gestalt bringt

$$V_1 = 1$$

$$V_m = \frac{V_{m-1}\, g_{m-1}}{c_m}$$

$$K^{(m)} = -\frac{V_{m-1}\, V_m\, d_{m-1}}{v_{m-1}}$$

$$K_m = K_{m-1} + K^{(m)}$$

und wenn man dem Index m nach und nach alle Werthe von $m = 2$ bis $m = i$ giebt. Bei dem Gebrauche der letzteren Formeln muss K_1 als bekannt angenommnn werden, welches entweder unmittelbar gegeben ist oder aus der Stellung der Hauptblendung berechnet wird, vermittelst der Formeln:

$$K_1 = -\Sigma_2^j K^{(m)} + \frac{V_j^2}{v_j}\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j$$

$$= -\Sigma_2^{j+1} K^{(m)} - \frac{V_{j+1}^2}{v_j}\left(\frac{c\zeta'}{c-\zeta'}\right)_{j+1}$$

Ebenso sind $\acute{Y}_1$ und $\acute{X}_1$ entweder unmittelbar gegeben, oder sie werden, wenn die Stellung der Hauptblendung bekannt ist, durch die Formeln erhalten:

$$\acute{Y}_1 = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j$$

$$\acute{X}_1 = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j$$

Setzt man ferner

$$h_m = \frac{1}{c_m}$$

$$k_m = \frac{1}{a_m} - \frac{1}{c_m}$$

so werden die übrigen Coefficienten auf folgende Weise gefunden:

$$A_m = -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)_m k_m^2\,(k-nh)_m$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m^2 \left(\frac{1}{a}-\left(\frac{n+1}{c}\right)\right)_m$$

$$B_m = -\left(\frac{n-1}{n^2}\right)_m k_m\,(k-nh)_m$$

$$= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\left(\frac{n+1}{c}\right)\right)_m$$

$$C_m = -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)_m k_m = -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m$$

$$D_m = -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m [(n+3)\,k-2nh]_m$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m \left[\frac{n+3}{a}-\frac{3(n+1)}{c}\right]_m$$

$$E_m = -\left(\frac{n^2-1}{2}\right)_m$$

$$(A)_m = \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)_m k_m [(n+3)\,k-2nh]_m$$

$$= \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m \left[\frac{n+3}{a}-\frac{3(n+1)}{c}\right]_m$$

$$= -\frac{D_m\,k_m}{n_m}$$

$$(B)_m = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m [(n+2)\,k-nh]_m$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)_m \left[\frac{n+2}{a}-\frac{2(n+1)}{c}\right]_m$$

$$(C)_m = \left(\frac{n^2-1}{2}\right)_m = -E_m$$

$$(A')_m = -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m [(2n+3)\,k-nh]_m$$

$$= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m \left[\frac{2n+3}{a}-\frac{3(n+1)}{c}\right]_m$$

$$(A'')_m = \left(\frac{n^2-1}{2}\right)_m = -E_m$$

$$[A]_m = \frac{k_m^2}{2n_m^3}\,[(2n-3)\,k-n\,(n-2)\,h]_m$$

$$= \frac{1}{2n_m^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m^2 \left[\frac{2n-3}{a}-\left(\frac{n^2-3}{c}\right)\right]_m$$

$$[B]_m = \frac{k_m}{n_m^2}\left[(n-2)k+nh\right]_m$$
$$= \frac{1}{n_m^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m\left[\frac{n-2}{a}+\frac{2}{c}\right]_m$$
$$[C]_m = -\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)_m k_m = -\left(\frac{n^2+1}{2n}\right)_m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m$$
$$[D]_m = -\frac{1}{2n_m}\left[(n^2+3)k-2n^2h\right]_m$$
$$= -\frac{1}{2n_m}\left[\frac{n^2+3}{a}-\frac{3(n^2+1)}{c}\right]_m$$
$$[E]_m = -n_m^2$$
$$[A']_m = -\frac{k_m^2}{2n_m}(k-h)_m = -\frac{1}{2n_m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m^2\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{c}\right)_m$$
$$[B']_m = -k_m(k-h)_m = -\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{c}\right)_m$$
$$[D']_m = -n_m(2k-h)_m = -n_m\left(\frac{2}{a}-\frac{3}{c}\right)_m$$
$$[E']_m = -n_m^2 = [E]_m$$
$$[A'']_m = \frac{k_m^2}{2n_m^3}\left[(n-2)k+nh\right]_m$$
$$= \frac{1}{2n_m^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m^2\left[\frac{n-2}{a}+\frac{2}{c}\right]_m$$
$$[B'']_m = \frac{k_m}{n_m^2}\left[(n-2)k+nh\right]_m$$
$$= \frac{1}{n_m^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m\left[\frac{n-2}{a}+\frac{2}{c}\right]_m$$
$$= [B]_m$$
$$[D'']_m = \frac{1}{n_m}\left[(n-3)k+nh\right]_m$$
$$= \frac{1}{n_m}\left[\frac{n-3}{a}+\frac{3}{c}\right]_m$$
$$[E'']_m = -1$$
$$F_m = \frac{k_m^2}{8n_m^2}\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{a^2}\left[k-(n-1)h\right]+\frac{k}{n^3}(k+n^2h)^2\\ +\frac{2(n-1)^2}{n^3}k(k-nh)^2\end{array}\right\}_m$$
$$= \frac{1}{8n_m^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)_m^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{n}{c}\right)+\frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{n^2-1}{c}\right)^2\\ +\frac{2(n-1)^2}{n^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left[\frac{1}{a}-\frac{(n+1)}{c}\right]^2\end{array}\right\}_m$$
$$L^{(m)} = \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m$$
$$M^{(m)} = \left(\frac{2A_\nu \mathrm{K}}{V^4}+\frac{B}{V^2}\right)_m$$

$$N^{(m)} = \left(\frac{A_\nu K^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{C}{\nu}\right)_m$$

$$O^{(m)} = \left(\frac{3A_\nu K^2}{V^4} + \frac{3BK}{V^2} + \frac{D}{\nu}\right)_m$$

$$P^{(m)} = \left(\frac{A_\nu K^3}{V^4} + \frac{3BK^2}{2V^2} + \frac{DK}{\nu} + \frac{EV^2}{\nu^2}\right)_m$$

Zur Berechnung der Coefficienten $L'^{(m)}$ etc. hat man für alle Werthe des Index von $m = 1$ bis $m = (i-1)$:

$$l^{(m)} = \left[\frac{(n-1)k}{2naV^2}\right]_m = \left[\frac{(n-1)}{2naV^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right]_m$$

$$q^{(m)} = \left(\frac{n-1}{2\nu a}\right)_m = \frac{1}{2\nu_{m-1}}\left(\frac{n-1}{na}\right)_m$$

sodann für $m = i$:

$$l^{(i)} = -\left(\frac{1}{2acV^2}\right)_i$$

$$q^{(i)} = \left(\frac{n}{2\nu a}\right)_i = \frac{1}{2\nu_{i-1}\, a_i}$$

worauf die Coefficienten $L'^{(m)}$ etc. für alle Werthe von m durch die folgenden Formeln erhalten werden:

$$L'^{(m)} = K^{(m)} L_{m-1} + l^{(m)}$$

$$M'^{(m)} = K^{(m)} M_{m-1} + 2l^{(m)} K_m$$

$$N'^{(m)} = K^{(m)} N_{m-1} + l^{(m)} K_m^2$$

$$O'^{(m)} = K^{(m)} O_{m-1} + 3l^{(m)} K_m^2 + 2q^{(m)} K_m$$

$$P'^{(m)} = K^{(m)} P_{m-1} + l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2$$

In Bezug auf $L''^{(m)}$ etc. dagegen ist für sämmtliche Werthe des Index

$$l^{(m)} = \left[\frac{(n-1)k}{2naV^2}\right]_m = \left[\frac{(n-1)}{2naV^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\right]_m$$

$$q'^{(m)} = q^{(m)} = \left(\frac{n-1}{2\nu a}\right)_m$$

$$L''^{(m)} = K^{(m)} L_{m-1} + l^{(m)}$$

$$M''^{(m)} = K^{(m)} M_{m-1} + 2l^{(m)} K_m$$

$$N''^{(m)} = K^{(m)} N_{m-1} + l^{(m)} K_m^2$$

$$O''^{(m)} = K^{(m)} O_{m-1} + 3l^{(m)} K_m^2 + 2q^{(m)} K_m$$

$$P''^{(m)} = K^{(m)} P_{m-1} + l^{(m)} K_m^3 + q^{(m)} K_m^2$$

so dass die vorhergehenden, einfach und doppelt accentuirten Coefficienten, nur in Ansehung des Index i von einander verschieden sind.

Ferner ist

$$(L)^{(m)} = \left[\frac{(A)}{V^2} - \frac{4A_\nu}{V^4}(K - K_1)\right]_m$$

$$(M)^{(m)} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2(A)K}{V^2} + \dfrac{(B)}{\nu} \\ - \dfrac{2A_\nu}{V^4}\left(3K^2 - 2KK_1 - (K)_\circ^2\right) - \dfrac{2B}{V^2}(K - K_1) \end{array}\right\}_m$$

$$(N)^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(A)\,K^2}{V^2} + \frac{(B)\,K}{v} + \frac{(C)\,V^2}{v^2} \\ - \frac{2\,A\,v\,K}{V^4}\left(K^2 - (K)_e^2\right) - \frac{B}{V^2}\left(K^2 - (K)_e\right) \end{array} \right\}_m$$

$$(P)^{(m)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(A)\,K^3}{V^2} + \frac{3\,(B)\,K^2}{2\,v} + \frac{3\,(C)\,V^2\,K}{v^2} \\ - \frac{A\,v\,K^2}{V^4}\left(K^2 + 2\,K\,K_1 - 3\,(K)_e^2\right) - \frac{3\,B\,K}{V^2}\left(K\,K_1 - (K)_e^2\right) \\ + \frac{D}{v}\left(K^2 - 2\,K\,K_1 + (K)_e^2\right) + \frac{2\,E\,V^2}{v^2}\left(K - K_1\right) \end{array} \right\}_m$$

worin alle Grössen, welche nicht mit dem Index 1 oder e versehen sind, den Index m haben, und entweder

$$(K)_e = 0$$

oder

$$(K)_e = K_e - V_e^2\,g_e$$

gesetzt werden muss, je nachdem die Hauptblendung an dem Objective oder an den Ocularen angebracht ist;

$$\begin{aligned}
Q^{(m)} &= \frac{F_m\,v_m}{V_m^6} + 2\,L^{(m)}\,L'_m - \frac{(A)_m\,L_{m-1}}{V_m^2} \\
&\quad - K^{(m)}\,L_{m-1}^2 \\
S^{(m)} &= - \frac{k_m}{V_m^2\,n_m}\left(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}\right) \\
T^{(m)} &= K_m\,S^{(m)} - \frac{1}{v_m}\left(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}\right) \\
&= K_m\,S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{v_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{v_{m-1}}\right) \\
(S)^{(m)} &= K^{(m)}\,S_{m-1} \\
s^{(m)} &= S^{(m)}\,\gamma_m - K^{(m)}\,S_{m-1}^2 \\
(T)^{(m)} &= K^{(m)}\,T_{m-1} \\
u^{(m)} &= K_m\,T^{(m)} \\
U^{(m)} &= - \frac{(A)_m\,S_{m-1}}{V_m^2} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m \\
&\quad + \frac{[A]_m}{V_m^4}\left(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}\right) + \frac{A_m\,\alpha_m}{V_m^4} \\
&= - \frac{(A)_m\,S_m}{V_m^2} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m \\
&\quad + \frac{[A']_m}{V_m^4}\left(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}\right) + \frac{A_m\,\alpha_m}{V_m^4} \\
&= - \frac{(A)_m\,S_{m-1}}{V_m^2} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m \\
&\quad + \frac{[A'']_m}{V_m^4}\left(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}\right) + \frac{n_m\,A_m\,\alpha_{m-1}}{V_m^4}
\end{aligned}$$

Soll nur T_i berechnet werden, so kann man für alle Werthe des Index von $m = 1$ bis $m = (i - 1)$

$$T^{(m)} = K_m\,S^{(m)}$$

sodann für $m = i$

$$T^{(i)} = K_i\, S^{(i)} - \frac{\alpha_i}{\nu_i}$$

setzen.

Aus den mit dem oberen Index versehenen Coefficienten werden die correspondirenden mit dem unteren Index dadurch erhalten, dass man die Summe der ersteren von $m = 1$ bis zu dem durch den unteren Index angegebenen Werthe von m nimmt, wonach z. B.

$$L_i = \Sigma_1^i L^{(m)}$$

ist.

Sodann hat man

$$(L')_e = (L)_e - L''_e - (K\, L - L'')_j$$
$$(M')_e = (M)_e - M''_e - (K\, M - M'')_j$$
$$(N')_e = (N)_e - N''_e - (K\, N - N'')_j$$
$$(O')_e = 3\,(N)_e - O''_e - (K\, O - O'')_j$$
$$(P')_e = (P)_e - P''_e - (K\, P - P'')_j$$
$$(q')_e = -(q'_e - q'_j)$$

wobei in den Coefficienten $(L)_e$ etc.

$$(K)_e = 0$$

gesetzt werden muss.

Endlich ist

$$t_i = u_j\, S_i + \Sigma_{m\,1}^{i} \left[T^{(m)}\, \gamma_m + K^{(m)}\, T_{m-1}\, (S_i - S_{m-1})\right]$$
$$(u)_i = u_e + (S_i - S_e)\, (K)_e^2$$

und in dieser Formel entweder

$$(K)_e = K_e - V_e^2\, g_e$$

oder

$$S_i = S_e = 0$$

je nachdem die Hauptblendung am Objective oder an den Ocularen angebracht ist;

$$[P]^{(m)} = \left[\frac{(A)\, K^3}{V^2} + \frac{3\,(B)\, K^2}{2\,\nu} + \frac{3\,(C)\, V^2\, K}{\nu^2}\right]_m$$

$$[P']^{(m)} = \left[\frac{[A]\, K^3}{V^4} + \frac{3\,[B]\, K^2}{2\, V^2\, \nu} + \frac{[D]\, K}{\nu^2} + \frac{[E]\, V^2}{\nu^3}\right]_m$$

$$[P'']^{(m)} = \left[\frac{[A']\, K^3}{V^4} + \frac{3\,[B']\, K^2}{2\, V^2\, \nu} + \frac{[D']\, K}{\nu^2} + \frac{[E']\, V^2}{\nu^3}\right]_m$$

$$[P''']^{(m)} = \left[\frac{[A'']\, K^3}{V^4} + \frac{3\,[B'']\, K^2}{2\, V^2\, \nu} + \frac{[D'']\, K}{\nu^2} + \frac{[E'']\, V^2}{\nu^3}\right]_m$$

$$w^{(m)} = O^{(m)}\, K_m^2 - 2\, P^{(m)}\, K_m - [P]^{(m)}$$
$$= \left[\frac{A\, \nu\, K^4}{V^4} - \frac{(A)\, K^3}{V^2} + \frac{(A')\, K^2}{\nu} - \frac{(A'')\, V^2\, K}{\nu^2}\right]_m$$

$$W_i = -S_i\,[w_i - w_j] + \Sigma_{m\,1}^{i} \left\{ \begin{array}{l} O^{(m)}\, [(T)_m - (K\, T - (T))_j] \\ + (O^{(m)}\, K_m - 2\, P^{(m)}) \left[(S)_m + \frac{\alpha_m}{\nu_m}\right] \\ - [P]^{(m)}\, S_{m-1} \\ + [P']^{(m)}\, (\alpha_m - n_m\, \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

$$= w_j S_i + \Sigma_m^i \left\{ \begin{array}{l} - O^{(m)} (u_m - u_j) + 2 P^{(m)} T_m \\ - w^{(m)} (S_i - S_m) + [P'']^{(m)} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

$$= w_j S_i + \Sigma_m^i \left\{ \begin{array}{l} - O^{(m)} (u_{m-1} - u_j) + 2 P^{(m)} T_{m-1} \\ - w^{(m)} (S_i - S_{m-1}) + [P''']^{(m)} (\alpha_m - n_m \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

Um W_i nach der zweiten oben angegebenen Methode zu finden, berechnet man zuerst nach den vorhergehenden Formeln für den mittleren Strahl die sämmtlichen Vereinigungsweiten von c_1 bis g_i, sodann P_i, u_j und w_j. Hierauf wählt man nach Willkühr einen von den verschiedenen farbigen Strahlen, dessen Brechungsverhältniss in Bezug auf den zur Vergleichung dienenden Körper $(\nu + \delta' \nu)$ ist und für welchen alle Buchstaben accentuirt werden. Sodann berechnet man für denselben die Brechungsverhältnisse durch die Formeln

$$\nu'_m = \nu_m + \alpha_m \delta' \nu$$

$$n'_m = \frac{\nu'_m}{\nu'_{m-1}}$$

ferner die Vereinigungsweiten, indem man von

$$g'_i = g_i$$

ausgeht, durch die Formeln

$$\frac{1}{c'_m} = \frac{n'_m}{g'_m} - \frac{(n'-1)_m}{a_m}$$

$$g'_{m-1} = c'_m - d_{m-1}$$

und K'_1 durch den Ausdruck

$$K'_1 = K_1 + u_j \delta' \nu - K_1^2 \left(\frac{1}{c'_1} - \frac{1}{c_1} \right)$$

Vermittelst dieser Werthe kann P_i für den farbigen Strahl durch die vorhergehenden Formeln berechnet werden. Bezeichnet man den auf diese Art erhaltenen Werth jener Grösse mit P'_i, so ist

$$W_i = \frac{1}{\delta' \nu} \left\{ [w_j + 2 K_1 P_i] \left(\frac{1}{c'_1} - \frac{1}{c_1} \right) + P'_i - P_i \right\}$$

Können diejenigen Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden, welche von den Ocularen herrühren, so ist

$$W_i = U_0 K_1^3$$

Befindet sich vor der ersten und hinter der l[illegible] Fläche einerlei durchsichtiges Mittel, so ist

$$\nu_i = 1$$
$$\alpha_i = 0$$
$$\beta_i = 0$$

Ebenso ist

$$\nu_j = 1$$
$$\alpha_j = 0$$

wenn sich die Hauptblendung in demselben durchsichtigen Mittel befindet.

38) In manchen Fällen ist es bequemer, die Coefficienten so auszudrücken, dass sie Functionen von $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{g}$ und $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)$ sind.

Setzen wir daher

$$\left.\begin{aligned} n' &= \frac{1}{n} \\ h' &= \frac{1}{g} \\ k' &= \frac{1}{a} - \frac{1}{g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

so ist es erforderlich n, h und k durch n', h' und k' auszudrücken.

Zuerst ist

$$n = \frac{1}{n'}$$

Ferner kann die in der vorhergehenden Nummer gegebene Gleichung zur Berechnung von $\frac{1}{g_m}$ unter die Gestalt gebracht werden,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)$$

folglich, wenn man statt $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)$ und n ihre Werthe k, k' und $\frac{1}{n'}$ substituirt,

$$k = n\,k' = \frac{k'}{n'}$$

Endlich ist

$$\frac{1}{a} = k + h = k' + h'$$

folglich

$$h = h' + (k' - k) = h' + \left(\frac{n'-1}{n'}\right)k'$$

Wir haben daher zur Verwandlung von n, h und k in n', h' und k' die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{1}{n'} \\ h &= h' + \left(\frac{n'-1}{n'}\right)k' \\ k &= \frac{k'}{n'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die in der vorhergehenden Nummer enthaltenen Ausdrücke der Coefficienten in folgende:

$$\begin{aligned} A_m &= \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m k'^2_m\,(k' - n'\,h')_m \\ &= \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)^2_m \left(\frac{1}{a} - \frac{(n'+1)}{g}\right)_m \end{aligned}$$

$$B_m = \left(\frac{n'-1}{n'^2}\right)_m k'_m\,(k'-n'h')_m$$
$$= \left(\frac{n'-1}{n'^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{(n'+1)}{g}\right)_m$$
$$C_m = \left(\frac{n'^2-1}{2n'^2}\right)_m k'_m = \left(\frac{n'^2-1}{2n'^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)_m$$
$$D_m = \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m [(n'+3)\,k'-2n'h']_m$$
$$= \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m \left[\frac{n'+3}{a}-\frac{3(n'+1)}{g}\right]_m$$
$$E_m = \left(\frac{n'^2-1}{2n'^2}\right)_m$$
$$(A)_m = -\left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m k'_m\,[(n'+3)\,k'-2n'h']_m$$
$$= -\left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)_m \left[\frac{n'+3}{a}-\frac{3(n'+1)}{g}\right]_m$$
$$(B)_m = -\left(\frac{n'-1}{n'^2}\right)_m [(n'+2)\,k'-n'h']_m$$
$$= -\left(\frac{n'-1}{n'^2}\right)_m \left[\frac{n'+2}{a}-\frac{2(n'+1)}{g}\right]_m$$
$$(C)_m = -\left(\frac{n'^2-1}{2n'^2}\right)_m = -E_m$$
$$(A')_m = \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m [(2n'+3)\,k'-n'h']_m$$
$$= \left(\frac{n'-1}{2n'^2}\right)_m \left[\frac{2n'+3}{a}-\frac{3(n'+1)}{g}\right]_m$$
$$(A'')_m = -\left(\frac{n'^2-1}{2n'^2}\right)_m = -E_m$$
$$[A]_m = -\left(\frac{k'^2}{2n'^2}\right)_m [(n'^2+n'-1)\,k'-(2n'-1)\,n'h']_m$$
$$= -\frac{1}{2n'^2_m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)^2_m \left[\frac{n'^2+n'-1}{a}-\frac{(3n'^2-1)}{g}\right]_m$$
$$[B]_m = -k'_m\,(k'-h')_m = -\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{2}{g}\right)_m$$
$$[C]_m = -\left(\frac{n'^2+1}{2n'^2}\right)_m k'_m = -\left(\frac{n'^2+1}{2n'^2}\right)_m \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)_m$$
$$[D]_m = -\frac{1}{2n'^2_m}\,[(3n'^2-2n'+3)\,k'-2n'h']_m$$
$$= -\frac{1}{2n'^2_m}\left[\frac{3n'^2-2n'+3}{a}-\frac{3(n'^2+1)}{g}\right]_m$$
$$[E]_m = -\frac{1}{n'^2_m}$$
$$[A']_m = \left(\frac{k'^2}{2n'^2}\right)_m [(n'-2)\,k'+n'h']_m$$
$$= \frac{1}{2n'^2_m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{g}\right)^2_m \left[\frac{n'-2}{a}+\frac{2}{g}\right]_m$$

$$[B']_m = \left(\frac{k'}{n'^2}\right)_m [(n'-2)\,k' + n'\,h']_m$$

$$= \frac{1}{n'^2_m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)_m \left[\frac{n'-2}{a} + \frac{2}{g}\right]_m$$

$$[D']_m = \frac{1}{n'^2_m}\,[(n'-3)\,k' + n'\,h']_m$$

$$= \frac{1}{n'^2_m}\left[\frac{n'-3}{a} + \frac{3}{g}\right]_m$$

$$[E']_m = -\frac{1}{n'^2_m}$$

$$[A'']_m = -\frac{k'^2_m}{2}\,(k'-h')_m = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{g}\right)_m$$

$$[B'']_m = -k'_m\,(k'-h')_m = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{g}\right)_m$$

$$[D'']_m = -(2k'-h')_m = -\left(\frac{2}{a} - \frac{3}{g}\right)_m$$

$$[E'']_m = -1$$

$$F_m = \left(\frac{k'^2}{8\,n'^2}\right)_m \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{a^2_m}\,[(n'^2-n'+1)\,k' + (n'-1)\,n'\,h']_m \\ +\left(\dfrac{k'}{n'^2}\right)_m [(n'^2+n'-1)\,k' + n'\,h']^2_m \\ +2\left(\dfrac{n'-1}{n'}\right)^2_m k'_m\,(k'-n'\,h')^2_m \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{8\,n'^2_m}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)^2_m \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{a^2_m}\left[\dfrac{n'^2-n'+1}{a} - \dfrac{1}{g}\right]_m \\ +\dfrac{1}{n'^2_m}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{g}\right)_m \left[\dfrac{n'^2+n'-1}{a} - \dfrac{(n'^2-1)}{g}\right]^2_m \\ +2\left(\dfrac{n'-1}{n'}\right)^2_m \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{g}\right)_m \left[\dfrac{1}{a} - \dfrac{(n'+1)}{g}\right]^2_m \end{array}\right.$$

$$l^{(m)} = -\left[\frac{(n'-1)\,k'}{2\,n'\,a\,V^2}\right]_m = -\left[\frac{(n'-1)}{2\,n'\,a\,V^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{g}\right)\right]_m$$

$$q^{(m)} = q'^{(m)} = -\frac{1}{2\,\nu_{m-1}}\left(\frac{n'-1}{a}\right)\Big]_m$$

und zur Berechnung von $L'^{(m)}$ etc.

$$l^{(i)} = -\frac{1}{2\,n'_m\,a_m\,V^2_m}\,[(n'-1)\,k' + n'\,h']_m$$

$$= -\frac{1}{2\,n'_m\,a_m\,V^2_m}\left[\frac{n'-1}{a} + \frac{1}{g}\right]_m$$

$$q^{(i)} = \frac{1}{2\,\nu_{i-1}\,a_i}$$

$$S^{(m)} = -\frac{k'_m}{V^2_m\,n'_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1})$$

$$T^{(m)} = K_m\,S^{(m)} - \frac{1}{\nu_{m-1}}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1})$$

$$= K_m\,S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{\nu_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{\nu_{m-1}}\right)$$

$$U^{(m)} = -\frac{(A)_m\, S_{m-1}}{V^2_m} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m$$

$$+ \frac{[A]_m}{n'_m\, V^4_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) + \frac{A_m\,\alpha_m}{V^4_m}$$

$$= -\frac{(A)_m\, S_m}{V^2_m} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m$$

$$+ \frac{[A']_m}{n'_m\, V^4_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) + \frac{A_m\,\alpha_m}{V^4_m}$$

$$= -\frac{(A)_m\, S_{m-1}}{V^2_m} + 4\,L^{(m)}\,(S)_m$$

$$+ \frac{[A'']_m}{n'_m\, V^4_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) + \frac{A_m\,\alpha_{m-1}}{n'_m\, V^4_m}$$

$$W_i = -S_i\,[w_i - w_j] + \Sigma^i_{\substack{1\\m}} \left\{ \begin{array}{l} O^{(m)}\,[(T)_m - (KT - (T))_j] \\ + (O^{(m)}\,K_m - 2\,P^{(m)})\left[(S)_m + \frac{\alpha_m}{v_m}\right] \\ - [P]^{(m)}\,S_{m-1} \\ + \frac{[P']^{(m)}}{n'_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

$$= w_j\,S_i + \Sigma^i_{\substack{1\\m}} \left\{ \begin{array}{l} -\,O^{(m)}\,(u_m - u_j) + 2\,P^{(m)}\,T_m \\ -\,w^{(m)}\,(S_i - S_m) + \frac{[P'']_m}{n'_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

$$= w_j\,S_i + \Sigma^i_{\substack{1\\m}} \left\{ \begin{array}{l} -\,O^{(m)}\,(u_{m-1} - u_j) + 2\,P^{(m)}\,T_{m-1} \\ -\,w^{(m)}\,(S_i - S_{m-1}) + \frac{[P''']_m}{n'_m}\,(n'_m\,\alpha_m - \alpha_{m-1}) \end{array} \right.$$

Die übrigen Formeln der vorhergehenden Nummer bleiben ungeändert.

Fünftes Kapitel.

Probleme der ersten Ordnung.

Da nunmehr die Gleichungen der einfallenden und der gebrochenen Strahlen vollständig entwickelt worden sind, so können wir zu der Auflösung derjenigen Probleme übergehen, welche bei der Construction der optischen Werkzeuge am häufigsten vorkommen. Diese Probleme sind von verschiedener Art: bei einigen nämlich genügt eine genäherte Auflösung, so dass es hinlänglich ist, nur die Glieder der ersten Ordnung beizubehalten; andere hingegen erfordern die Berücksichtigung der zu den höheren Ordnungen gehörigen Grössen. Demungeachtet ist aber selbst bei den letzteren Aufgaben eine vorläufige genäherte Auflösung nothwendig, da jene Grössen Functionen von denen sind, welche hierdurch erhalten werden. Beschäftigen wir uns daher vor Allem mit den Problemen der ersten Ordnung, und nehmen wir zu dem Ende die Gleichungen der einfallenden und gebrochenen Strahlen mit Vernachlässigung aller Abweichungen wieder vor. Diese Gleichungen werden uns sodann ein leichtes Mittel zur Auflösung der erwähnten Probleme an die Hand geben.

Gleichungen der einfallenden und der gebrochenen Strahlen.

39) Die Gleichungen der einfallenden Strahlen erhalten wir aus (a), (c) und (l) von Nro. **36**, wenn wir darin alle Glieder vernachlässigen, welche sich auf Abweichungen beziehen. Bezeichnen wir daher, wie dort, die Coordinaten des einfallenden Strahles ohne Index und behalten die übrigen in Nro. **37** angegebenen Bezeichnungen bei, so werden:

I. die Gleichungen des allgemeinen einfallenden Strahles, wenn die Coordinaten desselben von der Axe des Instrumentes an gezählt werden,

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)Y'_1 + c_1\,\phi_1\left[1+\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\right] \\ x &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)X'_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(a)}$$

II. Die Gleichungen des einfallenden Hauptstrahles

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y} &= c_1\,\varphi_1\left[1+\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\right] \\ \overset{''}{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

III. Die Gleichungen des allgemeinen einfallenden Strahles, wenn die Coordinaten desselben von dem Hauptstrahle an gezählt werden,

$$\left.\begin{aligned} \overset{'}{y} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\overset{'}{Y}_1 \\ \overset{'}{x} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\overset{'}{X}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Die Gleichungen der gebrochenen Strahlen folgen aus den mit *I.*, *II.* und *III.* bezeichneten Formeln von Nro. 26, 34 und 35, wenn darin ebenfalls alle Glieder vernachlässigt werden, welche sich auf Abweichungen beziehen. Unter dieser Voraussetzung fallen die beiden ersten Formeln zusammen, indem sie nur in den Gliedern der höheren Ordnungen verschieden sind. Wir erhalten daher:

IV. die Gleichungen des allgemeinen Strahles nach der i^{ten} Brechung, wenn die Coordinaten desselben von der Axe des Instrumentes an gezählt werden,

$$\left.\begin{aligned} y_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \overset{'}{Y}_1 + \frac{V_i\,g_i\,\varphi_1}{v_i}\left[1+\left(1-\frac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] \\ x_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \overset{'}{X}_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

V. Die Coordinaten des Einfallspunktes des allgemeinen Strahles auf der i^{ten} brechenden Fläche, von der Axe des Instrumentes an gezählt,

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= \frac{1}{V_i}\,(\overset{'}{Y}_1 + K_i\,\varphi_1) \\ X_i &= \frac{\overset{'}{X}_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

VI. Die Gleichungen des Hauptstrahles nach der i^{ten} Brechung

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y}_i &= \frac{V_i\,g_i\,\varphi_1}{v_i}\left[1+\left(1-\frac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] \\ \overset{''}{x}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(f)}$$

VII. Die Coordinaten des Einfallspunktes des Hauptstrahles auf der i^{ten} brechenden Fläche

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{Y}_i &= \frac{K_i\,\varphi_1}{V_i} \\ \overset{''}{X}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

VIII. *Die Gleichungen des allgemeinen Strahles nach der* i^{ten} *Brechung, wenn die Coordinaten desselben von dem correspondirenden Hauptstrahle an gezählt werden,*

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i Y'_1 \\ x'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i X'_1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

IX. *Die Coordinaten des Einfallspunktes des allgemeinen Strahles auf der* i^{ten} *brechenden Fläche, vom correspondirenden Hauptstrahle an gezählt,*

$$\left.\begin{aligned} Y'_i &= \frac{Y'_1}{V_i} \\ X'_i &= \frac{X'_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

Bei allen Coordinaten, welche in den vorhergehenden Gleichungen vorkommen, findet die Relation Statt, dass diejenigen, welche von der Axe des Instrumentes an gezählt sind und mit unaccentuirten Buchstaben bezeichnet wurden, aus der Summe der correspondirenden Coordinaten bestehen, die mit einfachen und doppelten Accenten versehen sind. Hiernach ist

$$\left.\begin{aligned} y &= y' + y'' \\ x &= x' + x'' \\ y_i &= y'_i + y''_i \\ x_i &= x'_i + x''_i \\ Y_i &= Y'_i + Y''_i \\ X_i &= X'_i + X''_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Nach den im Anfange von Nro. 36 gemachten Bemerkungen sind die Formeln (a), (b) und (c) in denen (d), (f) und (h) enthalten, wenn man bei den Coordinaten x, y, z den Index i weglässt und

$$V_i = v_i = 1$$
$$K_i = K_1$$
$$g_i = c_1$$

setzt. Hiernach reicht es hin, die folgenden Entwickelungen nur in Bezug auf die gebrochenen Strahlen vorzunehmen, indem die erhaltenen Resultate durch die angegebenen Umänderungen auch auf die einfallenden Strahlen anwendbar sind.

Befindet sich der leuchtende Punkt in der Axe des Instrumentes, so wird der Strahl ein *Centralstrahl* genannt. In diesem Falle ist $\varphi_1 = 0$ und der Hauptstrahl fällt mit jener Axe zusammen; der Ursprung der in den Gleichungen (c), (h) und (i) gebrauchten Coordinaten liegt daher in der Axe des Instrumentes, so dass diese Gleichungen die einzigen sind, welche bei Centralstrahlen in Betracht kommen.

Den Formeln (h) und (i) können wir verschiedene Gestalten geben, welche in manchen Fällen nützlich sind. Drücken wir nämlich

zuerst $\acute{Y}_1$ und $\acute{X}_1$ durch die Coordinaten des Durchschnittes mit der Ebene der Hauptblendung aus, so ist, je nachdem die Stellung derselben auf die j^{te} oder $(j+1)^{te}$ brechende Fläche bezogen wird, vermöge (d) und (f) von Nro. 22

$$\acute{Y}_1 = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j$$

$$\acute{X}_1 = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j$$

folglich, wenn man diese Werthe in (h) und (i) substituirt,

$$\left.\begin{aligned}
\acute{y}_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j \\
\acute{x}_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j \\
\acute{Y}_i &= \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j \\
\acute{X}_i &= \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

Bisweilen ist es bequemer, die rechtwinkeligen Coordinaten in Polarcoordinaten zu verwandeln. Denken wir uns nämlich den allgemeinen Strahl nach der i^{ten} Brechung von einer Ebene durchschnitten, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und sich in der Entfernung z_i vor dem Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche befindet, so sind $\acute{y}_i$ und $\acute{x}_i$ die von dem Hauptstrahle an gezählten Coordinaten des Durchschnittspunktes jener Ebene mit dem Strahle.

Nennen wir ferner ohne Rücksicht auf die Abweichungen

$\acute{R}_i$ die auf die Ebene der xy projicirte Entfernung zwischen den Durchschnittspunkten des Hauptstrahles und des allgemeinen Strahles mit der i^{ten} brechenden Fläche,

Ψ_i den Winkel, welchen $\acute{R}_i$ mit der Axe der y macht,

ϱ_j und ψ_j dieselben Grössen in Bezug auf die Hauptblendung,

$\acute{r}_i$ und ψ_i dieselben Grössen in Bezug auf die Ebene, welche den Strahl nach der i^{ten} Brechung durchschneidet,

so ist

$$\left.\begin{aligned}
\acute{Y}_i &= \acute{R}_i \cos.\, \Psi_i \\
\acute{X}_i &= \acute{R}_i \sin.\, \Psi_i \\
\acute{Y}_1 &= \acute{R}_1 \cos.\, \Psi_1 \\
\acute{X}_1 &= \acute{R}_1 \sin.\, \Psi_1 \\
v_j &= \varrho_j \cos.\, \psi_j \\
\xi_j &= \varrho_j \sin.\, \psi_j \\
\acute{y}_i &= \acute{r}_i \cos.\, \psi_i \\
\acute{x}_i &= \acute{r}_i \sin.\, \psi_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

folglich, wenn diese Werthe in den Formeln (h), (i) und (l) substituirt werden,

$$\left.\begin{aligned}
y'_i &= r'_i \cos. \psi_i = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i R'_1 \cos. \Psi_1 \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \cos. \psi_j \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \cos. \psi_j \\
x'_i &= r'_i \sin. \psi_i = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i R'_1 \sin. \Psi_1 \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \sin. \psi_j \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \sin. \psi_j \\
Y'_i &= R'_i \cos. \Psi_i = \frac{R'_1 \cos. \Psi_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \cos. \psi_j \\
&= \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \cos. \psi_j \\
X'_i &= R'_i \sin. \Psi_i = \frac{R'_1 \sin. \Psi_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \sin. \psi_j \\
&= \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \sin. \psi_j
\end{aligned}\right\} \quad \text{(n)}$$

Die vorhergehenden Formeln dienen dazu, die Grössen Ψ_1, Ψ_i, ψ_j, ψ_i, und ebenso R'_1, R'_i, ϱ_j, r'_i zu bestimmen, wenn eine der ersteren und eine der letzteren als bekannt vorausgesetzt werden. Dividiren wir nämlich die zweite jener Formeln durch die erste, sodann die vierte durch die dritte, so erhalten wir

$$tg\ \psi_i = tg\ \Psi_1 = tg\ \psi_j$$
$$tg\ \Psi_i = tg\ \Psi_1 = tg\ \psi_j$$

folglich

$$\Psi_i = \psi_i = \Psi_1 = \psi_j$$

Es ist daher unnütz, diese Winkel von einander zu unterscheiden, und sie sollen künftig alle durch Ψ_1 ausgedrückt werden, wodurch sich die Formeln (m) in folgende verwandeln:

$$\left.\begin{aligned}
Y'_i &= R'_i \cos. \Psi_1 \\
X'_i &= R'_i \sin. \Psi_1 \\
Y'_1 &= R'_1 \cos. \Psi_1 \\
X'_1 &= R'_1 \sin. \Psi_1 \\
v_j &= \varrho_j \cos. \Psi_1 \\
\xi_j &= \varrho_j \sin. \Psi_1 \\
y'_i &= r'_i \cos. \Psi_1 \\
x'_i &= r'_i \sin. \Psi_1
\end{aligned}\right\} \quad \text{(o)}$$

Ferner geben die letzten Formeln

$$\acute{r}_i = \sqrt{\acute{x}_i^2 + \acute{y}_i^2}$$

$$\acute{R}_i = \sqrt{\acute{X}_i^2 + \acute{Y}_i^2}$$

folglich, wenn man hierin die in (n) gefundenen Werthe substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \acute{r}_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \acute{R}_1 = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \\ &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \\ \acute{R}_i &= \frac{\acute{R}_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \end{aligned}\right\} \quad (p)$$

wodurch die Grössen $\acute{R}_1$, $\acute{R}_i$, ϱ_j, $\acute{r}_i$ gegeben sind, wenn eine derselben als bekannt angenommen wird.

Nach der oben gemachten Bemerkung können wir die Formeln (l), (o) und (p) auch auf den einfallenden Strahl anwenden, wenn wir bei x_i und y_i, und folglich auch bei $\acute{x}_i$, $\acute{y}_i$ und $\acute{r}_i$, den Index weglassen und

$$V_i = 1$$
$$g_i = c_1$$

setzen. Diess giebt in Bezug auf den einfallenden Strahl

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j \\ \acute{x} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j \\ \acute{y} &= \acute{r} \cos.\, \psi_1 \\ \acute{x} &= \acute{r} \sin.\, \psi_1 \\ \acute{r} &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right) \acute{R}_1 = -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j \\ &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

Vereinigungsweiten.

40) Wir haben bereits in Nro. 4 verschiedene Methoden angegeben, nach welchen die sämmtlichen Vereinigungsweiten berechnet werden können, wenn eine derselben bekannt ist. Es bleibt jetzt nur noch übrig, diese Methoden weiter zu entwickeln und die nöthigen Folgerungen daraus zu ziehen. Ich nehme hierbei, wie an dem angeführten Orte, an, dass entweder c_0 oder g_0 unmittelbar gegeben ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man diejenigen Vereinigungsweiten, welche auf jene folgen, successiv durch die in (b) von Nro. 4 gefundenen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} c_i &= g_{i-1} + d_{i-1} \\ \frac{1}{g_i} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

indem man von dem bekannten c_e oder g_e ausgeht, dem Index i nach und nach alle Werthe, entweder von $i = e$ bis zu $i = i$, oder von $i = e + 1$ bis zu $i = i$ beilegt, je nachdem c_e oder g_e gegeben ist, und die Formeln abwechselnd gebraucht.

Zur successiven Berechnung der vorhergehenden Vereinigungsweiten dienen die Formeln (f) von Nro. 4:

$$\left.\begin{aligned} g_i &= c_{i+1} - d_i \\ \frac{1}{c_i} &= \frac{n_i}{g_i} - \frac{(n-1)_i}{a_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

wodurch die erwähnten Vereinigungsweiten erhalten werden, wenn man von dem bekannten c_e oder g_e ausgeht, dem Index i nach und nach alle Werthe, entweder von $i = e - 1$ bis $i = 1$, oder von $i = e$ bis $i = 1$ giebt, je nachdem c_e oder g_e bekannt ist, und die Formeln abwechselnd anwendet.

Ausser den Vereinigungsweiten enthalten die vorhergehenden Gleichungen noch die Entfernungen der brechenden Flächen d_i, die Halbmesser derselben a_i, und die Brechungsverhältnisse n_i, von welchen Grössen durch jede Gleichung eine gefunden werden kann, wenn alles Uebrige darin bekannt ist. Zu diesem Zwecke erhalten wir aus denselben

$$\left.\begin{aligned} d_i &= c_{i+1} - g_i \\ \frac{1}{a_i} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)_i \frac{1}{g_i} - \frac{1}{(n-1)_i\, c_i} \\ n_i &= \frac{\frac{1}{a_i} - \frac{1}{c_i}}{\frac{1}{a_i} - \frac{1}{g_i}} = \frac{g_i\,(c-a)_i}{c_i\,(g-a)_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Hierbei ist nicht zu vergessen, dass alle Vereinigungsweiten und Mittelpunkte der brechenden Flächen *vor* diesen angenommen worden sind, daher c, g und a verneint werden, wenn der umgekehrte Fall eintritt.

41) Die zweite Methode, welche in Nro. 4 zur Berechnung der Vereinigungsweiten angewendet wurde, besteht darin, dass man analytische Ausdrücke sucht, welche c_i und g_i unmittelbar durch c_e oder g_e bestimmen.

Zu diesem Ende wurden zuerst in Bezug auf die folgenden Vereinigungsweiten die Bezeichnungen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} q_{2i-1} &= d_{i-1} \\ q_{2i} &= \left(\frac{n-1}{a}\right)_i \\ s_{2i-1} &= n_{i-1} \\ s_{2i} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Vermittelst dieser Werthe können die durch (i, e) und $[i, e]$ bezeichneten Grössen berechnet werden, bei welchen i den ersten und e den letzten Index der verschiedenen, dabei gebrauchten q

angiebt. Hierzu dienen die folgenden drei Systeme von Formeln, welche in (d), (e), (f), (g), (h), (i) und (k) von Nro. 3 gefunden wurden:

$$\left.\begin{array}{l}(e-1,e)=1\\(e,e)=q_e\\(i,e)=q_i(i-1,e)+s_i(i-2,e)\\{}[i,e]=\dfrac{(i,e)}{(i-1,e)}\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(b)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}[e,e]=q_e\\{}[i,e]=q_i+\dfrac{s_i}{[i-1,e]}\\{}[i,e]=q_i+\cfrac{s_i}{q_{i-1}+\cfrac{s_{i-1}}{q_{i-2}+\cfrac{s_{i-2}}{\ldots\ldots+\cfrac{s_{e+2}}{q_{e+1}+\cfrac{s_{e+1}}{q_e}}}}}\\(i,e)=[i,e]\,[i-1,e]\ldots\ldots[e,e]\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(c)$$

$$\left.\begin{array}{l}(i+1,i)=1\\(i,i)=q_i\\(e,i)=q_e(e+1,i)+s_{e+1}(e+2,i)\\(e,i)=(i,e)\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(d)$$

Um von denselben Gebrauch machen zu können, muss man in der dritten Formel (b) und der zweiten (c) dem Index i nach und nach alle Werthe von $i=e+1$ bis $i=i$ geben, in der dritten Formel (d) dagegen dem Index e alle Werthe von $e=i-1$ bis $e=1$, worauf die dadurch ausgedrückten Grössen successiv erhalten werden. Aus den in (a) gegebenen Werthen ist übrigens ersichtlich, dass die auf diese Weise berechneten Grössen (i,e) und $[i,e]$ bloss von den verschiedenen, darin enthaltenen n, d und a, mithin nur von der inneren Einrichtung des Instrumentes, keineswegs aber von den Vereinigungsweiten abhängen.

In den Ausdrücken der Vereinigungsweiten kommen ferner noch andere Grössen vor, welche sich von den mit (i, e) und $[i, e]$ bezeichneten nur dadurch unterscheiden, dass das letzte, darin enthaltene q_e einen speciellen, nicht in den Gleichungen (a) begriffenen Werth bekommt. Diesen werde ich mit q'_e und diejenigen Werthe, welche (i,e) und $[i,e]$ annehmen, wenn darin q'_e an die Stelle von q_e gesetzt wird, mit (i,e') und $[i,e']$ bezeichnen.

Nehmen wir nun in (G) von Nro. 3 diejenigen Substitutionen vor, welche in Nro. 4 angegeben worden sind, bemerken wir sodann, dass vermöge (a)

$$s_{2e}=1$$
$$s_{2e+1}=n_e$$

ist, so erhalten wir die folgenden Ausdrücke der Vereinigungsweiten, welche auf die als bekannt vorausgesetzte folgen:

I. wenn c_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
q'_{2e-1} &= c_e \\
c_i &= \frac{(2i-1,\,2e)\,c_e + (2i-1,\,2e+1)}{(2i-2,\,2e)\,c_e + (2i-2,\,2e+1)} \\
&= \frac{(2i-1,\,2e-1')}{(2i-2,\,2e-1')} = [2i-1,\,2e-1'] \\
&= q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{q_{2i-3} + \cfrac{s_{2i-3}}{\ddots \cdots\cdots + \cfrac{s_{2e+1}}{q_{2e} + \cfrac{1}{c_e}}}}} \\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,\,2e)\,c_e + (2i,\,2e+1)}{(2i-1,\,2e)\,c_e + (2i-1,\,2e+1)} \\
&= \frac{(2i,\,2e-1')}{(2i-1,\,2e-1')} = [2i,\,2e-1'] \\
&= q_{2i} + \cfrac{s_{2i}}{q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{\ddots \cdots\cdots + \cfrac{s_{2e+1}}{q_{2e} + \cfrac{1}{c_e}}}}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (e)$$

II. wenn g_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
q'_{2e} &= \frac{n_e}{g_e} \\
c_i &= \frac{(2i-1,\,2e+1) + (2i-1,\,2e+2)\,g_e}{(2i-2,\,2e+1) + (2i-2,\,2e+2)\,g_e} \\
&= \frac{(2i-1,\,2e')}{(2i-2,\,2e')} = [2i-1,\,2e'] \\
&= q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{q_{2i-3} + \cfrac{s_{2i-3}}{\ddots \cdots\cdots + \cfrac{s_{2e+2}}{q_{2e+1} + g_e}}}} \\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,\,2e+1) + (2i,\,2e+2)\,g_e}{(2i-1,\,2e+1) + (2i-1,\,2e+2)\,g_e} \\
&= \frac{(2i,\,2e')}{(2i-1,\,2e')} = [2i,\,2e'] \\
&= q_{2i} + \cfrac{s_{2i}}{q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{\ddots \cdots\cdots + \cfrac{s_{2e+2}}{q_{2e+1} + g_e}}}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (f)$$

Bei der Anwendung dieser Formeln müssen die mit Parenthesen bezeichneten Grössen entweder nach (b) oder (c) berechnet werden, indem man darin jedesmal die Werthe von i und e nach den zwischen den Parenthesen enthaltenen Angaben bestimmt.

Da, wie wir oben gesehen haben, die mit Parenthesen ohne Accente angedeuteten Grössen nur von der inneren Einrichtung des Instrumentes und keineswegs von den Vereinigungsweiten abhängen, so können die ersten Ausdrücke von c_i und $\frac{n_i}{g_i}$ gebraucht werden, um diese Grössen für verschiedene Werthe von c_e oder g_e zu berechnen, ohne die ganze Rechnung wiederholen zu müssen.

42) Die ersten Ausdrücke von c_i und $\frac{n_i}{g_i}$ enthalten vier von den mit Parenthesen bezeichneten Grössen; es giebt jedoch eine Gleichung zwischen denselben, welche dazu gebraucht werden kann, um eine jener Grössen zu eliminiren, und welche auf folgende Weise erhalten wird.

Vermöge der dritten Gleichung (b) der vorhergehenden Nummer ist

$$(i,e) = q_i\,(i-1,e) + s_i\,(i-2,e)$$

und ebenso

$$(i,e+1) = q_i\,(i-1,e+1) + s_i\,(i-2,e+1)$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $(i-1,e+1)$, die zweite mit $-(i-1,e)$, so wird die Summe beider Producte:

$$(i,e)\,(i-1,e+1) - (i,e+1)\,(i-1,e) =$$
$$= -s_i\,[(i-1,e)\,(i-2,e+1) - (i-1,e+1)\,(i-2,e)]$$

Diese Differenzengleichung stimmt mit (K) von Nro. 3 überein, wenn man setzt:

$$u_i = (i,e)\,(i-1,e+1) - (i,e+1)\,(i-1,e)$$
$$q_i = -s_i$$
$$t_i = 0$$

Verwechselt man nun in dem Integrale (L) jener Gleichung $e-1$ mit $e+1$, so ist dasselbe

$$u_i = [q_i]^{i-e-1}\,u_{e+1}$$

folglich nach Substitution der vorhergehenden Werthe

$$(i,e)\,(i-1,e+1) - (i,e+1)\,(i-1,e) =$$
$$= [-s_i]^{i-e-1}\,[(e+1,e)\,(e,e+1) - (e+1,e+1)\,(e,e)]$$

Nach der angenommenen Bezeichnung ist aber

$$[-s_i]^{i-e-1} = (-s_i)\,(-s_{i-1})\;.\;.\;.\;.\;(-s_{e+2})$$

Ferner geben die Gleichungen (b) von Nro. 41

$$(e+1,e) = q_{e+1}\,(e,e) + s_{e+1}\,(e-1,e)$$
$$= q_{e+1}\,q_e + s_{e+1}$$
$$(e,e+1) = 1$$
$$(e+1,e+1) = q_{e+1}$$
$$(e,e) = q_e$$

mithin

$$(e+1, e)(e, e+1) - (e+1, e+1)(e, e) = s_{e+1}$$

Hierdurch wird das vorhergehende Integral:

$$\left.\begin{aligned}(i, e)(i-1, e+1) - (i, e+1)(i-1, e) &= \\ = -(-s_i)(-s_{i-1}) \ldots (-s_{e+1})\end{aligned}\right\} \ldots \quad (a)$$

Bemerken wir jetzt, dass vermöge (a) von von Nro. 41

$$s_{2i} = 1$$
$$s_{2i-1} = n_{i-1}$$

und ausserdem

$$n_{i-1}\, n_{i-2} \ldots n_e = \frac{n_{i-1} \ldots n_1}{n_{e-1} \ldots n_1} = \frac{\nu_{i-1}}{\nu_{e-1}}$$

ist, so entstehen aus (a) durch Veränderung des Index die folgenden vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(2i-1, 2e)(2i-2, 2e+1) - (2i-1, 2e+1)(2i-2, 2e) &= \frac{\nu_{i-1}}{\nu_{e-1}} \\ (2i, 2e)(2i-1, 2e+1) - (2i, 2e+1)(2i-1, 2e) &= -\frac{\nu_{i-1}}{\nu_{e-1}} \\ (2i-1, 2e+1)(2i-2, 2e+2) - (2i-1, 2e+2)(2i-2, 2e+1) &= -\frac{\nu_{i-1}}{\nu_e} \\ (2i, 2e+1)(2i-1, 2e+2) - (2i, 2e+2)(2i-1, 2e+1) &= \frac{\nu_{i-1}}{\nu_e}\end{aligned}\right\}(b)$$

Diese Gleichungen enthalten der Reihe nach dieselben mit Parenthesen bezeichneten Grössen, wie die ersten Ausdrücke von c_i und $\frac{n_i}{g_i}$ in (e) und (f) von Nro. 41; verbindet man daher jeden der letzteren mit der ihm entsprechenden Gleichung (b), so kann dadurch eine beliebige jener Grössen aus demselben eliminirt werden.

Die bemerkenswerthesten unter den Formeln, welche man auf diese Weise erhält, sind diejenigen, welche sich in zwei Theile absondern, deren erster unabhängig von c_e oder g_e ist. Um sie zu finden, müssen wir in dem ersten Ausdrucke von c_i, welcher in (e) der vorhergehenden Nummer gegeben ist, das von c_e unabhängige Glied des Zählers vermittelst der ersten Gleichung (b) eliminiren, und ebenso mit $\frac{1}{c_i}$ verfahren, welches aus c_i durch Umkehrung des ihm entsprechenden Bruches folgt. Die hierdurch erhaltenen Ausdrücke von c_i und $\frac{1}{c_i}$ verwandeln sich sodann in die correspondirenden von $\frac{n_i}{g_i}$ und $\frac{g_i}{n_i}$ durch blosse Verwechselung von $2i-1$ mit $2i$ in den mit Parenthesen bezeichneten Grössen, und von ν_{i-1} mit $-\nu_{i-1}$. Ebenso müssen die in (f) der vorhergehenden Nummer gegebenen ersten Ausdrücke von c_i und $\frac{n_i}{g_i}$ behandelt werden, indem man jedesmal das von g_e unabhängige Glied des Zählers eliminirt.

Die folgenden Formeln sind die Resultate dieser Elimination:

I. wenn c_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
c_i &= \frac{(2i-1,\ 2e)}{(2i-2,\ 2e)} - \frac{v_{i-1}}{v_{e-1}\,(2i-2,\ 2e)\,[(2i-2,\ 2e)\,c_e+(2i-2,\ 2e+1)]}\\
\frac{1}{c_i} &= \frac{(2i-2,\ 2e)}{(2i-1,\ 2e)} + \frac{v_{i-1}}{v_{e-1}\,(2i-1,2e)\,[(2i-1,2e)\,c_e+(2i-1,\ 2e+1)]}\\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,\ 2e)}{(2i-1,\ 2e)} + \frac{v_{i-1}}{v_{e-1}\,(2i-1,\ 2e)\,[(2i-1,\ 2e)\,c_e+(2i-1,\ 2e+1)]}\\
\frac{g_i}{n_i} &= \frac{(2i-1,\ 2e)}{(2i,\ 2e)} - \frac{v_{i-1}}{v_{e-1}\,(2i,\ 2e)\,[(2i,\ 2e)\,c_e+(2i,\ 2e+1)]}
\end{aligned}\right\}\ \text{(c)}$$

II. wenn g_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
c_i &= \frac{(2i-1,\ 2e+2)}{(2i-2,\ 2e+2)} - \frac{v_{i-1}}{v_e\,(2i-2,\ 2e+2)\,[(2i-2,\ 2e+1)+(2i-2,\ 2e+2)\,g_e]}\\
\frac{1}{c_i} &= \frac{(2i-2,\ 2e+2)}{(2i-1,\ 2e+2)} + \frac{v_{i-1}}{v_e\,(2i-1,\ 2e+2)\,[(2i-1,\ 2e+1)+(2i-1,\ 2e+2)\,g_e]}\\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,\ 2e+2)}{(2i-1,\ 2e+2)} + \frac{v_{i-1}}{v_e\,(2i-1,\ 2e+2)\,[(2i-1,\ 2e+1)+(2i-1,\ 2e+2)\,g_e]}\\
\frac{g_i}{n_i} &= \frac{(2i-1,\ 2e+2)}{(2i,\ 2e+2)} - \frac{v_{i-1}}{v_e\,(2i,\ 2e+2)\,[(2i,\ 2e+1)+2i,\ 2e+2)\,g_e]}
\end{aligned}\right\}\ \text{(d)}$$

43) Die mit Parenthesen bezeichneten Grössen können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Zuerst erhalten wir aus der dritten Formel (d) von Nro. 41, wenn wir i und e mit $2i-1$ und $2e-1$ verwechseln, die Ordnung innerhalb der Parenthesen umkehren und bemerken, dass

$$q'_{2e-1} = c_e$$
$$s_{2e} = 1$$

ist,

$$(2i-1,\ 2e-1') = (2i-1,\ 2e)\,c_e + (2i-1,\ 2e+1)$$

Ferner giebt die letzte Formel (c), verbunden mit (e) derselben Nummer, durch jene Verwechselungen

$$(2i-1, 2e-1') =$$
$$= [2i-1, 2e-1'] [2i-2, 2e-1'] \ldots [2e, 2e-1'] [2e-1, 2e-1']$$
$$= c_i \frac{n_{i-1}}{g_{i-1}} \cdots \frac{n_e}{g_e} c_e$$

Vermöge (l) von Nro. 4 ist aber

$$n_{i-1} n_{i-2} \ldots n_e n_{e-1} \ldots n_1 = v_{i-1}$$
$$\frac{1}{n_{e-1} \ldots n_1} = \frac{1}{v_{e\ 1}} = \frac{n_e}{v_e}$$
$$\frac{c_i}{g_{i-1}} \cdots \frac{c_e}{g_e} \frac{c_{e-1}}{g_{e-1}} \cdots \frac{c_2}{g_2 g_1} = \frac{1}{V_i}$$
$$g_{e-1} \frac{g_{e-2}}{c_{e-1}} \cdots \frac{g_1}{c_2} = V_{e-1} g_{e-1} = V_e c_e$$

folglich, wenn man diese vier Gleichungen mit einander multiplicirt,

$$c_i \frac{n_{i-1}}{g_{i-1}} \cdots \frac{n_e}{g_e} c_e = \frac{v_{i-1} V_{e-1} g_{e-1}}{V_i v_{e-1}} = \frac{v_{i-1} n_e V_e c_e}{V_i v_e}$$

Substituiren wir diese Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von $(2i-1, 2e-1')$, behandeln sodann $(2i, 2e-1')$, $(2i-1, 2e')$ und $(2i, 2e')$ auf dieselbe Weise, so entstehen dadurch die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
(2i-1, 2e-1') &= (2i-1, 2e) c_e + (2i-1, 2e+1) \\
&= \frac{v_{i-1} V_{e-1} g_{e-1}}{V_i v_{e-1}} = \frac{v_{i-1} n_e V_e c_e}{V_i v_e} \\
(2i, 2e-1') &= (2i, 2e) c_e + (2i, 2e+1) \\
&= \frac{v_i V_{e-1} g_{e-1}}{V_i g_i v_{e-1}} = \frac{v_i n_e V_e c_e}{V_i g_i v_e} \\
(2i-1, 2e') &= (2i-1, 2e+1) \frac{n_e}{g_e} + (2i-1, 2e+2) n_e \\
&= \frac{v_{i-1} V_e}{V_i v_{e-1}} = \frac{v_{i-1} n_e V_e}{V_i v_e} \\
(2i, 2e') &= (2i, 2e+1) \frac{n_e}{g_e} + (2i, 2e+2) n_e \\
&= \frac{v_i V_e}{V_i g_i v_{e-1}} = \frac{v_i n_e V_e}{V_i g_i v_e}
\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

44) Zur Berechnung der, c_e oder g_e vorhergehenden Vereinigungsweiten wurden in (h) von Nro. 4 die Bezeichnungen angenommen:

$$\left.\begin{aligned}
q_{2i+1} &= -d_i \\
q_{2i} &= \left(\frac{1-n}{na}\right)_i \\
s_{2i+1} &= \frac{1}{n_{i+1}} \\
s_{2i} &= 1
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Die hierdurch erhaltenen Werthe dienen sodann zur Berechnung der mit Parenthesen bezeichneten Grössen vermittelst der folgenden drei Systeme von Formeln, welche bereits in (z), (A) und (B) von Nro. 3 gefunden wurden:

$$\left.\begin{aligned} (e+1,\, e) &= 1 \\ (e,e) &= q_e \\ (i,\, e) &= q_i\,(i+1,\, e) + s_i\,(i+2,\, e) \\ [i,\, e] &= \frac{(i,\, e)}{(i+1, e)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

$$\left.\begin{aligned} [e,\, e] &= q_e \\ [i,\, e] &= q_i + \frac{s_i}{[i+1, e]} \\ \text{oder} \quad [i,\, e] &= q_i + \cfrac{s_i}{q_{i+1} + \cfrac{s_{i+1}}{q_{i+2} + \cfrac{s_{i+2}}{\ddots \cdots + \cfrac{s_{e-2}}{q_{e-1} + \cfrac{s_{e-1}}{q_e}}}}} \\ (i,\, e) &= [i,\, e]\,[i+1, e] \ldots [e, e] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (c)$$

$$\left.\begin{aligned} (i-1,\, i) &= 1 \\ (i,\, i) &= q_i \\ (e, i) &= q_e(e-1, i) + s_{e-1}(e-2,\, i) \\ (e, i) &= (i,\, e) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Vermittelst der dritten Formel (b), der zweiten (c) und der dritten (d) werden die dadurch ausgedrückten Grössen successiv erhalten, wenn man in den beiden ersten dem Index i nach und nach alle Werthe von $i = e-1$ bis $i = i$, in der letzten dagegen dem Index e alle Werthe von $e = i+1$ bis $e = e$ beilegt.

Wir haben ferner bereits in Nro. 4 die Bemerkung gemacht, dass die Formeln, welche die auf c_e und g_e folgenden Vereinigungsweiten bestimmen, auch auf den gegenwärtigen Fall anwendbar sind, wenn man den Index von i bis e zunehmen lässt, wodurch sich

$$2i-1,\ 2i-2 \ldots .\ 2e+2,\ 2e+1,\ i-1,\ e-1$$

in

$$2i+1,\ 2i+2 \ldots .\ 2e-2,\ 2e-1,\ i+1,\ e+1$$

verwandeln, sodann c_i mit g_i, d_{i+1} mit $-d_i$, und n_i mit $\frac{1}{n_i}$ verwechselt.

Durch diese Verwechselungen entstehen aus den Formeln (e) und (f) von Nro. 41, wenn man sie in umgekehrter Ordnung schreibt, die folgenden Ausdrücke der, c_e und g_e vorhergehenden Vereinigungsweiten:

I. wenn c_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
q'_{2e} &= \frac{1}{n_e c_e} \\
\frac{1}{n_i c_i} &= \frac{(2i, 2e-1) + (2i, 2e-2)\, c_e}{(2i+1, 2e-1) + (2i+1, 2e-2)\, c_e} \\
&= \frac{(2i, 2e')}{(2i+1, 2e')} = [2i, 2e'] \\
&= q_{2i} + \cfrac{s_{2i}}{q_{2i+1} + \cfrac{s_{2i+1}}{q_{2i+2} + \cfrac{s_{2i+2}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{2e-2}}{q_{2e-1} + c_e}}}} \\
g_i &= \frac{(2i+1, 2e-1) + (2i+1, 2e-2)\, c_e}{(2i+2, 2e-1) + (2i+2, 2e-2)\, c_e} \\
&= \frac{(2i+1, 2e')}{(2i+2, 2e')} = [2i+1, 2e'] \\
&= q_{2i+1} + \cfrac{s_{2i+1}}{q_{2i+2} + \cfrac{s_{2i+2}}{q_{2i+3} + \cfrac{s_{2i+3}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{2e-2}}{q_{2e-1} + c_e}}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (e)$$

II. wenn g_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
q'_{2e+1} &= g_e \\
\frac{1}{n_i c_i} &= \frac{(2i, 2e)\, g_e + (2i, 2e-1)}{(2i+1, 2e)\, g_e + (2i+1, 2e-1)} \\
&= \frac{(2i, 2e+1')}{(2i+1, 2e+1')} = [2i, 2e+1'] \\
&= q_{2i} + \cfrac{s_{2i}}{q_{2i+1} + \cfrac{s_{2i+1}}{q_{2i+2} + \cfrac{s_{2i+2}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{2e-1}}{q_{2e} + \cfrac{1}{g_e}}}}} \\
g_i &= \frac{(2i+1, 2e)\, g_e + (2i+1, 2e-1)}{(2i+2, 2e)\, g_e + (2i+2, 2e-1)} \\
&= \frac{(2i+1, 2e+1')}{(2i+2, 2e+1')} = [2i+1, 2e+1'] \\
&= q_{2i+1} + \cfrac{s_{2i+1}}{q_{2i+2} + \cfrac{s_{2i+2}}{q_{2i+3} + \cfrac{s_{2i+3}}{\ldots\ldots + \cfrac{s_{2e-1}}{q_{2e} + \cfrac{1}{g_e}}}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (f)$$

Ferner erhalten wir durch dieselben Verwechselungen aus (a) von Nro. 42:

$$\left.\begin{aligned}
&(i, e)(i+1, e-1) - (i, e-1)(i+1, e) = \\
&= -(-s_i)(-s_{i+1}) \ldots \ldots (-s_{e-1})
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (g)$$

Vermöge (a) ist aber

$$s_{2i} = 1$$
$$s_{2i+1} = \frac{1}{n_{i+1}}$$

und ausserdem, da e grösser als i ist,

$$\frac{1}{n_{i+1}} \cdot \frac{1}{n_{i+2}} \cdots \frac{1}{n_e} = \frac{n_1 \ldots n_i}{n_1 \ldots n_e} = \frac{v_i}{v_e}$$

Aus (g) entstehen daher durch Veränderung des Index die folgenden vier Gleichungen, welche dazu dienen können, aus den ersten Ausdrücken von $\frac{1}{n_i c_i}$ und g_i in (e) und (f) eine beliebige von den mit Parenthesen bezeichneten Grössen zu eliminiren:

$$\left.\begin{aligned}
&(2i,2e-1)(2i+1,2e-2)-(2i,2e-2)(2i+1,2e-1) = \frac{v_i}{v_{e-1}}\\
&(2i+1,2e-1)(2i+2,2e-2)-(2i+1,2e-2)(2i+2,2e-1) = -\frac{v_i}{v_{e-1}}\\
&(2i,2e)(2i+1,2e-1)-(2i,2e-1)(2i+1,2e) = -\frac{v_i}{v_e}\\
&(2i+1,2e)(2i+2,2e-1)-(2i+1,2e-1)(2i+2,2e) = \frac{v_i}{v_e}
\end{aligned}\right\}(h)$$

Diese Gleichungen folgen auch aus (b) von Nro. 42, in umgekehrter Ordnung geschrieben, wenn man darin die oben angeführten Verwechselungen vornimmt und ausserdem v_{i-1} mit v_i, v_{e-1} mit v_e, v_e mit v_{e-1} verwechselt. Hierdurch erhalten wir mithin unmittelbar aus (c) und (d) jener Nummer die nachstehenden Formeln:

I. wenn c_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{n_i c_i} &= \frac{(2i,2e-2)}{(2i+1,2e-2)}\\
&+\frac{v_i}{v_{e-1}(2i+1,2e-2)\left[(2i+1,2e-1)+(2i+1,2e-2)c_e\right]}\\
n_i c_i &= \frac{(2i+1,2e-2)}{(2i,2e-2)}\\
&-\frac{v_i}{v_{e-1}(2i,2e-2)\left[(2i,2e-1)+(2i,2e-2)c_e\right]}\\
g_i &= \frac{(2i+1,2e-2)}{(2i+2,2e-2)}\\
&-\frac{v_i}{v_{e-1}(2i+2,2e-2)\left[(2i+2,2e-1)+(2i+2,2e-2)c_e\right]}\\
\frac{1}{g_i} &= \frac{(2i+2,2e-2)}{(2i+1,2e-2)}\\
&+\frac{v_i}{v_{e-1}(2i+1,2e-2)\left[(2i+1,2e-1)+(2i+1,2e-2)c_e\right]}
\end{aligned}\right\}(i)$$

II. wenn g_e gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{n_i c_i} &= \frac{(2i, 2e)}{(2i+1, 2e)} \\
&+ \frac{v_i}{v_e (2i+1, 2e)\left[(2i+1, 2e)\, g_e + (2i+1, 2e-1)\right]} \\
n_i c_i &= \frac{(2i+1, 2e)}{(2i, 2e)} \\
&- \frac{v_i}{v_e (2i, 2e)\left[(2i, 2e)\, g_e + (2i, 2e-1)\right]} \\
g_i &= \frac{(2i+1, 2e)}{(2i+2, 2e)} \\
&- \frac{v_i}{v_e (2i+2, 2e)\left[(2i+2, 2e)\, g_e + (2i+2, 2e-1)\right]} \\
\frac{1}{g_i} &= \frac{(2i+2, 2e)}{(2i+1, 2e)} \\
&+ \frac{v_i}{v_e (2i+1, 2e)\left[(2i+1, 2e)\, g_e + (2i+1, 2e-1)\right]}
\end{aligned}\right\} (k)$$

Behandeln wir endlich $(2i, 2e')$ etc. auf dieselbe Weise, wie es in Nro. 43 geschehen ist, und bemerken, dass e grösser als i, mithin

$$\frac{1}{n_i c_i}\, g_i \cdot \cdot \cdot \cdot g_{e-1} \frac{1}{n_e c_e} = \frac{v_{i-1} V_e}{V_{i-1} g_{i-1} v_e} = \frac{v_i V_e}{n_i V_i c_i v_e}$$

ist, so entstehen dadurch die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
(2i, 2e') &= (2i, 2e-1) \frac{1}{n_e c_e} + (2i, 2e-2) \frac{1}{n_e} \\
&= \frac{v_{i-1} V_e}{V_{i-1} g_{i-1} v_e} = \frac{v_i V_e}{n_i V_i c_i v_e} \\
(2i+1, 2e') &= (2i+1, 2e-1) \frac{1}{n_e c_e} + (2i-1, 2e-2) \frac{1}{n_e} \\
&= \frac{v_i V_e}{V_i v_e} \\
(2i, 2e+1') &= (2i, 2e)\, g_e + (2i, 2e-1) \\
&= \frac{v_{i-1} V_e g_e}{V_{i-1} g_{i-1} v_e} = \frac{v_i V_e g_e}{n_i V_i c_i v_e} \\
(2i+1, 2e+1') &= (2i+1, 2e)\, g_e + (2i+1, 2e-1) \\
&= \frac{v_i V_e g_e}{V_i v_e}
\end{aligned}\right\} (l)$$

45) Die Grössen, welche in Nro. 41 und Nro. 44 mit (i, e) bezeichnet wurden, sind nicht einander gleich, es bestehen aber Relationen zwischen ihnen, wodurch die eine aus der anderen hergeleitet werden kann und welche wir aufsuchen wollen, da wir nützliche Folgerungen daraus ziehen können.

Wir haben am Anfange von Nro. 3 gesehen, dass das in Nro. 41 gebrauchte (i, e), bei welchem i den grössten und e den kleinsten Index von q bezeichnet, aus mehreren Producten besteht, wovon das erste $= q_i\, q_{i-1} \ldots . q_{e+1}\, q_e$ ist, die übrigen aber hieraus durch Verwechselung von einem oder mehreren Paaren auf einander folgender Factoren $q_m\, q_{m-1}$ mit s_m erhalten werden. In Nro. 44 dagegen bezeichnet i den kleinsten und e den grössten Index von q, und (i, e) ist aus den analogen Producten zusammengesetzt, wovon das erste $= q_i\, q_{i+1} \ldots . q_{e-1}\, q_e$ ist, die übrigen aber hieraus durch Verwechselung von einem oder mehreren Paaren auf einander folgender Factoren $q_m\, q_{m+1}$ mit s_m entstehen. Ausserdem erhalten q und s in beiden Fällen verschiedene Werthe, welche in den allegirten Nummern angegeben sind.

Um daher die letztere Bezeichnung auf die erstere zurückzuführen, müssen wir i mit e verwechseln und die Ordnung der in (i, e) enthaltenen Grössen umkehren, da hierdurch, wie wir in Nro. 3 gesehen haben, der Werth von (i, e) nicht abgeändert wird. Bezeichnet man nun zur Unterscheidung alle Grösseu, welche sich auf den zweiten Fall beziehen, mit einem Accente, so ist nach jener Verwechselung, ebenso wie im ersten Falle, das erste Glied von

$$(i, e)' = q'_i\, q'_{i-1} \ldots . q'_{e+1}\, q'_e$$

Wäre daher dieses Glied allein vorhanden, so würde

$$(i, e)' = \frac{q'_i}{q_i}\, \frac{q'_{i-1}}{q_{i-1}} \ldots . \frac{q'_{e+1}}{q_{e+1}}\, \frac{q'_e}{q_e}\, (i, e)$$

seyn. Nach den erwähnten Werthen von q und q' ist aber allgemein

$$\frac{q'_{2m+1}}{q_{2m+1}} = -1$$

$$\frac{q'_{2m}}{q_{2m}} = -\frac{1}{n_m}$$

Bemerken wir ausserdem, dass

$$n_i\, n_{i-1} \ldots . n_e = \frac{v_i}{v_{e-1}}$$

ist, so entstehen aus der vorhergehenden Formel, je nachdem i und e gerade oder ungerade sind, die vier folgenden:

$$\left.\begin{aligned}(2i, 2e)' &= -(2i, 2e)\,\frac{v_{e-1}}{v_i}\\ (2i, 2e+1)' &= (2i, 2e+1)\,\frac{v_e}{v_i}\\ (2i-1, 2e)' &= (2i-1, 2e)\,\frac{v_{e-1}}{v_{i-1}}\\ (2i-1, 2e+1)' &= -(2i-1, 2e+1)\,\frac{v_e}{v_{i-1}}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(a)}$$

Bei den übrigen Gliedern von (i, e) und $(i, e)'$ werden in dem ersten Gliede ein oder mehrere Paare auf einander folgender Factoren

$q_{2m+1}\, q_{2m}$ mit s_{2m+1}, $\quad q_{2m}\, q_{2m-1}$ mit s_{2m},

$q'_{2m+1}\, q'_{2m}$ mit s'_{2m}, $\quad q'_{2m}\, q'_{2m-1}$ mit s'_{2m-1}

verwechselt. Es ist aber

$$\frac{q'_{2m+1}\, q'_{2m}}{q_{2m+1}\, q_{2m}} = \frac{s'_{2m}}{s_{2m+1}} = \frac{1}{n_m}$$

$$\frac{q'_{2m}\, q'_{2m-1}}{q_{2m}\, q_{2m-1}} = \frac{s'_{2m-1}}{s_{2m}} = \frac{1}{n_m}$$

woraus folgt, dass jene Verwechselungen durchaus keine Aenderungen in den Gleichungen (a) hervorbringen, diese mithin auf sämmtliche Glieder der mit Parenthesen bezeichneten Grössen, d. h. auf die letzteren selbst, anwendbar sind. Will man daher diejenigen in Nro. 44 erhaltenen Formeln, in denen nur die verschiedenen durch (i, e) angedeuteten Grössen vorkommen, durch die Werthe ausdrücken, welche den letzteren in Nro. 41 beigelegt wurden, so ist hierzu weiter nichts erforderlich, als zuerst i mit e zu verwechseln und die Ordnung davon innerhalb der Parenthesen umzukehren, sodann

$$(2i,\ 2e) \text{ mit } -\frac{\nu_{e-1}}{\nu_i}$$

$$(2i,\ 2e+1) \text{ mit } \frac{\nu_e}{\nu_i}$$

$$(2i-1,\ 2e) \text{ mit } \frac{\nu_{e-1}}{\nu_{i-1}}$$

$$(2i-1,\ 2e+1) \text{ mit } -\frac{\nu_e}{\nu_{i-1}}$$

zu multipliciren.

Hierdurch erhalten wir nach den in Nro. 41 gebrauchten Bezeichnungen aus (e) und (f) der vorhergehenden Nummer:

I. wenn c_i gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_e} &= \frac{-(2i-1,\ 2e) + (2i-2,\ 2e)\, c_i}{(2i-1,\ 2e+1) - (2i-2,\ 2e+1)\, c_i} \\ g_e &= \frac{-(2i-1, 2e+1) + (2i-2, 2e+1)\, c_i}{(2i-1,\ 2e+2) - (2i-2,\ 2e+2)\, c_i} \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

II. wenn g_i gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_e} &= \frac{-(2i,\ 2e)\, g_i + (2i-1,\ 2e)\, n_i}{(2i,\ 2e+1)\, g_i - (2i-1,\ 2e+1)\, n_i} \\ g_e &= \frac{-(2i, 2e+1)\, g_i + (2i-1, 2e+1)\, n_i}{(2i,\ 2e+2)\, g_i - (2i-1,\ 2e+2)\, n_i} \end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

Ferner geben die Formeln (i) und (k) jener Nummer vermittelst derselben Methode:

I. wenn c_i gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_e} &= -\frac{(2i-2,\ 2e)}{(2i-2,\ 2e+1)} \\ &\quad - \frac{\nu_{i-1}}{\nu_{e-1}\,(2i-2, 2e+1)\left[(2i-1, 2e+1) - (2i-2,\ 2e+1)\, c_i\right]} \\ c_e &= -\frac{(2i-2,\ 2e+1)}{(2i-2,\ 2e)} \\ &\quad + \frac{\nu_{i-1}}{\nu_{e-1}\,(2i-2,\ 2e)\left[(2i-1,\ 2e) - (2i-2,\ 2e)\, c_i\right]} \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_e &= -\frac{(2i-2,\ 2e+1)}{(2i-2,\ 2e+2)} \\
&\quad + \frac{v_{i-1}}{v_e(2i-2,\ 2e+2)\left[(2i-1,\ 2e+2)-(2i-2,\ 2e+2)\,c_i\right]} \\
\frac{1}{g_e} &= -\frac{(2i-2,\ 2e+2)}{(2i-2,\ 2e+1)} \\
&\quad - \frac{v_{i-1}}{v_e(2i-2,\ 2e+1)\left[(2i-1,\ 2e+1)-(2i-2,\ 2e+1)\,c_i\right]}
\end{aligned}\right\}\text{(d)}$$

II. wenn g_i gegeben ist,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{c_e} &= -\frac{(2i,2e)}{(2i,2e+1)} \\
&\quad + \frac{v_i}{v_{e-1}(2i,\ 2e+1)\left[(2i,\ 2e+1)\,g_i-(2i-1,\ 2e+1)\,n_i\right]} \\
c_e &= -\frac{(2i,2e+1)}{(2i,\ 2e)} \\
&\quad - \frac{v_i}{v_{e-1}(2i,\ 2e)\left[(2i,\ 2e)\,g_i-(2i-1,\ 2e)\,n_i\right]} \\
g_e &= -\frac{(2i,\ 2e+1)}{(2i,\ 2e+2)} \\
&\quad - \frac{v_i}{v_e(2i,\ 2e+2)\left[(2i,\ 2e+2)\,g_i-(2i-1,\ 2e+2)\,n_i\right]} \\
\frac{1}{g_e} &= -\frac{(2i,\ 2e+2)}{(2i,\ 2e+1)} \\
&\quad + \frac{v_i}{v_e(2i,\ 2e+1)\left[(2i,\ 2e+1)\,g_i-(2i-1,\ 2e+1)\,n_i\right]}
\end{aligned}\right\}\text{(e)}$$

Endlich folgen auf dieselbe Weise aus (l) der vorhergehenden Nummer die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&(2i-1,\ 2e)\,\frac{1}{c_i}-(2i-2,\ 2e)= \\
&\qquad =\frac{V_i}{V_{e-1}\,g_{e-1}}=\frac{V_i}{V_e\,c_e} \\
&(2i-1,\ 2e+1)\,\frac{1}{c_i}-(2i-2,\ 2e+1)=-\frac{V_i}{V_e} \\
&(2i,\ 2e)\,g_i-(2i-1,\ 2e)\,n_i= \\
&\qquad =-\frac{V_i\,g_i}{V_{e-1}\,g_{e-1}}=-\frac{V_i\,g_i}{V_e\,c_e} \\
&(2i,\ 2e+1)\,g_i-(2i-1,\ 2e+1)\,n_i=\frac{V_i\,g_i}{V_e}
\end{aligned}\right\}.\ \text{(f)}$$

46) Bei der Anwendung der in den vorhergehenden Nummern entwickelten Formeln kommt der Fall am häufigsten vor, dass c_1 unmittelbar gegeben ist. Gebrauchen wir daher die in Nro. 41 angenommenen Bezeichnungen, so müssen wir in den allgemeinen Formeln $e = 1$ setzen, um sie dem gegenwärtigen Falle anzupassen.

Hierdurch erhalten wir zuerst aus (e) jener Nummer

$$\left.\begin{aligned}
q'_1 &= c_1 \\
c_i &= \frac{(2i-1,\,2)\,c_1 + (2i-1,\,3)}{(2i-2,\,2)\,c_1 + (2i-2,\,3)} \\
&= \frac{(2i-1,\,1')}{(2i-2,\,1')} = [2i-1,\,1'] \\
&= q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{q_{2i-3} + \cfrac{s_{2i-3}}{\ddots + \cfrac{s_3}{q_2 + \cfrac{1}{c_1}}}}} \\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,\,2)\,c_1 + (2i,\,3)}{(2i-1,\,2)\,c_1 + (2i-1,\,3)} \\
&= \frac{(2i,\,1')}{(2i-1,\,1')} = [2i,\,1'] \\
&= q_{2i} + \cfrac{s_{2i}}{q_{2i-1} + \cfrac{s_{2i-1}}{q_{2i-2} + \cfrac{s_{2i-2}}{\ddots + \cfrac{s_3}{q_2 + \cfrac{1}{c_1}}}}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(a)}$$

Bemerkt man ferner, dass für

$$e = 1$$

$$n_e = \nu_e = n_1$$

$$\nu_{e-1} = \frac{\nu_e}{n_e} = 1$$

$$V_e = V_1 = 1$$

ist, so geben die Formeln (c) von Nro. 42

$$\left.\begin{aligned}
c_i &= \frac{(2i-1,2)}{(2i-2,2)} - \frac{\nu_{i-1}}{(2i-2,2)\,[(2i-2,2)\,c_1 + (2i-2,3)]} \\
\frac{1}{c_i} &= \frac{(2i-2,2)}{(2i-1,2)} + \frac{\nu_{i-1}}{(2i-1,2)\,[(2i-1,2)\,c_1 + (2i-1,3)]} \\
\frac{n_i}{g_i} &= \frac{(2i,2)}{(2i-1,2)} + \frac{\nu_{i-1}}{(2i-1,2)\,[(2i-1,2)\,c_1 + (2i-1,3)]} \\
\frac{g_i}{n_i} &= \frac{(2i-1,2)}{(2i,2)} - \frac{\nu_{i-1}}{(2i,2)\,[(2i,2)\,c_1 + (2i,3)]}
\end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Endlich folgt aus (a) von Nro. 43

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\nu_{i-1}\,c_1}{V_i} &= (2i-1,\,1') = (2i-1,\,2)\,c_1 + (2i-1,\,3) \\
\frac{\nu_i\,c_1}{V_i\,g_i} &= (2i,1') = (2i,\,2)\,c_1 + (2i,\,3)
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{V_i} &= \frac{(2i-1,\ 1')}{v_{i-1}\ c_1} = \frac{(2i-1,\ 2)}{v_{i-1}} + \frac{(2i-1,\ 3)}{v_{i-1}\ c_1} \\ \frac{v_i}{V_i g_i} &= \frac{(2i,\ 1')}{c_1} = (2i,\ 2) + (2i,\ 3)\ \frac{1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (d)$$

Umgekehrt dienen die Formeln (c), (e) und (f) von Nro. 45 dazu, um c_1 und V_i durch g_i auszudrücken. Durch die Annahme von $e = 1$ verwandeln sie sich in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \frac{-(2i,2)\,g_i + (2i-1,2)\,n_i}{(2i,\ 3)\ g_i - (2i-1,\ 3)\ n_i} \\ &= -\frac{(2i,2)}{(2i,3)} + \frac{v_i}{(2i,3)\left[(2i,3)\,g_i - (2i-1,3)\,n_i\right]} \\ c_1 &= -\frac{(2i,3)}{(2i,2)} - \frac{v_i}{(2i,2)\left[(2i,2)\,g_i - (2i-1,2)\,n_i\right]} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (e)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_i g_i}{c_1} &= -(2i,\ 2)\,g_i + (2i-1,\ 2)\ n_i \\ V_i\ g_i &= (2i,\ 3)\ g_i - (2i-1,\ 3)\ n_i \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (f)$$

Die beiden letzten geben ferner

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_i}{c_1} &= -(2i,\ 2) + (2i-1,\ 2)\ \frac{n_i}{g_i} \\ V_i &= (2i,\ 3) + (2i-1,\ 3)\ \frac{n_i}{g_i} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (g)$$

Bilder.

47) Setzen wir in den Gleichungen des allgemeinen Strahles, (h) von Nro. 39,

$$z_i = g_i$$

so werden die von dem Hauptstrahle an gezählten Coordinaten desselben

$$y_i' = x_i' = 0$$

Alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, schneiden sich daher nach der i^{ten} Brechung in demjenigen Punkte des Hauptstrahles, dem die Abscisse g_i zugehört, und welcher das *Bild* des leuchtenden Punktes ist. Nach Nro. 34 liegt aber der Hauptstrahl ganz in derjenigen Ebene, welche durch den dazu gehörigen leuchtenden Punkt und die Axe des Instrumentes gelegt ist; *das Bild eines leuchtenden Punktes befindet sich daher stets in der durch den letzteren und die Axe des Instrumentes gelegten Ebene.*

Die Coordinaten des Bildes erhalten wir aus (d) und (f) von Nro. 39, wenn wir darin $z_i = g_i$ setzen. Hierdurch werden

die Coordinaten des Bildes

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i'' = 0 \\ y_i &= y_i'' = \frac{V_i\ g_i\ \varphi_1}{v_i} = f_i \\ z_i &= g_i \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (a)$$

so wie sie in Nro. 4 bereits gefunden wurden.

Jedem Punkte des Gegenstandes gehört ein solches Bild zu. Wird nun derselbe, wie wir angenommen haben, als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene betrachtet, so ist für alle seine Punkte c_1, und folglich auch g_i, einerlei. *Die Bilder von sämmtlichen Punkten des Gegenstandes liegen daher in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene, welche sich in der Entfernung g_i vor der i^{ten} brechenden Fläche befindet.*

Die Ordinaten y_i sind als positiv angenommen worden, wenn sie mit den correspondirenden Ordinaten der leuchtenden Punkte auf derselben Seite der Axe des Instrumentes liegen. In diesem Falle hat das Bild dieselbe Lage wie der Gegenstand, d. h. es ist *aufrecht*. Werden dagegen die Ordinaten y_i verneint, so hat das Bild die umgekehrte Lage, d. h. es ist *verkehrt*. Da nun das Zeichen von y_i bloss von dem Zeichen der Grösse $V_i\, g_i$ abhängt, so können wir den Schluss machen: *Das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild ist aufrecht oder verkehrt, je nachdem die Grösse $V_i\, g_i$ positiv oder negativ ist.*

Für denjenigen Punkt des Gegenstandes, welcher in der Axe des Instrumentes liegt, ist φ_1, und folglich auch $y_i = 0$, d. h. das Bild jenes Punktes befindet sich ebenfalls in der Axe des Instrumentes.

Die gebrochenen Strahlen wurden bei den bisherigen Untersuchungen als gerade Linien betrachtet und ihre Lage durch die Gleichungen von diesen bestimmt. Da nun die Gleichungen einer geraden Linie dieselbe so enthalten, dass sie nach beiden Seiten bis ins Unendliche verlängert gedacht wird, so begreifen die Gleichungen der gebrochenen Strahlen nicht nur diejenigen Theile derselben, welche wirklich zu Stande kommen, sondern auch diejenigen Theile, welche blos durch die in Gedanken vorgenommene Verlängerung der ersteren entstehen. Es ist aber klar, dass die gebrochenen Strahlen stets hinter der correspondirenden Fläche liegen, und dass sie nur in so weit zu Stande kommen, als sie nicht von einer folgenden brechenden Fläche aufgefangen werden. Fällt nun das durch die gebrochenen Strahlen hervorgebrachte Bild auf denjenigen Theil derselben, welcher wirklich zu Stande kommt, so heisst es ein *wirkliches Bild*, im entgegengesetzten Falle ein *eingebildetes*. Beide Arten von Bildern können wir sehr leicht von einander unterscheiden. Da nämlich g_i die Entfernung des Bildes von der correspondirenden Fläche, vor derselben angenommen, d_i die Entfernung der folgenden brechenden Fläche ausdrückt, so können wir den Schluss machen: *Das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild ist nur dann ein wirkliches Bild, wenn g_i verneint, und ohne Rücksicht auf das Zeichen kleiner als d_i ist. Bei der letzten brechenden Fläche fällt die zweite Bedingung weg.*

Mag aber auch das Bild wirklich oder eingebildet seyn, so fallen die Strahlen in ein dahinter stehendes Auge nach denselben

Richtungen, als wenn sie von einem an der Stelle des Bildes befindlichen und ihm gleichen Gegenstande ausgiengen, daher das Bild dem Auge wie ein solcher Gegenstand erscheint.

Da ferner alle Strahlen, welche von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehen, sich in einem Punkte vereinigen, und die den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes entsprechenden Vereinigungspunkte in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene liegen, ebenso wie es bei dem Gegenstande selbst der Fall ist, so folgt hieraus, *dass das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild vollkommen deutlich ist, wenn die Abweichungen der Strahlen vernachlässigt werden.*

Es bleibt nun noch übrig, die Gestalt des Gegenstandes mit der seines Bildes zu vergleichen.

Die Coordinaten eines beliebigen in der Ebene der yz befindlichen Punktes des Gegenstandes sind nach Nro. 2 und 4

$$\left.\begin{aligned} y &= b_1 = c_1\,\varphi_1 \\ z &= c_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Die Coordinaten des dazu gehörigen Bildes, welches nach dem Vorhergehenden ebenfalls in der Ebene der yz liegt, sind vermöge (a)

$$\left.\begin{aligned} y_i &= f_i = \frac{V_i\,g_i\,\varphi_1}{v_i} \\ z_i &= g_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Nehmen wir nun, wie in Nro. 34 an, dass sich die Ebene der yz um die Axe des Instrumentes dreht, bis sie in ihre anfängliche Lage zurückkommt, und nennen wir

ψ_1 den veränderlichen Winkel zwischen der anfänglichen und einer beliebigen Lage der Ebene der yz,

so kann die Lage der verschiedenen Punkte des Gegenstandes, welchen ich wie bisher als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene betrachte, durch die Polarcoordinaten ψ_1 und y ausgedrückt werden.

Bezeichnet man ferner durch ψ_i und y_i die Polarcoordinaten des entsprechenden Punktes vom Bilde, welches ebenfalls in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene liegt, so ist

$$\psi_i = \psi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

weil der leuchtende Punkt und das ihm entsprechende Bild sich in einer durch die Axe des Instrumentes gelegten Ebene befinden.

Die Polarordinaten y und y_i erhalten die in (b) und (c) angegebenen Werthe. Eliminirt man daraus φ_1, so wird

$$\frac{y_i}{y} = \frac{f_i}{b_1} = \frac{V_i\,g_i}{v_i\,c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Die Grösse $\frac{V_i\,g_i}{v_i\,c_1}$ ist für alle Punkte des Gegenstandes einerlei, woraus folgt, dass y_i und y ein beständiges Verhältniss zu einander

haben, dessen Exponent jene Grösse ist. Bei Figuren, deren Punkte durch Polarcoordinaten bestimmt werden, bestehen aber die Bedingungen der Aehnlichkeit darin, dass die als Abscissen dienenden Winkel gleich sind, die Ordinaten dagegen in einem beständigen Verhältnisse zu einander stehen. Diese beiden Bedingungen werden durch die Gleichungen (d) und (e) erfüllt; *das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild ist folglich dem Gegenstande vollkommen ähnlich, wenn man die Abweichungen vernachlässigt. Der Exponent des Verhältnisses zwischen beiden wird durch die in (e) gegebene Grösse bestimmt.*

Vermittelst der Formeln (c) und (d) der vorhergehenden Nummer können f_i und $\frac{f_i}{b_1}$ durch die mit Parenthesen bezeichneten Grössen ausgedrückt werden, und es folgt daraus vermöge (a) und (e) der gegenwärtigen Nummer:

I. die Ordinate des Bildes

$$f_i = \frac{c_1 \varphi_1}{(2i, 1')} = \frac{c_1 \varphi_1}{(2i, 2)\, c_1 + (2i, 3)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

II. der Exponent des Verhältnisses zwischen dem Bilde und Gegenstande

$$\frac{f_i}{b_1} = \frac{1}{(2i, 1')} = \frac{1}{(2i, 2)\, c_1 + (2i, 3)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

Die Abscisse g_i des Bildes ist durch die Formeln der vorhergehenden Nummer unmittelbar gegeben. Ist $\frac{n_i}{g_i}$ durch die erste oder zweite Formel (a) jener Nummer berechnet worden, so ist dadurch der Nenner von f_i und $\frac{f_i}{b_1}$ bekannt, wodurch in diesem Falle die Rechnung erleichtert wird.

Verwechselung des Gegenstandes mit dem Bilde.

48) Da, wie wir in der vorhergehenden Nummer gesehen haben, alle Lichtstrahlen, welche von einem beliebigen Punkte des Gegenstandes ausgehen, sich in dem correspondirenden Punkte des Bildes durchschneiden, und dieses, ebenso wie jener, in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene liegt, da ferner der Weg eines Lichtstrahles ungeändert bleibt, wenn er von dem letzteren in umgekehrter Richtung durchlaufen wird, so können wir das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild als einen Gegenstand ansehen, von welchem die Lichtstrahlen in das Instrument fallen, und den Weg derselben rückwärts in der Richtung von der i^{ten} nach der ersten brechenden Fläche berechnen, wodurch sich der wirkliche Gegenstand in das der letzteren Fläche zugehörige Bild verwandelt.

Um die Lage der Punkte in dem nunmehr als Gegenstand angenommenen i^{ten} Bilde auf eine ähnliche Weise zu bestimmen, wie

es in Nro. 4 bei dem wirklichen Gegenstande geschehen ist, ziehe ich von dem Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche eine Linie nach dem den Coordinaten c_1 und φ_1 entsprechenden Punkte jenes Bildes und nenne

Φ_i die Tangente des Winkels, welche diese Linie mit der Axe der z macht.

Hiernach sind die rechtwinkeligen Coordinaten des erwähnten Punktes

$$\left.\begin{aligned} y_i &= g_i\,\Phi_i \\ z_i &= g_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)_i$$

so dass die Lage desselben vollkommen durch die Grössen g_i und Φ bestimmt ist.

Durch die Vergleichung der ersten Formel (a) mit (c) der vorhergehenden Nummer lassen sich φ_1 und Φ_i wechselsweise durch einander ausdrücken; man erhält nämlich

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i &= \frac{V_i}{v_i}\,\varphi_1 \\ \varphi_1 &= \frac{v_i}{V_i}\,\Phi_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Dieses vorausgesetzt, können wir die allgemeinen Formeln auf den vorliegenden Fall anwenden, wenn wir darin die erforderlichen Modificationen eintreten lassen.

Zählen wir die brechenden Flächen nach derselben Ordnung, wie bisher, so haben die der m^{ten} vorhergehenden Flächen den Index $m-1$, $m-2$ etc., wenn der Weg der Strahlen von dem wirklichen Gegenstande nach dem letzten Bilde berechnet wird; bei der umgekehrten Berechnung dagegen treten an ihre Stelle diejenigen Flächen, welche mit dem Index $m+1$, $m+2$ etc. versehen sind. Sobald daher in einer Gleichung mehrere Index m, $m-1$, $m-2$ etc. vorkommen, müssen dieselben in m, $m+1$, $m+2$ etc. verwandelt werden, wenn der Weg der Strahlen rückwärts berechnet wird.

In Bezug auf die Halbmesser der brechenden Flächen und die Vereinigungsweiten können wir bemerken, dass dieselben sämmtlich ihre Lage, und mithin auch ihre Zeichen, ungeändert beibehalten. In den allgemeinen Formeln bezeichnet aber c_m die Vereinigungsweite *vor* der Brechung durch die m^{te} Fläche, g_m dieselbe *nach* dieser Brechung, statt dass nunmehr das Entgegengesetzte stattfindet. Hieraus folgt daher, dass bei der umgekehrten Berechnung a_m ungeändert bleibt, c_m und g_m dagegen mit einander verwechselt werden müssen.

Ferner hatten wir oben angenommen, dass jedesmal die folgende brechende Fläche *hinter* der vorhergehenden liegt, statt dass sich gegenwärtig die letztere *vor* der ersteren befindet, wodurch sämmtliche d das entgegengesetzte Zeichen erhalten. Ausserdem folgt nach der bisherigen Annahme auf die $(m+1)^{te}$ brechende Fläche d_{m+1},

jetzt dagegen d_m, daher bei der umgekehrten Berechnung d_{m+1} mit $-d_m$ verwechselt werden muss.

Sodann verwandelt sich bekanntlich n_m in $\frac{1}{n_m}$, wenn der Lichtstrahl sich, wie hier, in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Die sämmtlichen Coordinaten endlich erleiden keine Abänderungen, da ihre Lage dieselbe bleibt, wie bei der anfänglichen Annahme.

Durch die angegebenen Verwechselungen folgen die Gleichungen (b) von Nro. 40 aus (a) derselben Nummer, und ebenso haben wir dadurch die Formeln von Nro. 44 aus den allgemeinen Formeln abgeleitet. Vertauschen wir daher in (b) von Nro. 40, (f) und (k) von Nro. 44 i und e mit m und i, so erhalten wir dadurch die Vereinigungsweiten c_m und g_m für eine beliebige brechende Fläche vermittelst der letzten, als bekannt angenommenen Vereinigungsweite g_i.

Wollen wir die allgemeinen Formeln ungeändert beibehalten, so müssen wir die brechenden Flächen rückwärts zählen, da gegenwärtig die i^{te} als die erste angenommen wird. Alsdann entspricht dem Index m, rückwärts gezählt, der Index $i-m+1$, vorwärts gezählt. Inclaviren wir daher die Buchstaben, welche sich auf die umgekehrte Berechnung beziehen, so wird

$$\left.\begin{aligned}
(a)_m &= a_{i-m+1} \\
(c)_m &= g_{i-m+1} \\
(g)_m &= c_{i-m+1} \\
(d)_m &= -d_{i-m} \\
(n)_m &= \frac{1}{n_{i-m+1}} \\
(\zeta)_j &= \zeta'_{i-j+1} \\
(\zeta')_{j+1} &= \zeta_{i-j} \\
(\acute{X})_1 &= \acute{X}_i \\
(\acute{Y})_1 &= \acute{Y}_i \\
(\acute{R})_1 &= \acute{R}_i \\
(\varphi)_1 &= \Phi_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Diese Werthe geben ferner

$$\left.\begin{aligned}
(\nu)_m &= (n)_m \ldots (n)_1 = \frac{1}{n_{i-m+1}\ldots n_i} \\
&= \frac{\nu_{i-m}}{\nu_i} = \frac{\nu_{i-m+1}}{n_{i-m+1}\,\nu_i} \\
(V)_m &= \frac{(g)_{m-1}}{(c)_m}\cdots\frac{(g)_1}{(c)_2} = \frac{c_{i-m+2}}{g_{i-m+1}}\cdots\frac{c_i}{g_{i-1}} \\
&= \frac{V_{i-m+1}}{V_i} \\
(f)_i &= b_1 = \frac{(V)_i\,(g)_i\,(\varphi)_1}{(\nu)_i} = \frac{\nu_i\,c_1\,\Phi_i}{V_i} \\
(g)_i &= c_1
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Vermöge (g) und (k) von Nro. 39 ist

$$Y_i = Y'_i + \frac{K_i \varphi_1}{V_i}$$

folglich, wenn man statt φ_1 seinen Werth aus (b) substituirt,

$$Y_i = Y'_i + \frac{v_i K_i}{V_i^2} \Phi_i$$

Rückwärts gezählt ist aber

$$Y_i = (Y)_1 = (Y')_1 + (K)_1 (\varphi)_1 = Y'_i + (K)_1 \Phi_i$$

Die Vergleichung der beiden letzten Formeln giebt

$$(K)_1 = \frac{v_i K_i}{V_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

wodurch alle in den allgemeinen Formeln enthaltene Grössen bestimmt sind.

Brennpunkte eines Systems von brechenden Flächen.

49) Wir haben in (b) von Nro. 46 und (f) von Nro. 47 die Coordinaten des Bildes durch die mit Parenthesen hezeichneten Grössen ausgedrückt und dadurch die beiden Formeln erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{g_i}{n_i} &= \frac{(2i-1,\,2)}{(2i,\,2)} - \frac{v_{i-1}}{(2i,\,2)\,[(2i,\,2)\,c_1 + (2i,\,3)]} \\ f_i &= \frac{c_1 \varphi_1}{(2i,\,2)\,c_1 + (2i,\,3)} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Nehmen wir nun die Entfernung des Gegenstandes, c_1 unendlich an, accentuiren für diesen Fall g_i und f_i und setzen

$$f'_i = p_i \varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

so folgt daraus

$$\left.\begin{aligned} g'_i &= \frac{n_i\,(2i-1,\,2)}{(2i,\,2)} \\ p_i &= \frac{1}{(2i,\,2)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Wird dagegen das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild als der Gegenstand betrachtet, so sind vermöge (d) der vorhergehenden Nummer die Coordinaten des wirklichen Gegenstandes, welcher nunmehr die Stelle des Bildes vertritt:

$$(g)_i = c_1$$

$$(f)_i = b_1 = \frac{v_i c_1 \Phi_i}{V_i}$$

folglich, wenn man hierin statt c_1 und $\frac{V_i}{c_1}$ ihre Werthe aus (e) und (g) von Nro. 46 substituirt,

$$c_1 = -\frac{(2i,\,3)}{(2i,\,2)} - \frac{v_i}{(2i,\,2)\,[(2i,\,2)\,g_i - (2i-1,\,2)\,n_i]}$$

$$b_1 = -\frac{v_i \Phi_i}{(2i,\,2) - (2i-1,\,2)\,\dfrac{n_i}{g_i}}$$

Ebenso, wie wir oben den Gegenstand unendlich entfernt angenommen haben, können wir jetzt auch voraussetzen, dass das nach der i^{ten} Brechung entstehende Bild in eine unendliche Entfernung rückt, mithin $g_i = \infty$ wird. Die vorhergehenden Formeln bestimmen alsdann die Lage und Grösse, welche der Gegenstand haben muss, um jenem Bilde zu entsprechen. Sie geben, wenn man für diesen Fall c_1 und b_1 accentuirt und

$$b'_1 = p_1 \Phi_i \quad \text{(d)}$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} c'_1 &= -\frac{(2i, 3)}{(2i, 2)} \\ p_1 &= -\frac{v_i}{(2i, 2)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(e)}$$

Die beiden in der Axe des Instrumentes liegenden Punkte, welchen die Abscissen c'_1 und g'_i zugehören, werden die *Brennpunkte* des Systems von brechenden Flächen genannt.

Sie bestimmen die Entfernungen, in welchen sich einmal der Gegenstand und dann das letzte Bild des Systems befinden müssen, damit im ersteren Falle dieses Bild und im letzteren der Gegenstand unendlich entfernt werden, die Strahlen mithin entweder nach oder vor dem Durchgange durch das Instrument parallel sind.

Die Grössen p_1 und p_i heissen die *Brennweiten* des Systems. Die in (c) und (e) gefundenen Ausdrücke derselben zeigen, dass sie im Allgemeinen von einander verschieden sind und stets entgegengesetzte Zeichen haben. Nur dann werden die beiden Brennweiten gleich und entgegengesetzt, wenn sich vor und hinter dem Instrumente einerlei durchsichtiges Mittel befindet, weil in diesem Falle $v_i = 1$ ist.

Zur Unterscheidung werde ich den der Abscisse c'_1 entsprechenden Brennpunkt und die Brennweite p_1 die *ersten*, die anderen dagegen die *zweiten* nennen.

Zählen wir bei einer beliebigen Entfernung des Gegenstandes die erste und letzte Vereinigungsweite c_1 und g_i nicht, wie es bisher geschehen ist, von den Scheiteln der ihnen correspondirenden brechenden Flächen, sondern von den beiden Brennpunkten an, so wird vermöge der ersten Formel (e)

$$(c - c')_1 = \frac{(2i, 2)\, c_1 + (2i, 3)}{(2i, 2)} \quad \text{(f)}$$

Ferner geben die ersten Formeln (a) und (c), wenn man bemerkt, dass

$$n_i\, v_{i-1} = v_i$$

ist,

$$(g - g')_i = -\frac{v_i}{(2i, 2)\,[(2i, 2)\, c_1 + (2i, 3)]} \quad \text{(g)}$$

Hieraus folgt durch Multiplication und mit Rücksicht auf die in (c) und (e) gefundenen Werthe von p_i und p_1:

$$\left.\begin{aligned}(c-c')_1\,(g-g')_i &= -\frac{\nu_i}{(2i,\,2)^2} = p_1\,p_i\\ &= -\frac{p_i^2}{\nu_i} = -\nu_i\,p_i^2\end{aligned}\right\}\ldots\text{(h)}$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, entweder c_1 oder g_i zu berechnen, wenn entweder g_i oder c_1 gegeben ist und die Grössen c_1', g_i' und p_1 oder p_i berechnet worden sind; man erhält daraus

$$\left.\begin{aligned}(c-c')_1 &= \frac{p_1\,p_i}{(g-g')_i} = -\frac{p_i^2}{\nu_i\,(g-g')_i} = -\frac{\nu_i\,p_i^2}{(g-g')_i}\\ (g-g')_i &= \frac{p_1\,p_i}{(c-c')_1} = -\frac{p_i^2}{\nu_i\,(c-c')_1} = -\frac{\nu_i\,p_i^2}{(c-c')_1}\end{aligned}\right\}\text{(i)}$$

Da $p_1\,p_i$ stets negativ und ν_i stets positiv ist, so zeigt die Gleichung (h), dass $(c-c')_1$ und $(g-g')_i$ stets entgegengesetzte Zeichen haben. Je nachdem sich daher der Gegenstand vor oder hinter dem ersten Brennpunkte befindet, liegt das letzte Bild hinter oder vor dem zweiten Brennpunkte.

Es bleibt jetzt noch übrig, das Verhältniss zwischen dem Gegenstande und dem Bilde durch die Grössen $(c-c')_1$ und $(g-g')_i$ auszudrücken. Vermöge (g) von Nro. 47 ist der Exponent dieses Verhältnisses

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{f_i} &= (2i,2)\,c_1 + (2i,3)\\ &= (2i,2)\,(c-c')_1 + (2i,2)\,c_1' + (2i,3)\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung (c) und aus der ersten Gleichung (e) der gegenwärtigen Nummer folgt aber

$$(2i,2) = \frac{1}{p_i}$$

$$(2i,2)\,c_1' + (2i,3) = 0$$

mithin

$$\frac{b_1}{f_i} = \frac{(c-c')_1}{p_i}$$

Vermöge (h) ist ferner

$$\frac{(c-c')_1}{p_i} = \frac{p_1}{(g-g')_i}$$

$$p_i = \sqrt{-\frac{(c-c')_1\,(g-g')_i}{\nu_i}}$$

Je nachdem man daher den einen oder den anderen dieser Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\frac{b_1}{f_i}$ substituirt, wird

$$\frac{b_1}{f_i} = \frac{(c-c')_1}{p_i} = \frac{p_1}{(g-g')_i} = \sqrt{-\frac{\nu_i\,(c-c')_1}{(g-g')_i}}\;\Bigg\}.\;\text{(k)}$$

Die Grösse des Gegenstandes verhält sich folglich zu der Grösse des Bildes: entweder wie die Entfernung des Gegenstandes von dem

ersten Brennpunkte $(c-c')_1$ zu der zweiten Brennweite p_i, oder wie die erste Brennweite p_1 zu der Entfernung des Bildes von dem zweiten Brennpunkte $(g-g')_i$, oder endlich wie die Quadratwurzel von $\pm\, \nu_i (c-c')_1$ zu der Quadratwurzel von $\mp\, (g-g')_i$.

Ferner ist das Bild aufrecht, wenn $(c-c')_1$ und p_i oder p_1 und $(g-g')_i$ einerlei Zeichen haben, im entgegengesetzten Falle aber verkehrt.

Befindet sich der Gegenstand in einer Entfernung von dem ersten Brennpunkte, welche der ersten Brennweite, mit ihrem eigenthümlichen oder dem entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich ist, so hat man

$$(c-c')_1 = \pm\, p_1 = \mp\, \nu_i\, p_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

folglich vermöge (i) und (k)

$$\left.\begin{array}{l} (g-g')_i = \pm\, p_i \\ \dfrac{b_1}{f_i} = \mp\, \nu_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Das Bild liegt daher in diesem Falle in einer Entfernung vom zweiten Brennpunkte, welche der zweiten Brennweite, mit ihrem eigenthümlichen oder dem entgegengesetzten Zeichen genommen, gleich ist. Je nachdem das eine oder das andere dieser Zeichen stattfindet, ist das Bild verkehrt oder aufrecht und verhält sich zum Gegenstande stets wie 1 zu ν_i.

Setzt man dagegen

$$(c-c_1') = \pm\, p_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

so wird

$$\left.\begin{array}{l} (g-g')_i = \mp\, \nu_i\, p_i = \pm\, p_1 \\ \dfrac{b_1}{f_i} = \pm\, 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Die vorhergehenden Resultate sind daher auch gültig, wenn die beiden Brennweiten p_1 und p_i mit einander verwechselt werden, nur bekommt alsdann das Bild die entgegengesetzte Lage und wird dem Gegenstande in Ansehung der Grösse gleich.

Mittelpunkte eines Systems von brechenden Flächen.

50) Nach (b) und (c) von Nro. 47 sind die Coordinaten des im Gegenstande angenommenen leuchtenden Punktes

$$y = b_1 = c_1\, \varphi_1$$
$$z = c_1$$

die Coordinaten des dazu gehörigen Bildes dagegen

$$\left.\begin{array}{l} y_i = f_i = \dfrac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{\nu_i} \\ z_i = g_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Beide Coordinaten haben jedoch nicht einerlei Ursprung, indem sich derselbe bei z in dem Scheitel der ersten brechenden Fläche, bei z_i dagegen in dem Scheitel der i^{ten} Fläche befindet, welche um die Summe der Entfernungen $d_1 \ldots\ldots d_{i-1}$ von einander abstehen.

Reduciren wir daher y und z auf den Ursprung von y_i und z_i und bezeichnen in diesem Falle jene Coordinaten mit y_1 und z_1, setzen wir ferner zur Abkürzung

$$D = d_1 + d_2 \ldots \ldots + d_{i-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

so wird

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_1 = c_1 \varphi_1 \\ z_1 = c_1 + D \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Verbinden wir nun die beiden zusammengehörigen Punkte im Gegenstande und Bilde in Gedanken durch eine gerade Linie, nennen die laufenden Coordinaten derselben $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{z}_i$, wobei der Ursprung im Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche angenommen wird, so ist die Gleichung jener Linie

$$\frac{\mathfrak{y}_i - y_i}{y_1 - y_i} = \frac{\mathfrak{z}_i - z_i}{z_1 - z_i}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{y}_i - f_i}{b_1 - f_i} = \frac{\mathfrak{z}_i - g_i}{c_1 + D - g_i}$$

Sie durchschneidet die Axe des Instrumentes in einem Punkte, für welchen $\mathfrak{y}_i = 0$ ist.

Bezeichnet man daher durch

M_1 und M_i die Abscissen dieses Durchschnittspunktes, von den Scheiteln der ersten und der i^{ten} brechenden Fläche an gezählt,

so giebt zuerst die vorhergehende Gleichung:

$$\left. M_i = \frac{b_1 g_i - c_1 f_i - f_i D}{b_1 - f_i} \right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

woraus weiter

$$\left. M_1 = M_i - D = \frac{b_1 g_i - c_1 f_i - b_1 D}{b_1 - f_i} \right\} \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

folgt.

An die Stelle des wahren, durch die Coordinaten (a) bestimmten Bildes können wir nunmehr ein zweites hypothetisches Bild setzen, welches mit jenem einerlei Entfernung und Grösse, aber eine umgekehrte Lage hat, wodurch f_i und g_i in Ansehung der Grösse ungeändert bleiben, f_i jedoch das entgegengesetzte Zeichen erhält. Verfahren wir daher mit dem hypothetischen Bilde ebenso, wie es oben mit dem wahren geschehen ist, so ändert sich dadurch in den Gleichungen (d) und (e) nur das Zeichen von f_i ab, so dass wir die beiden Fälle in denselben Formeln begreifen können, wenn wir jener Grösse das doppelte Zeichen geben.

Substituiren wir daher nach dieser Abänderung statt b_1 und f_i ihre Werthe aus (a) und (c), so erhalten wir für die Abscisse des Durchschnittspunktes, je nachdem der Ursprung der Coordinaten im Scheitel der i^{ten} oder der ersten brechenden Fläche angenommen wird, die beiden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \frac{c_1 g_i\left(1 \mp \frac{V_i}{v_i}\right) \mp \frac{V_i g_i D}{v_i}}{c_1 \mp \frac{V_i g_i}{v_i}} \\ M_1 &= \frac{c_1 g_i\left(1 \mp \frac{V_i}{v_i}\right) - c_1 D}{c_1 \mp \frac{V_i g_i}{v_i}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(f)}$$

Da diese Werthe unabhängig von φ_1 sind, so folgt daraus, dass sich alle Linien, welche die correspondirenden Punkte des Gegenstandes und des Bildes mit einander verbinden, in demselben Punkte der Axe durchschneiden, welcher jedoch verschieden ist, je nachdem er sich auf das wahre oder das hypothetische Bild bezieht.

Dagegen sind die Werthe von M_i und M_1 nicht unabhängig von c_1; bei veränderter Entfernung des Gegenstandes erhalten daher die Durchschnittspunkte ebenfalls eine veränderte Lage.

Ich werde sie *die der Entfernung* c_1 *entsprechenden Mittelpunkte des Systems*, und zwar den einen derselben, welchem das obere Zeichen zugehört, den *wahren*, den anderen dagegen den *hypothetischen* Mittelpunkt nennen, je nachdem bei ihrer Bestimmung das wahre oder das hypothetische Bild zu Grund gelegt ist.

Untersuchen wir insbesondere die Lage der Mittelpunkte, wenn entweder der Gegenstand oder das Bild unendlich entfernt ist.

Bezeichnet man durch

m_i den Werth, welchen M_i bei einer unendlichen Entfernung des Gegenstandes erhält,

so giebt die erste Formel (f), wenn darin $c_1 = \infty$ gesetzt wird,

$$m_i = g_i\left(1 \mp \frac{V_i}{v_i}\right) \quad \ldots\ldots \text{(g)}$$

Nach der in (c) der vorhergehenden Nummer eingeführten Bezeichnung und vermöge (d) von Nro. 46 ist aber in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} g_i &= \frac{n_i(2i-1, 2)}{(2i, 2)} = g_i' \\ \frac{g_i V_i}{v_i} &= \frac{1}{(2i, 2)} = p_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(h)}$$

folglich

$$m_i = \frac{n_i(2i-1, 2) \mp 1}{(2i, 2)} = g_i' \mp p_i \quad \ldots\ldots \text{(i)}$$

Nennen wir ebenso im zweiten Falle

m_1 den Werth, welchen M_1 bei einer unendlichen Entfernung des Bildes erhält,

so folgt aus der zweiten Formel (f) durch die Annahme von $g_i = \infty$,

$$m_1 = c_1\left(1 \mp \frac{v_i}{V_i}\right) \quad \ldots\ldots \text{(k)}$$

Da nun nach den in (e) der vorhergehenden Nummer eingeführten Bezeichnungen, mit Rücksicht auf (g) von Nro. 46, bei dem angegebenen Werthe von g_i

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{(2i,\,3)}{(2i,\,2)} = c'_1 \\ \frac{\nu_i\, c_1}{V_i} &= -\frac{\nu_i}{(2i,\,2)} = p_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

ist, so wird

$$m_1 = \frac{-(2i,\,3) \pm \nu_i}{(2i,\,2)} = c'_1 \mp p_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Die durch die Abscissen m_1 und m_i bestimmten Durchschnittspunkte werde ich den *ersten* und den *zweiten Mittelpunkt* des Systems nennen und sie ebenso, wie es im Allgemeinen geschehen ist, durch die Beiworte *wahr* und *hypothetisch* unterscheiden, je nachdem sie sich auf das wahre oder hypothetische Bild beziehen.

Da c'_1 und g'_i die Abscissen der beiden Brennpunkte sind, so ist aus (i) und (m) ersichtlich, dass der erste und der zweite Mittelpunkt von den dazu gehörigen Brennpunkten um die ihnen correspondirenden Brennweiten abstehen. Sie sind daher einerlei mit den Punkten, worauf sich die Gleichuugen (l) und (m) der vorhergehenden Nummer beziehen, so dass die aus denselben gezogenen Schlüsse hier ebenfalls Anwendung finden.

Zählen wir bei einer beliebigen Entfernung des Gegenstandes die erste und letzte Vereinigungsweite c_1 und g_i von den ihnen entsprechenden Mittelpunkten an, so werden sie

$$(c-m)_1 = (c-c' \pm p)_1$$
$$(g-m)_i = (g-g' \pm p)_i$$

folglich

$$(c-c')_1 = (c-m)_1 \mp p_1$$
$$(g-g')_i = (g-m)_i \mp p_i\,.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung (h) der vorhergehenden Nummer, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$[(c-m)_1 \mp p_1]\,[(g-m)_i \mp p_i] = p_1\, p_i$$

Sie giebt durch Ausführung der im ersten Theile angedeuteten Multiplication

$$(c-m)_1\,(g-m)_i \mp p_i\,(c-m)_1 \mp p_1\,(g-m)_i = 0$$

mithin, wenn man statt p_1 seinen Werth

$$p_1 = -\nu_i\, p_i$$

substituirt und die ganze Gleichung durch $(c-m)_1\ (g-m)_i\, p_i$ dividirt,

$$\frac{1}{(g-m)_i} - \frac{\nu_i}{(c-m)_1} = \mp\frac{1}{p_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Diese Gleichung kann dazu gebraucht werden, um c_1 oder g_i zu berechnen, wenn g_i oder c_1 gegeben ist und die Grössen m_i, m_1

und p_i vermittelst der Formeln (h), (i) und (m) berechnet worden sind. Sie giebt

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_i}{(c-m)_1} &= \frac{1}{(g-m)_i} \mp \frac{1}{p_i} \\ \frac{1}{(g-m)_i} &= \frac{v_i}{(c-m)_1} \pm \frac{1}{p_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (o)$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt ferner

$$\begin{aligned} \frac{(c-m)_1}{(g-m)_i} &= v_i \pm \frac{(c-m)_1}{p_i} \\ &= v_i \pm \frac{(c-c')_1}{p_i} + \frac{p_1}{p_i} \end{aligned}$$

Vermöge (h) und (l) ist aber

$$\frac{p_1}{p_i} = -v_i$$

folglich

$$\frac{(c-m)_1}{(g-m)_i} = \pm \frac{(c-c')_1}{p_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (p)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (k) der vorhergehenden Nummer, nämlich

$$\frac{b_1}{f_i} = \frac{(c-c')_1}{p_i}$$

so erhalten wir dadurch

$$\frac{b_1}{f_i} = \pm \frac{(c-m)_1}{(g-m)_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (q)$$

Der Gegenstand und das Bild verhalten sich daher in Ansehung der Grösse wie ihre Abstände von dem ersten und zweiten Mittelpunkte. Werden hierzu die wahren Mittelpunkte genommen, so ist das Bild aufrecht oder verkehrt, je nachdem jene Abstände gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Bei den hypothetischen Mittelpunkten findet das Umgekehrte statt.

Die Gleichung (p) verwandelt sich durch Substitution der in (i) und (m) gefundenen Werthe von m_1 und m_i in die folgende:

$$\frac{(c-c' \pm p)_1}{(g-g' \pm p)_i} = \pm \frac{(c-c')_1}{p_i}$$

Das obere Zeichen gilt für die wahren, das untere für die hypothetischen Mittelpunkte; trennt man daher die, jeden von beiden entsprechenden Formeln, so werden dieselben

$$\frac{(c-c'+p)_1}{(g-g'+p)_i} = + \frac{(c-c')_1}{p_i}$$

$$\frac{(c-c'-p)_1}{(g-g'-p)_i} = - \frac{(c-c')_1}{p_i}$$

Hieraus folgt weiter zuerst

$$\frac{(c-c'+p)_1}{(g-g'+p)_i} = - \frac{(c-c'-p)_1}{(g-g'-p)_i}$$

und dann

$$\frac{(c-c'+p)_1}{(c-c'-p)_1} = - \frac{(g-g'+p)_i}{(g-g'-p)_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (r)$$

Die Zähler dieser Brüche sind die Abstände des Gegenstandes und des Bildes von den ihnen correspondirenden wahren Mittelpunkten, die Nenner hingegen die Abstände von den hypothetischen Mittelpunkten. Je nachdem daher der Zähler und Nenner des ersten Bruches gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben, liegt der Gegenstand ausserhalb oder innerhalb des Raumes, welcher durch den ersten wahren und hypothetischen Mittelpunkt begrenzt wird. Dasselbe gilt bei dem zweiten Bruche in Bezug auf das Bild und die zweiten Mittelpunkte. Hiernach ist aus der Gleichung (r) ersichtlich, dass sich das Bild ausserhalb oder innerhalb des erwähnten Raumes befindet, wenn der Gegenstand ausserhalb oder innerhalb des ihm entsprechenden Raumes liegt.

Die in der vorhergehenden und gegenwärtigen Nummer erhaltenen Resultate sind denen analog, welche Möbius und Bessel in den pag. 62 allegirten Abhandlungen für ein System von Linsengläsern gefunden haben.

Vereinigungsweiten der Hauptstrahlen.

51) Da alle Hauptstrahlen durch denjenigen Punkt gehen, in welchem die Ebene der Hauptblendung die Axe des Instrumentes durchschneidet, so kann dieser Punkt als ein Vereinigungspunkt der Hauptstrahlen nach der j^{ten} oder vor der $(j+1)^{\text{ten}}$ Brechung angesehen werden, und es folgt aus demjenigen, was in Nro. 40 und 47 entwickelt wurde, dass sich die Hauptstrahlen vor und nach jeder Brechung in einem Punkte der Axe vereinigen müssen.

Nennen wir

c''_i und g''_i die Vereinigungsweiten vor und nach der i^{ten} Brechung, beide *vor* der i^{ten} brechenden Fläche angenommen,

so ist, da die Entfernung der Hauptblendung von der j^{ten} brechenden Fläche, *hinter* derselben angenommen, mit ζ_j, ihre Entfernung von der $(j+1)^{\text{ten}}$ brechenden Fläche, *vor* derselben angenommen, mit ζ'_{j+1} bezeichnet wurde,

$$\left.\begin{aligned} g''_j &= -\zeta_j \\ c''_{j+1} &= \zeta'_{j+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Geht man von einem dieser Werthe aus, so erhält man die folgenden Vereinigungsweiten nach (a) von Nro. 40 durch die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} c''_i &= g''_{i-1} + d_{i-1} \\ \frac{1}{g''_i} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c''_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

indem man dieselben abwechselnd gebraucht und dem Index i nach und nach alle Werthe von $i = j+1$ bis $i = i$ giebt.

Zur Berechnung der vorhergehenden Vereinigungsweiten dienen die Formeln (b) von Nro. 40,

$$\left.\begin{array}{l} g''_i = c''_{i+1} - d_i \\ \dfrac{1}{c''_i} = \dfrac{n_i}{g''_i} - \dfrac{(n-1)_i}{a_i} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

indem man sie abwechselnd gebraucht und dem Index i alle Werthe von $i = j$ bis $i = 1$ beilegt.

Sind hiernach c''_i und g''_i für alle brechende Flächen berechnet worden, so kann daraus die bei dem allgemeinen Strahle mit V_i bezeichnete Grösse, welche ich in Bezug auf den Hauptstrahl V''_i nenne, vermittelst der allgemeinen Formeln abgeleitet werden, wenn man darin c_i und g_i mit c''_i und g''_i verwechselt.

Um die Vereinigungsweiten der Hauptstrahlen nach der in Nro. 41 bis 45 entwickelten Methode zu berechnen, müssen wir zuerst alle c und g in den dortigen Formeln mit zwei Accenten versehen, um sie auf den Hauptstrahl zu beziehen. Sodann müssen wir uns erinnern, dass daselbst entweder g_e oder c_e als bekannt angenommen wurde, statt dass nunmehr entweder g''_j oder c''_{j+1} gegeben sind. Im ersteren Falle muss daher in den erwähnten Formeln e mit j verwechselt und $g''_j = -\zeta_j$ gesetzt, im letzteren Falle dagegen e mit $j+1$ verwechselt und $c''_{j+1} = \zeta'_{j+1}$ gesetzt werden, worauf dieselben zur Bestimmung sämmtlicher vorhergehenden und nachfolgenden Vereinigungsweiten hinreichen. Es ist jedoch am bequemsten, bei den vorhergehenden Vereinigungsweiten g''_j, bei den nachfolgenden dagegen c''_{j+1} als bekannt anzunehmen, was sehr gut geschehen kann, da

$$d_j = c''_{j+1} - g''_j = \zeta_j + \zeta'_{j+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

ist, mithin jede der letzteren Grössen aus der anderen und d_j berechnet werden kann. Unter dieser Voraussetzung dienen die Formeln (a) von Nro. 43 und (l) von Nro. 44 zur Berechnung von $\frac{1}{V''_i}$, $\frac{c_1}{V''_i}$, $\frac{1}{V''_i g''_i}$ und $\frac{c_1}{V''_i g''_i}$ für alle brechende Flächen, wovon wir in der Folge Gebrauch machen werden. Behalten wir in den ersteren Formeln die frühere Bezeichnung bei, unterscheiden dagegen, wie in Nro. 45, die mit Parenthesen angedeuteten Grössen in den letzteren Formeln durch einen ausserhalb der Parenthesen gesetzten Accent, so erhalten wir aus den ersteren durch Verwechselung von e mit $j+1$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\nu_{i-1} V''_j g''_j}{V''_i \nu_j} = (2i-1,\ 2j+1') \\ \dfrac{\nu_i V''_j g''_j}{V''_i g''_i \nu_j} = (2i,\ 2j+1') \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

sodann aus den letzteren derselben durch Verwechselung von e mit j:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{v_i \overset{\prime\prime}{V}_j \overset{\prime\prime}{g}_j}{\overset{\prime\prime}{V}_i v_j} = (2i+1,\ 2j+1')' \\ &\frac{v_i \overset{\prime\prime}{V}_j \overset{\prime\prime}{g}_j}{\overset{\prime\prime}{V}_i \overset{\prime\prime}{g}_i v_j} = \frac{v_{i+1} \overset{\prime\prime}{V}_j \overset{\prime\prime}{g}_j}{n_{i+1} \overset{\prime\prime}{V}_{i+1} \overset{\prime\prime}{c}_{i+1} v_j} = (2i+2, 2j+1')' \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (f)$$

Die beiden vorhergehenden Ausdrücke geben ferner, wenn man in dem ersten $i = 1$, in dem zweiten dagegen $i = 0$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{n_1 \overset{\prime\prime}{V}_j \overset{\prime\prime}{g}_j}{v_j} = \frac{n_1 \overset{\prime\prime}{V}_{j+1} \overset{\prime\prime}{c}_{j+1}}{v_j} = (3,\ 2j+1')' \\ &\frac{\overset{\prime\prime}{V}_j \overset{\prime\prime}{g}_j}{\overset{\prime\prime}{c}_1\ v_j} = \frac{\overset{\prime\prime}{V}_{j+1} \overset{\prime\prime}{c}_{j+1}}{\overset{\prime\prime}{c}_1\ v_j} = (2,\ 2j+1')' \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (g)$$

Für diejenigen Flächen, bei welchen i kleiner als j ist, folgt daher aus (f) und (g) durch Division

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i} = \frac{n_1\ (2i+1,\ 2j+1')'}{v_i\ (3,\ 2j+1')'} \\ &\frac{\overset{\prime\prime}{c}_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i} = \frac{(2i+1, 2j+1')'}{v_i\ (2,\ 2j+1')'} \\ &\frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i \overset{\prime\prime}{g}_i} = \frac{n_1\ (2i+2,\ 2j+1')'}{v_i\ (3,\ 2j+1')'} \\ &\frac{\overset{\prime\prime}{c}_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i \overset{\prime\prime}{g}_i} = \frac{(2i+2,\ 2j+1')'}{v_i\ (2,\ 2j+1')'} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (h)$$

In Bezug auf diejenigen Flächen dagegen, bei denen i grösser als $j+1$ ist, erhält man auf gleiche Weise aus (e) und (g)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i} = \frac{n_1\ (2i-1,\ 2j+1')}{v_{i-1}\ (3,\ 2j+1')'} \\ &\frac{\overset{\prime\prime}{c}_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i} = \frac{(2i-1,\ 2j+1')}{v_{i-1}\ (2,\ 2j+1')'} \\ &\frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i \overset{\prime\prime}{g}_i} = \frac{n_1\ (2i,\ 2j+1')}{v_i\ (3,\ 2j+1')'} \\ &\frac{\overset{\prime\prime}{c}_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i \overset{\prime\prime}{g}_i} = \frac{(2i,\ 2j+1')}{v_i\ (2,\ 2j+1')'} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (i)$$

Für die j[te] und (j + 1)[te] Fläche endlich sind die entsprechenden Grössen unmittelbar durch (g) gegeben, da $\overset{\prime}{g}_j$ und $\overset{\prime\prime}{c}_{j+1}$ als bekannt angenommen werden. Sie sind aber auch in (h) und (i) enthalten, wenn man in den beiden ersten Formeln (i) $i = j + 1$, in allen übrigen dagegen $i = j$ setzt und bemerkt, dass vermöge (b) und (e) von Nro. 41

$$\left.\begin{aligned} &(2j,\ 2j+1') = 1 \\ &(2j+1',\ 2j+1') = q'_{2j+1} = \overset{\prime\prime}{c}_{j+1} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (k)$$

ferner vermöge (b) und (e) von Nro. 44

$$\left.\begin{aligned}(2j+2,\ 2j+1')' &= 1\\ (2j+1',\ 2j+1')' &= q'_{2j+1} = g''_j\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

ist. Mit Berücksichtigung der in (k) und (l) gegebenen Werthe reichen daher die Formeln (h) und (i) für sämmtliche Flächen hin.

Wir können jedoch die Vereinigungsweiten der Hauptstrahlen noch auf eine andere Weise berechnen.

Wir haben nämlich in (f) von Nro. 39 die Gleichung von einem derselben nach der i^{ten} Brechung gefunden. Setzen wir darin $\frac{K_i z_i \varphi_1}{V_i}$ als gemeinschaftlichen Factor heraus, so bekommt sie die Gestalt:

$$y''_i = \frac{K_i z_i \varphi_1}{V_i}\left[\frac{1}{z_i} + \frac{V_i^2}{\nu_i K_i} - \frac{1}{g_i}\right]$$

Für den Durchschnittspunkt des Strahles mit der Axe ist

$$y''_i = 0$$

$$z_i = g''_i$$

Durch Substitution dieser Werthe giebt mithin die vorhergehende Gleichung

$$\frac{1}{g''_i} = \frac{1}{g_i} - \frac{V_i^2}{\nu_i K_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Ferner ist vermöge (b)

$$\frac{1}{g''_i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c''_i}$$

und ebenso für den allgemeinen Strahl

$$\frac{1}{g_i} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i} + \frac{1}{n_i c_i}$$

folglich, wenn diese Werthe in (m) substituirt werden,

$$\frac{1}{c''_i} = \frac{1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2}{\nu_i K_i} = \frac{1}{c_i} - \frac{V_i^2}{\nu_{i-1} K_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Die Formeln (m) und (n) bestimmen daher die Vereinigungsweiten der Hauptstrahlen, wenn c_i, g_i, V_i und K_i für den allgemeinen Strahl nach der früher angegebenen Methode berechnet worden sind.

Von den Vereinigungspunkten der Hauptstrahlen gilt übrigens dasselbe, was in Nro. 47 von den Bildern gesagt worden ist, dass sie nämlich wirklich oder eingebildet seyn können, und es ist ersichtlich, dass die dortigen Schlüsse auch hier anwendbar sind, wenn man g_i mit g''_i verwechselt.

Zwischen den Vereinigungsweiten der allgemeinen Strahlen und der Hauptstrahlen finden einige Relationen statt, wovon wir in der Folge Gebrauch machen werden.

Aus (a) und (b) von Nro. 40 und (b) und (c) der gegenwärtigen Nummer erhalten wir nämlich die vier Gleichungen:

$$c_i = g_{i-1} + d_{i-1}$$

$$c''_i = g''_{i-1} + d_{i-1}$$

$$\frac{1}{c_i} = \frac{n_i}{g_i} - \frac{(n-1)_i}{a_i}$$

$$\frac{1}{c''_i} = \frac{n_i}{g''_i} - \frac{(n-1)_i}{a_i}$$

folglich, wenn wir die zwei ersten und die zwei letzten derselben von einander abziehen,

$$\left.\begin{aligned} c_i - c''_i &= g_{i-1} - g''_{i-1} \\ \frac{1}{c_i} - \frac{1}{c''_i} &= n_i\left(\frac{1}{g_i} - \frac{1}{g''_i}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

Ferner folgt aus (m) und (n)

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_i^2}{K_i} &= v_i\left(\frac{1}{g_i} - \frac{1}{g''_i}\right) = \frac{v_i}{n_i}\left(\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c''_i}\right) = \\ &= v_{i-1}\left(\frac{1}{c_i} - \frac{1}{c''_i}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(p)}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} K_i &= \frac{V_i^2}{v_i\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g''}\right)_i} = -\frac{V_i^2\, g_i\, g''_i}{v_i\,(g-g'')_i} = \\ &= \frac{V_i^2}{v_{i-1}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c''}\right)_i} = -\frac{V_i^2\, c_i\, c''_i}{v_{i-1}\,(c-c'')_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(q)}$$

wodurch K_i gegeben ist, wenn die Vereinigungsweiten der allgegemeinen und Hauptstrahlen, sodann vermittelst derselben V_i berechnet worden sind.

Endlich erhält man aus (p), je nachdem man den ersten oder den zweiten Ausdruck von $\frac{V_i^2}{K_i}$ gebraucht,

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{v_i\, K_i}{V_i^2\, g_i} &= \left(\frac{g}{g-g''}\right)_i \\ 1 - \frac{v_i\, K_i}{n_i\, V_i^2\, c_i} &= \left(\frac{c}{c-c''}\right)_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(r)}$$

Da

$$V_1 = \frac{v_1}{n_1} = 1$$

ist, so wird die letzte Gleichung, wenn man sie auf die erste brechende Fläche anwendet,

$$1 - \frac{K_1}{c_1} = \left(\frac{c}{c-c''}\right)_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(s)}$$

Gleichungen der Strahlen, durch die Coordinaten der Einfallspunkte und die Vereinigungsweiten ausgedrückt.

52) Die Relationen, welche wir zwischen den Coordinaten der Einfallspunkte und den Vereinigungsweiten der allgemeinen und Hauptstrahlen gefunden haben, setzen uns in den Stand, die Gleichungen derselben auf andere Weise auszudrücken, als es früher geschehen ist.

Ich setze zu dem Ende voraus, dass bei dem allgemeinen Strahle der Ursprung der Coordinaten in dem dazu gehörigen Hauptstrahle angenommen wird, welches in allen Fällen hinreicht, da, wie wir in (k) von Nro. 39 gesehen haben, aus diesen Coordinaten und denen des Hauptstrahles sehr leicht die auf die Axe des Instrumentes bezogenen Coordinaten des allgemeinen Strahles abgeleitet werden können. Wir haben ferner am angeführten Orte bemerkt, dass unter jener Voraussetzung die Gleichungen des allgemeinen Strahles mit den Gleichungen eines Centralstrahles zusammenfallen, bei welchem die Coordinaten des Einfallspunktes X'_1 und Y'_1 dieselben sind, wie bei dem allgemeinen Strahle, so dass die Gleichungen des letzteren ohne weitere Reduction auch bei Centralstrahlen Anwendung finden. Nehmen wir daher die oben entwickelten Gleichungen der allgemeinen und Hauptstrahlen wieder vor.

Nach (c) von Nro. 39 sind die Gleichungen des allgemeinen einfallenden Strahles

$$\left.\begin{aligned} y' &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right) Y'_1 \\ x' &= -\left(\frac{z-c_1}{c_1}\right) X'_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

und nach (h) derselben Nummer die Gleichungen des allgemeinen Strahles nach der i^{ten} Brechung:

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i Y'_1 \\ x'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i X'_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Es ist aber

$$V_i g_i = V_{i+1} c_{i+1}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -\frac{(z-g)_i Y'_1}{V_{i+1} c_{i+1}} \\ x'_i &= -\frac{(z-g)_i X'_1}{V_{i+1} c_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

ferner vermöge (i) jener Nummer

$$Y'_1 = V_i Y'_i = V_{i+1} Y'_{i+1}$$
$$X'_1 = V_i X'_i = V_{i+1} X'_{i+1}$$

folglich mit Rücksicht auf diese Werthe

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -(z-g)_i \frac{Y'_i}{g_i} = -(z-g)_i \frac{Y'_{i+1}}{c_{i+1}} \\ x'_i &= -(z-g)_i \frac{X'_i}{g_i} = -(z-g)_i \frac{X'_{i+1}}{c_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (d)$$

Die Gleichungen des einfallenden Hauptstrahles sind nach (b) der allegirten Nummer

$$\left.\begin{aligned} y'' &= c_1 \varphi_1 \left[1 + \left(1 - \frac{K_1}{c_1}\right)\left(\frac{z - c_1}{c_1}\right)\right] \\ x'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (e)$$

Substituirt man hierin statt $\left(1 - \frac{K_1}{c_1}\right)$ seinen Werth aus (s) von Nro. 51, so wird

$$y'' = c_1 \varphi_1 \left(\frac{z - c''_1}{c_1 - c''_1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

Wir können jedoch die Gleichungen der Hauptstrahlen noch auf eine andere Art erhalten. Da sich nämlich diese vor der ersten Brechung sämmtlich in einem Punkte durchschneiden, welcher in der Axe des Instrumentes liegt, so ist es gestattet, sie als Centralstrahlen zu betrachten, welche von jenem Punkte ausgehen und sich ganz in der Ebene der $y\,z$ befinden. Hiernach folgt aus der ersten Formel (a), wenn man die darin enthaltenen Grössen zweimal accentuirt, um sie auf den Hauptstrahl zu beziehen,

$$y'' = -\left(\frac{z - c''_1}{c''_1}\right) Y''_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g)$$

In (f) von Nro. 39 haben wir für den Hauptstrahl nach der i^{ten} Brechung die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i} \left[1 + \left(1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (h)$$

folglich, wenn statt $\left(1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)$ sein Werth aus (r) der vorhergehenden Nummer substituirt wird,

$$y''_i = \frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i} \left(\frac{z - g''}{g - g''}\right)_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (i)$$

Behandelt man ferner den gebrochenen Hauptstrahl nach der oben gemachten Bemerkung als einen Centralstrahl, so geben die Gleichungen (b), (c) und (d)

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= -\left(\frac{z - g''}{V'' g''}\right)_i Y''_1 = -\frac{(z - g'')_i Y''_1}{V''_{i+1} c''_{i+1}} \\ &= -(z - g'')_i \frac{Y''_i}{g''_i} = -(z - g'')_i \frac{Y''_{i+1}}{c''_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (k)$$

Vergleichen wir die in Nro. 39 gefundenen Ausdrücke der Coordinaten der Einfallspunkte mit den correspondirenden Gleichungen der Strahlen, so sehen wir, dass die ersteren aus den letzteren entstehen, wenn man x und y mit X und Y verwechselt und $z = 0$ setzt. Durch diese Verwechselungen erhalten wir daher der Reihe nach aus den vorhergehenden Gleichungen der gebrochenen Strahlen:

I. Die Coordinaten des Einfallspunktes des allgemeinen Strahles auf der i^{ten} brechenden Fläche

$$\left.\begin{aligned} \acute{Y}_i &= \frac{\acute{Y}_1}{V_i} \\ \acute{X}_i &= \frac{\acute{X}_1}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

II. Die Coordinaten des Einfallspunktes des einfallenden Hauptstrahles

$$\left.\begin{aligned} \overset{\prime\prime}{Y}_1 &= K_1 \varphi_1 = -\left(\frac{c\overset{\prime\prime}{c}}{c-\overset{\prime\prime}{c}}\right)_1 \varphi_1 \\ \overset{\prime\prime}{X}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

III. Die Coordinaten des Einfallspunktes des Hauptstrahles auf der i^{ten} brechenden Fläche

$$\left.\begin{aligned} \overset{\prime\prime}{Y}_i &= \frac{K_i \varphi_1}{V_i} = -\frac{V_i g_i \overset{\prime\prime}{g}_i \varphi_1}{v_i (g-\overset{\prime\prime}{g})_i} = \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i} \\ \overset{\prime\prime}{X}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

In Nro. 47 haben wir gezeigt, dass das Bild des leuchtenden Punktes in dem correspondirenden Hauptstrahle liegt und dass ihm die Abscisse g_i zugehört. Wir können daher die Ordinate des Bildes, welche oben mit f_i bezeichnet wurde, auch aus den Gleichungen des gebrochenen Hauptstrahles erhalten, wenn wir darin statt z_i jene Abscisse substituiren. Diess giebt

$$\left. f_i = \frac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{v_i} = -\left(\frac{g-\overset{\prime\prime}{g}}{\overset{\prime\prime}{V}\overset{\prime\prime}{g}}\right)_i \overset{\prime\prime}{Y}_1 = -(g-\overset{\prime\prime}{g})_i \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{\overset{\prime\prime}{g}_i} \right\} . \ (o)$$

Die ersten der vorhergehenden Formeln in jedem Systeme sind dieselben, welche bereits in Nro. 39 und 47 gefunden wurden.

Winkel zwischen den Projectionen der Strahlen und den als Axen angenommenen Linien.

53) Wird bei dem allgemeinen Strahle der Ursprung der Coordinaten x und y in der Axe des Instrumentes angenommen, so bilden x, y und z ein gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem, und da der Strahl eine gerade Linie ist, so drücken die Coefficienten von z in den Gleichungen desselben die Tangenten der Winkel aus, welche seine Projectionen auf den coordinirten Ebenen mit der Axe des Instrumentes machen. Dasselbe gilt auch von dem Hauptstrahle, da seine Coordinaten $\overset{\prime\prime}{x}$ und $\overset{\prime\prime}{y}$ auf gleiche Weise bestimmt sind.

Verlegen wir dagegen, wie es oben geschehen ist, bei dem allgemeinen Strahle den Ursprung der Coordinaten x' und y' in den dazu gehörigen Hauptstrahl, sehen den letzteren als eine Axe an und suchen die Winkel, welche die Projectionen des allgemeinen Strahles mit dieser Axe machen, so sind dieselben nicht unmittelbar durch die Gleichungen des Strahles gegeben, da x', y' und z kein gewöhnliches rechtwinkeliges Coordinatensystem bilden, es ist jedoch leicht, sie aus jenen Gleichungen ebenfalls abzuleiten.

Zu dem Ende seyen

ω und χ die Winkel, welche die Projectionen des allgemeinen einfallenden Strahles auf den Ebenen der yz und der xz mit der Axe des Instrumentes machen,

ω_i und χ_i dieselben Winkel in Bezug auf den allgemeinen Strahl nach der i^{ten} Brechung,

ω'', χ'', ω''_i und χ''_i dieselben Winkel in Bezug auf den einfallenden und gebrochenen Hauptstrahl,

ω', χ', ω'_i und χ'_i die Winkel, welche die Projectionen des allgemeinen, einfallenden und gebrochenen Strahles mit dem als Axe angenommenen Hauptstrahle machen.

Betrachten wir nun die erste Gleichung, welche wir in (k) von Nro. 39 gefunden haben und welche der Projection des einfallenden Strahles auf der Ebene der yz zugehört, nämlich

$$y = y' + y''$$

Die Ordinaten y' und y'' haben die Form:

$$\left.\begin{aligned} y' &= a' + b'z \\ y'' &= a'' + b''z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

wodurch

$$y = a' + a'' + (b' + b'')z$$

wird.

Da das den beiden letzten Gleichungen zu Grund gelegte Coordinatensystem ein rechtwinkeliges ist, so erhalten wir aus demselben nach dem oben Gesagten

$$tg\,\omega'' = b'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

$$tg\,\omega = b' + b'' = b' + tg\,\omega'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Der Winkel ω' wird durch die Projection des allgemeinen Strahles und den Hauptstrahl gebildet, welche mit der Axe des Instrumentes die Winkel ω und ω'' einschliessen, mithin ist

$$\omega' = \omega - \omega''$$

und

$$tg\,\omega' = tg\,(\omega - \omega'') = \frac{tg\,\omega - tg\,\omega''}{1 + tg\,\omega\; tg\,\omega''}$$

Nach den angenommenen Grundsätzen werden aber die Potenzen und Producte von $tg\,\omega$ und $tg\,\omega$, welche, wie wir sogleich sehen werden, $\acute{Y}_1$ und φ_1 proportional sind, nicht beibehalten, sobald man die Abweichungen vernachlässigt, wie es hier geschieht. Die vorhergehende Gleichung reducirt sich daher auf die nachstehende:

$$tg\,\omega' = tg\,\omega - tg\,\omega''$$

woraus

$$tg\,\omega = tg\,\omega' + tg\,\omega'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

folgt. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (c) giebt ferner

$$tg\,\omega' = b' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

so dass $tg\,\omega'$ ebenso durch den Coefficienten von z in der ersten Gleichung (a) ausgedrückt wird, als wenn das dabei zu Grund gelegte Coordinatensystem ein gewöhnliches rechtwinkeliges wäre.

Aehnliche Resultate geben die übrigen Gleichungen (k) von Nro. 39, da sie sowohl, als die ihnen entsprechenden Gleichungen der Strahlen, einerlei Gestalt haben. Wir erhalten daher aus (d) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega &= tg\,\omega' + tg\,\omega'' \\ tg\,\chi &= tg\,\chi' + tg\,\chi'' \\ tg\,\omega_i &= tg\,\omega_i' + tg\,\omega_i'' \\ tg\,\chi_i &= tg\,\chi_i' + tg\,\chi_i'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

wonach bei den Tangenten der Winkel dieselben Relationen wie bei den Coordinaten stattfinden, in so fern man die Abweichungen vernachlässigt.

Die Tangenten der einfach und doppelt accentuirten Winkel folgen vermöge (b) und (e) der Reihe nach aus den in der vorhergehenden Nummer enthaltenen Gleichungen der Strahlen, wenn man dafür jedesmal den Coefficienten von z oder z_i in diesen Gleichungen nimmt. Hierdurch wird:

I. Für den allgemeinen einfallenden Strahl, wenn der Hauptstrahl als Axe angenommen wird,

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega' &= -\frac{\acute{Y}_1}{c_1} \\ tg\,\chi' &= -\frac{\acute{X}_1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

II. Ebenso für den allgemeinen Strahl nach der i^{ten} Brechung

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega_i' &= -\frac{\acute{Y}_1}{V_i\,g_i} = -\frac{\acute{Y}_1}{V_{i+1}\,c_{i+1}} \\ &= -\frac{\acute{Y}_i}{g_i} = -\frac{\acute{Y}_{i+1}}{c_{i+1}} \\ tg\,\chi_i' &= -\frac{\acute{X}_1}{V_i\,g_i} = -\frac{\acute{X}_1}{V_{i+1}\,c_{i+1}} \\ &= -\frac{\acute{X}_i}{g_i} = -\frac{\acute{Y}_{i+1}}{c_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

III. Für den einfallenden Hauptstrahl

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega'' &= \left(1 - \frac{K_1}{c_1}\right)\varphi_1 = \left(\frac{c}{c - c''}\right)_1 \varphi_1 = -\frac{Y_1''}{c_1''} \\ tg\,\chi'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

IV. Für den Hauptstrahl nach der i^{ten} Brechung

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega_i'' &= \frac{V_i}{v_i}\left(1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)\varphi_1 = \frac{V_i}{v_i}\left(\frac{g}{g - g''}\right)_i \varphi_1 \\ &= -\frac{Y_1''}{V_i'' g_i''} = -\frac{Y_1''}{V_i'' c_{i+1}''} \\ &= -\frac{Y_i''}{g_i''} = -\frac{Y_{i+1}''}{c_{i+1}''} \\ tg\,\chi_i'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(k)}$$

Vermöge (b) von Nro. 48 und (m) und (n) der vorhergehenden Nummer ist

$$\frac{V_i \varphi_1}{v_i} = \Phi_i$$

$$K_1 \varphi_1 = Y_1'' \quad \ldots \ldots$$

$$\frac{K_i \varphi_1}{V_i} = Y_i''$$

Durch Substitution dieser Werthe nehmen die ersten der vorhergehenden Ausdrücke von $tg\,\omega''$ und $tg\,\omega_i''$ die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega'' &= \varphi_1 - \frac{Y_1''}{c_1} \\ tg\,\omega_i'' &= \Phi_i - \frac{Y_i''}{g_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

Substituirt man nun in (f) statt jeder Tangente der einfach und doppelt accentuirten Winkel einen der vorhergehenden Werthe, so erhält man dadurch die Tangenten der entsprechenden Winkel in Bezug auf den allgemeinen Strahl und die Axe des Instrumentes.

Die Linien, welche zur Bestimmung von φ_1 und Φ_i durch den Scheitel der ersten brechenden Fläche und den leuchtenden Punkt, sodann durch den Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche und das Bild jenes Punktes gezogen wurden, können wie zwei Strahlen angesehen werden, deren Einfallspunkte in der Axe des Instrumentes liegen, für welche daher Y_1', Y_1'', Y_i' und $Y_i'' = 0$ sind.

Mit Berücksichtigung dieser Werthe verwandeln sich vermöge (g), (h) und (l) die in (f) gefundenen Werthe von $tg\,\omega$ und $tg\,\omega_i$ in φ_1 und Φ_i, wie gehörig.

Gleichungen und Winkel der Strahlen, durch die Winkel der einfallenden Strahlen ausgedrückt.

54) Die in der vorhergehenden Nummer gefundenen Werthe von $tg\,\omega'$, $tg\,\chi'$ und $tg\,\omega''$ können dazu benutzt werden, um die Formeln, welche wir in den beiden letzten Nummern erhalten haben, durch die den einfallenden Strahlen zugehörigen Winkel auszudrücken. Substituiren wir nämlich in (a), (b), (l) von Nro. 52 und (h) von Nro. 53 statt Y'_1 und X'_1 ihre Werthe aus (g) der letzteren Nummer, so werden:

I. Für den allgemeinen einfallenden Strahl

$$\left.\begin{aligned} y' &= (z - c_1)\, tg\,\omega' \\ x' &= (z - c_1)\, tg\,\chi' \\ Y'_1 &= -c_1\, tg\,\omega' \\ X'_1 &= -c_1\, tg\,\chi' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

II. Für den allgemeinen Strahl, nach der i^{ten} Brechung

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= \frac{c_1}{V_i\, g_i}\,(z - g)_i\, tg\,\omega' \\ x'_i &= \frac{c_1}{V_i\, g_i}\,(z - g)_i\, tg\,\chi' \\ Y'_i &= -\frac{c_1\, tg\,\omega'}{V_i} \\ X'_i &= -\frac{c_1\, tg\,\chi'}{V_i} \\ tg\,\omega'_i &= \frac{c_1\, tg\,\omega'}{V_i\, g_i} \\ tg\,\chi'_i &= \frac{c_1\, tg\,\chi'}{V_i\, g_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Ferner ist vermöge (i) von Nro. 53

$$\phi_1 = \frac{tg\,\omega''}{1 - \frac{K_1}{c_1}} = \left(\frac{c - c''}{c}\right)_1 tg\,\omega''$$

$$Y''_1 = -c''_1\, tg\,\omega''$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus (e), (g), (h), (k), (m), (n), (o) von Nro. 52 und (k) von Nro. 53:

III. Für den einfallenden Hauptstrahl

$$\left.\begin{aligned} y'' &= \left[\frac{c_1}{1 - \frac{K_1}{c_1}} + (z - c_1)\right] tg\,\omega'' = (z - c''_1)\, tg\,\omega'' \\ Y''_1 &= \frac{K_1\, tg\,\omega''}{1 - \frac{K_1}{c_1}} = -c''_1\, tg\,\omega'' \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

IV. Für den Hauptstrahl nach der i^{ten} Brechung

$$\left.\begin{aligned}
\overset{''}{y}_i &= \frac{V_i g_i \, tg \overset{''}{\omega}}{v_i\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)}\left[1+\left(1-\frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] \\
&= \frac{\overset{''}{c}_1 (z-\overset{''}{g})_i \, tg \overset{''}{\omega}}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i} \\
\overset{''}{Y}_i &= \frac{K_i \, tg \overset{''}{\omega}}{V_i\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)} = \frac{K_i}{V_i}\left(\frac{c-\overset{''}{c}}{c}\right)_1 tg \overset{''}{\omega} = -\frac{\overset{''}{c}_1 \, tg \overset{''}{\omega}}{\overset{''}{V}_i} \\
f_i &= \frac{V_i g_i \, tg \overset{''}{\omega}}{v_i\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)} = \frac{V_i g_i}{v_i}\left(\frac{c-\overset{''}{c}}{c}\right)_1 tg \overset{''}{\omega} = \frac{\overset{''}{c}_1 (g-\overset{''}{g})_i \, tg \overset{''}{\omega}}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i} \\
tg \overset{''}{\omega}_i &= \frac{V_i \, tg \overset{''}{\omega}}{v_i\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)}\left[1-\frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right] = \frac{\overset{''}{c}_1 \, tg \overset{''}{\omega}}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Die vorhergehenden Formeln enthalten mehrere Relationen zwischen den Grössen, welche sich auf den allgemeinen Strahl und den Hauptstrahl beziehen. Die Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke von $\overset{''}{Y}_i$ und f_i giebt nämlich die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
K_i &= -\frac{V_i}{\overset{''}{V}_i}\left(\frac{c\overset{''}{c}}{c-\overset{''}{c}}\right)_1 \\
\frac{V_i}{v_i}\left(\frac{c-\overset{''}{c}}{c\overset{''}{c}}\right)_1 &= \frac{1}{\overset{''}{V}_i}\left(\frac{g-\overset{''}{g}}{g\overset{''}{g}}\right)_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

Sodann folgt aus den beiden Ausdrücken von $tg \overset{''}{\omega}_i$

$$\frac{\overset{''}{c}_1}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i} = \frac{V_i}{v_i\left(1-\frac{K_1}{c_1}\right)}\left[1-\frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \text{(f)}$$

Endlich erhalten wir vermittelst der letzten Werthe von f_i und $tg \overset{''}{\omega}_i$:

$$f_i = (g-\overset{''}{g})_i \, tg \overset{''}{\omega}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

Die erste Gleichung (e) kann dazu benutzt werden, die sämmtlichen K zu berechnen, wenn eines derselben bekannt ist und die Vereinigungsweiten des allgemeinen und Hauptstrahles vermittelst der angegebenen Methoden gefunden worden sind. Da nämlich

$$V_i = \frac{V_{i-1}\, g_{i-1}}{c_i}$$

$$\overset{''}{V}_i = \frac{\overset{''}{V}_{i-1}\, \overset{''}{g}_{i-1}}{\overset{''}{c}_i}$$

ist, so entstehen aus jener Gleichung die beiden folgenden:

$$K_i = -\frac{V_{i-1}}{\acute{V}_{i-1}}\left(\frac{c\,c''}{c-c''}\right)_1 \frac{g_{i-1}\,c''_i}{c_i\,g''_{i-1}}$$

$$K_{i-1} = -\frac{V_{i-1}}{V''_{i-1}}\left(\frac{c\,c''}{c-c''}\right)_1$$

und hieraus durch Division

$$\left.\begin{aligned} K_i &= \frac{g_{i-1}\,c''_i}{c_i\,g'_{i-1}}\,K_{i-1} \\ K_{i-1} &= \frac{c_i\,g''_{i-1}}{g'_{i-1}\,c_i}\,K_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

Ist daher ein K gegeben, so dient die erste dieser Formeln zur Berechnung der folgenden, die zweite dagegen zur Berechnung der vorhergehenden K. Dieser Fall tritt immer ein, wenn die Stellung der Hauptblendung bekannt ist, indem alsdann vermöge (d) und (f) von Nro. 22 entweder K_j oder K_{j+1} durch eine der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} K_j &= \frac{V_j^2}{v_j}\left(\frac{g\zeta}{g+\zeta}\right)_j \\ K_{j+1} &= -\frac{V_{j+1}^2}{v_j}\left(\frac{c\zeta'}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

bestimmt ist, je nachdem die Stellung der Blendung auf die j^te^ oder (j + 1)^te^ Fläche bezogen wird.

Ist die Hauptblendung an der j^ten^ Fläche selbst angebracht, so ist ζ_j, und mithin auch $K_j = 0$. Da alsdann der Hauptstrahl durch den Scheitel der j^ten^ Fläche geht, so ist zugleich $c''_j = g''_j = 0$. Hierdurch werden die beiden Formeln (h), wenn in der ersten $i = j + 1$, in der zweiten dagegen $i = j$ gesetzt wird, unbestimmt, daher K_{j+1} und K_{j-1} in diesem Falle auf andere Weise berechnet werden müssen. Hierzu erhält man aus (g) von Nro. 4

$$K_i - K_{i-1} = -\frac{V_{i-1}\,V_i\,d_{i-1}}{v_{i-1}}$$

folglich, wenn man darin einmal $i = j + 1$ und dann $i = j$ und $K_j = 0$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} K_{j+1} &= -\frac{V_j\,V_{j+1}\,d_j}{v_j} \\ K_{j-1} &= \frac{V_{j-1}\,V_j\,d_{j-1}}{v_{j-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

worauf die übrigen K vermittelst (h) berechnet werden können.

Gleichungen und Winkel der Strahlen, durch die mit Parenthesen bezeichneten Grössen ausgedrückt.

55) Die in Nro. 39, 52, 53 und 54 gefundenen Gleichungen enthalten in Bezug auf den allgemeinen Strahl die Factoren $\frac{1}{V_i}$ und $\frac{1}{V_i g_i}$, welche vermittelst der Formeln (d) von Nro. 46 durch die mit

Parenthesen bezeichneten Grössen ausgedrückt werden können. Ausserdem kommt in jenen Gleichungen noch das Product $V_j g_j = V_{j+1} c_{j+1}$ vor, dessen Werth aus den allegirten Formeln durch Verwechselung von i mit j folgt.

Drückt man ferner die Gleichungen des Hauptstrahles durch seine Vereinigungsweiten aus, so sind die von V'' abhängenden Factoren derselben: $\frac{1}{V''_i}$, $\frac{1}{V''_i g''_i}$, $\frac{c''_1}{V''_i}$ und $\frac{c''_1}{V''_i g''_i}$, welche in (h) und (i) von Nro. 52 ebenfalls durch die mit Parenthesen angedeuteten Grössen gegeben sind. Es ist daher nur nöthig, alle diese Werthe in den erwähnten Gleichungen zu substituiren, um sie in jenen Grössen auszudrücken.

Nehmen wir bei dem allgemeinen Strahle c_1 als bekannt an und gebrauchen die eingeführte abgekürzte Bezeichnung, wonach

$$\left.\begin{aligned}(2i-1,1') &= (2i-1,2)\,c_1 + (2i-1,3)\\ (2i,1') &= (2i,2)\,c_1 + (2i,3)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad\text{(a)}$$

ist, so folgt aus (d) von Nro. 46

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{V_i} &= \frac{(2i-1,1')}{v_{i-1}\,c_1}\\ \frac{1}{V_i g_i} &= \frac{(2i,1')}{v_i\,c_1}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad\text{(b)}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir aus (b) und (l) von Nro. 52, (h) von Nro. 53 und (b) von Nro. 54:

$$\left.\begin{aligned}y'_i &= -\frac{(2i,1')}{v_i\,c_1}(z-g)_i\,Y'_1 = \frac{(2i,1')}{v_i}(z-g)_i\,tg\,\omega'\\ Y'_i &= \frac{(2i-1,1')}{v_{i-1}\,c_1}\,Y'_1 = -\frac{(2i-1,1')}{v_{i-1}}\,tg\,\omega'\\ tg\,\omega'_i &= -\frac{(2i,1')}{v_i\,c_1}\,Y'_1 = \frac{(2i,1')}{v_i}\,tg\,\omega'\end{aligned}\right\}\ .\ \text{(c)}$$

Ferner ist

$$\frac{(2i,1')\,Y'_1}{c_1} = (2i,2)\,Y'_1 + \frac{(2i,3)\,Y'_1}{c_1}$$

und vermöge (a) von Nro. 54

$$\frac{Y'_1}{c_1} = -\,tg\,\omega'$$

folglich

$$\frac{(2i,1')\,Y'_1}{c_1} = (2i,2)\,Y'_1 - (2i,3)\,tg\,\omega'$$

und ebenso in Bezug auf $\frac{(2i-1,1')\,Y'_1}{c_1}$.

Hierdurch können die ersten Ausdrücke (c) unter die Gestalt gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -\frac{(z-g)_i}{v_i}\left[(2i,\,2)\,Y'_1 - (2i,\,3)\,tg\,\omega'\right] \\ Y'_i &= \frac{1}{v_{i-1}}\left[(2i-1,\,2)\,Y'_1 - (2i-1,\,3)\,tg\,\omega'\right] \\ tg\,\omega'_i &= -\frac{1}{v_i}\left[(2i,\,2)\,Y'_1 - (2i,\,3)\,tg\,\omega'\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (d)$$

In Nro. 22 haben wir Y'_1 durch die Ordinate v_j ausgedrückt, welche dem Durchschnitte des Strahles mit der Ebene der Hauptblendung zugehört und hierzu in (d) und (f) die Formeln gefunden:

$$Y'_1 = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j$$

Vermöge (b) ist aber

$$V_j\,g_j = V_{j+1}\,c_{j+1} = \frac{v_j\,c_1}{(2j,\,1')}$$

mithin

$$Y'_1 = \frac{v_i\,c_1\,v_j}{(2j,\,1')\,(g+\zeta)_j} = \frac{v_j\,c_1\,v_j}{(2j,\,1')\,(c-\zeta')_{j+1}} \quad . \; . \; . \; (e)$$

wodurch Y'_1 aus den vorhergehenden Ausdrücken eliminirt werden kann.

Will man auch statt g_i, g_j und c_{j+1} ihre Werthe aus (a) von Nro. 46 substituiren, so wird

$$g_i = \frac{(2i-1,\,1')\,n_i}{(2i,\,1')}$$

$$g_j = \frac{(2j-1,\,1')\,n_j}{(2j,\,1')}$$

$$c_{i+1} = \frac{(2j+1,\,1')}{(2j,\,1')}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} (2i,\,1')\,(z-g)_i &= (2i,\,1')\,z_i - (2i-1,\,1')\,n_i \\ (2j,\,1')\,(g+\zeta)_j &= (2j-1,\,1')\,n_j + (2j.\,1')\,\zeta_j \\ (2j,\,1')\,(c-\zeta')_{j+1} &= (2j+1,\,1') - (2j,\,1')\,\zeta'_{j+1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (f)$$

Da die Gleichungen der allgemeinen Strahlen symmetrisch in Bezug auf die Axen der y' und x' sind, so folgen die Formeln, welche der letzteren Axe zugehören, unmittelbar aus den für die erstere Axe gefundenen durch blosse Verwechselung von y'_i, Y'_i, $tg\,\omega'_i$, Y'_1, v_j und $tg\,\omega'$ mit x'_i, X'_i, $tg\,\chi'_i$, X'_1, ξ_j und $tg\,\chi'$.

Ferner verwandeln sich die von den Winkeln unabhängigen Ausdrücke in diejenigen, welche sich auf r'_i und R'_i beziehen, wenn in den ersteren y'_i, Y'_i, Y'_1 und v_j mit r'_i, R'_i, R'_1 und ϱ_j verwechselt werden. Die vorhergehenden Formeln reichen daher zu beiden Zwecken hin.

Für den Hauptstrahl haben wir in (k) und (n) von Nro. 52 und (k) von Nro. 53 die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y}_i &= -\frac{1}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i}(z-\overset{''}{g})_i \overset{''}{Y}_1 \\ \overset{''}{Y}_i &= \frac{\overset{''}{Y}_1}{\overset{''}{V}_i} \\ tg\,\overset{''}{\omega}_i &= -\frac{\overset{''}{Y}_1}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Substituiren wir hierin statt $\frac{1}{\overset{''}{V}_i \overset{''}{g}_i}$ und $\frac{1}{\overset{''}{V}_i}$ ihre Werthe aus (h) von Nro. 51, so folgt daraus für alle Werthe des Index von $i = 1$ bis zu $i = j$:

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y}_i &= -\frac{n_1\,(2i+2,\,2j+1')'}{\nu_i\,(3,\,2j+1')'}(z-\overset{''}{g})_i \overset{''}{Y}_1 \\ \overset{''}{Y}_i &= \frac{n_1\,(2i+1,\,2j+1')'}{\nu_i\,(3,\,2j+1')'}\overset{''}{Y}_1 \\ tg\,\overset{''}{\omega}_i &= -\frac{n_1\,(2i+2,\,2j+1')'}{\nu_i\,(3,\,2j+1')'}\overset{''}{Y}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (h)$$

Von $i = j+1$ bis zu seinem grössten Werthe dagegen wird vermöge (i) jener Nummer

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y}_i &= -\frac{n_1\,(2i,\,2j+1')}{\nu_i\,(3,\,2j+1')'}(z-\overset{''}{g})_i \overset{''}{Y}_1 \\ \overset{''}{Y}_i &= \frac{n_1\,(2i-1,\,2j+1')}{\nu_{i-1}\,(3,\,2j+1')'}\overset{''}{Y}_1 \\ tg\,\overset{''}{\omega}_i &= -\frac{n_1\,(2i,\,2j+1')}{\nu_i\,(3,\,2j+1')'}\overset{''}{Y}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (i)$$

Soll auch $\overset{''}{g}_i$ aus diesen Formeln eliminirt werden, so erhält man aus (f) von 44, von $i = 1$, bis zu $i = j$:

$$\overset{''}{g}_i = \frac{(2i+1,\,2j+1')'}{(2i+2,\,2j+1')'}$$

daher

$$\left.\begin{aligned} &(2i+2,\,2j+1')'\,(z-\overset{''}{g})_i = \\ &= (2i+2,\,2j+1')'\,z_i - (2i+1,\,2j+1')' \end{aligned}\right\} \quad . \quad (k)$$

Ferner folgt aus (e) von Nro. 41, von $i = j+1$ bis zu seinem grössten Werthe:

$$\overset{''}{g}_i = \frac{(2i-1,\,2j+1')\,n_i}{(2i,\,2j+1')}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} &(2i,\,2j+1')\,(z-\overset{''}{g})_i = \\ &= (2i,\,2j+1')\,z_i - (2i-1,\,2j+1')\,n_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad (l)$$

welche Werthe in den ersten Formeln (h) und (i) substituirt werden können.

Um $tg\,\overset{''}{\omega}$ statt $\overset{''}{Y}_1$ einzuführen, müssen wir bemerken, dass vermöge (c) von Nro. 54

$$\overset{''}{Y}_1 = -c_1\,tg\,\overset{''}{\omega}$$

ist. Durch Substitution dieses Werthes in (g) verwandeln sich

$$\overset{\prime\prime}{Y}_1,\ \frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i\,\overset{\prime\prime}{g}_i}\ \text{und}\ \frac{1}{\overset{\prime\prime}{V}_i}\ \text{in}\ -tg\overset{\prime\prime}{\omega},\ \frac{c_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i\,\overset{\prime\prime}{g}_i}\ \text{und}\ \frac{c_1}{\overset{\prime\prime}{V}_i}$$

Aus (h) und (i) von Nro. 51 ist aber ersichtlich, dass durch die beiden letzten Veränderungen $(3,\ 2j+1')'$ in $(2,\ 2j+1')'\ n_1$ übergeht. Es reicht daher hin, in (h) und (i) $\overset{\prime}{Y}_1$ und $(3,\ 2j+1')'$ mit $-tg\overset{\prime\prime}{\omega}$ und $(2,\ 2j+1')'\ n_1$ zu verwechseln, um jene Formeln durch $tg\overset{\prime\prime}{\omega}$ auszudrücken.

Entfernung des Bildes von dem Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen.

56) Da g_i die Entfernung des nach der i^{ten} Brechung entstehenden Bildes von der i^{ten} Fläche, $\overset{\prime\prime}{g}_i$ dagegen die Entfernung des Vereinigungspunktes der Hauptstrahlen von derselben Fläche bezeichnet, so drückt $(g-\overset{\prime\prime}{g})_i$ die Entfernung des Bildes von dem Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen aus, welche als positiv angenommen ist, wenn sich das erstere *vor* dem letzteren befindet. Sind daher g_i und $\overset{\prime\prime}{g}_i$ nach den oben entwickelten Methoden berechnet worden, so ist dadurch $(g-\overset{\prime\prime}{g})_i$ unmittelbar gegeben. Es kann jedoch noch auf andere Weise ausgedrückt werden.

Zuerst folgt aus (o) von Nro. 51

$$(g-\overset{\prime\prime}{g})_i = (c-\overset{\prime\prime}{c})_{i+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

sodann aus (r) derselben Nummer

$$\frac{1}{(g-\overset{\prime\prime}{g})_i} = \frac{1}{g_i}\left(1-\frac{\nu_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

wodurch $(g-\overset{\prime\prime}{g})_i$ gefunden werden kann, wenn die Grössen, welche sich auf den allgemeinen Strahl beziehen, berechnet worden sind.

Endlich giebt der zweite in (k) von Nro. 53 erhaltene Werth von $tg\overset{\prime\prime}{\omega}_i$

$$(g-\overset{\prime\prime}{g})_i = \frac{V_i\,g_i\,\varphi_i}{\nu_i\,tg\overset{\prime\prime}{\omega}_i} = \frac{g_i\,\Phi_i}{tg\overset{\prime}{\omega}_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Lage der gebrochenen Strahlen.

57) Die in dem Vorhergehenden gegebenen Gleichungen bestimmen die Lage der Strahlen nach der i^{ten} Brechung, wenn man ihre Abweichungen vernachlässigt.

Untersuchen wir diese Lage etwas genauer, und betrachten wir zuerst diejenigen Strahlen, welche von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehen.

Werden die Coordinaten von dem dazu gehörigen Hauptstrahle an gezählt und die Gleichungen der Strahlen durch die Coordinaten

ihres Durchschnittspunktes mit der Hauptblendung ausgedrückt, so sind diese Gleichungen nach (l) von Nro. 39

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j v_j = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} v_j \\ x'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \xi_j = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \xi_j \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Alle hierin enthaltene Lichtstrahlen, welche von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehen, schneiden die Ebene der Hauptblendung in verschiedenen Punkten, für welche die Coordinaten v_j und ξ_j verschiedene Werthe erhalten. Denken wir uns nun diese Strahlen nach der i^{ten} Brechung sämmtlich durch eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene geschnitten, deren Entfernung von der i^{ten} brechenden Fläche z_i ist, so drücken y'_i und x'_i die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Strahlen mit jener Ebene aus, welche den Coordinaten v_j und ξ_j in der Ebene der Hauptblendung entsprechen. Da aber bei unveränderter Lage der schneidenden Ebene $\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j$ oder $\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1}$ eine unveränderliche Grösse ist, so folgt daraus, dass die den verschiedenen Strahlen zugehörigen Coordinaten y'_i und x'_i sich ebenso gegeneinander verhalten, wie die correspondirenden Coordinaten v_j und ξ_j. Die Figur, welche durch die ersteren auf der schneidenden Ebene gebildet wird, ist daher derjenigen ähnlich, welche die letzteren in der Ebene der Hauptblendung hervorbringen, und in beiden haben die Durchschnittspunkte des Hauptstrahles eine ähnliche Lage, weil ihre Coordinaten $= 0$ sind. In Nro. 47 wurde gefunden, dass sich alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, nach der i^{ten} Brechung in demjenigen Punkte des Hauptstrahles schneiden, dessen Abscisse $= g_i$ ist; sie bilden folglich einen Kegel, dessen Basis der Hauptblendung ähnlich ist, und in welcher der Durchschnittspunkt des Hauptstrahles eine ähnliche Lage hat, wie in der letztern. Dasselbe findet nach allen Brechungen statt, welche an den verschiedenen brechenden Flächen erfolgen. Es entsteht daher eine Reihe von Kegeln mit ähnlichen Grundflächen, in denen allen die Durchschnittspunkte des Hauptstrahles eine ähnliche Lage haben.

Gewöhnlich giebt man der Hauptblendung die Gestalt eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Axe des Instrumentes liegt; *in diesem Falle bilden daher die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nach den verschiedenen Brechungen Kegel mit kreisförmigen Basen, deren Axen mit dem correspondirenden Hauptstrahle zusammen fallen, und in deren Scheiteln die nach jenen Brechungen entstehenden Bilder liegen.*

Jedem leuchtenden Punkte des Gegenstandes gehört ein solches System von Strahlenkegeln zu. Da nun die in (a) gegebenen Werthe von y'_i und x'_i die Grösse φ_1 nicht enthalten, durch welche die

einzelnen Punkte des Gegenstandes von einander unterschieden werden, so folgt, *dass die zu sämmtlichen Punkten des Gegenstandes gehörigen Strahlenkegel gleiche Querschnitte haben, wenn sie von einer und derselben auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene durchschnitten werden, und dass sie sich nur durch die Lage ihrer Axen, d. h. ihrer Hauptstrahlen, von einander unterscheiden.*

Diese Resultate geben den Grund an, warum wir der Benennung *Hauptstrahl* die in Nro. 34 gegebene Bedeutung beigelegt, und jenen Strahl als eine Axe angenommen haben, auf welche die Lage der dazu gehörigen Strahlen bezogen wird. In mehreren der früheren Schriften verstand man unter Hauptstrahl denjenigen Strahl, welcher durch die Mitte der ersten brechenden Fläche oder des ersten Glases geht, wenn man seine Dicke vernachlässigt. Hiernach würde aber der Hauptstrahl nur dann mit der Axe der Strahlenkegel zusammenfallen, wenn die Hauptblendung an der ersten brechenden Fläche angebracht, mithin $K_1 = 0$ wäre, was jedoch wegen der verschiedenen Stellungen, welche die Hauptblendung erhalten kann, nur ein specieller Fall ist.

Soll daher der Hauptstrahl allgemein dazu dienen, die Lage der Strahlenkegel nach den verschiedenen Brechungen zu bestimmen, so ist es nothwendig, ihn so zu definiren, wie es oben geschehen ist, dass nämlich sein Durchschnittspunkt mit der Ebene der Hauptblendung in der Axe des Instrumentes liegt.

Die erste Gleichung (p) von Nro. 39 dient dazu, den Halbmesser der Querschnitte zu berechnen, welche entstehen, wenn die nach der i^{ten} Brechung gebildeten Strahlenkegel durch eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene durchschnitten werden, deren Entfernung von der i^{ten} brechenden Fläche z_i ist. Versteht man nämlich unter ϱ_j den Halbmesser der Hauptblendung, so bezieht sich r'_i auf einen Punkt in der Oberfläche von einem jener Kegel und ist daher der Halbmesser der erwähnten Querschnitte. Ebenso gehören alsdann R'_1 und R'_i Punkten zu, welche in den Oberflächen der betreffenden Kegel liegen.

Hiernach ist *der Halbmesser der Querschnitte der nach der i^{ten} Brechung entstehenden Strahlenkegel, in der Entfernung z_i von der i^{ten} brechenden Fläche* =

$$\left.\begin{aligned} r'_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i R'_1 = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \\ &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Die zweite Gleichung (p) von Nro. 39 bestimmt den Durchschnitt von einer der Kegelflächen mit der i^{ten} brechenden Fläche. Für einen beliebigen Punkt jenes Durchschnittes ist nämlich

$$R'_i = \frac{R'_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \Big\} \quad . \quad (c)$$

Dieser Werth ist für alle Punkte des Durchschnittes einerlei, woraus folgt, dass derselbe mit Vernachlässigung der Abweichungen ein Kreis vom Halbmesser $\acute{R}_i$ ist.

Setzt man in (b)

$$z_i = 0$$

so wird

$$\acute{r}_i = \acute{R}_i$$

Jener Durchschnitt kann daher mit einem Querschnitte des Strahlenkegels verwechselt werden, welcher durch den Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche gelegt ist.

Die Scheitel aller Strahlenkegel, welche nach der i^{ten} Brechung entstehen, liegen nach Nro. 47 in einer Ebene, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und sich in der Entfernung g_i vor der i^{ten} brechenden Fläche befindet.

Untersuchen wir jetzt auf ähnliche Weise die Lage der Hauptstrahlen, welche die Axen der so eben bestimmten Strahlenkegel bilden.

Werden die Hauptstrahlen, ebenso wie es bei den übrigen Strahlen angenommen wurde, nach der i^{ten} Brechung durch eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene durchschnitten, deren Entfernung von der i^{ten} brechenden Fläche z_i ist, so geben die Gleichungen (h) und (i) von Nro. 52 die Ordinate des Durchschnittes von einem derselben mit jener Ebene, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{v_i}\left[1 + \left(1 - \frac{v_i\, K_i}{V_i^2\, g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] = \\ &= \frac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{v_i}\left(\frac{z-g''}{g-g'}\right)_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(d)}$$

Diese Ordinate ist folglich der Grösse φ_1 proportional und wird am grössten, wenn φ_1 denjenigen Werth erhält, welcher dem äussersten Punkte des Gegenstandes entspricht.

Nehmen wir ferner an, dass der Theil des Gegenstandes, welcher durch das Instrument übersehen werden kann, von einem mit dem Halbmesser $b_1 = c_1\, \varphi_1$ beschriebenen Kreise begrenzt wird, wobei unter φ_1 der angegebene grösste Werth zu verstehen ist; denken wir uns sodann, wie in Nro. 34, die Ebene der yz um die Axe des Instrumentes gedreht, bis sie in ihre anfängliche Lage zurückkommt, so ist der grösste Werth von y''_i in allen Lagen jener Ebene einerlei, d. h. die Durchschnitte der Hauptstrahlen mit der schneidenden Ebene liegen alle innerhalb eines Kreises, dessen Halbmesser y''_i ist, und dessen Mittelpunkt sich in der Axe des Instrumentes befindet.

Nach Nro. 51 durchschneiden sich aber alle Hauptstrahlen in demjenigen Punkte der Axe, dessen Abscisse g''_i ist. Hieraus folgt also, dass *alle Hauptstrahlen nach der i^{ten} Brechung in einem senkrechten Kegel liegen, dessen Axe mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt.*

Der Halbmesser dieses Kegels in der Entfernung z_i von der i^{ten} brechenden Fläche ist y''_i und wird durch die Gleichung (d) erhalten, wenn man der Grösse φ_1 den Werth beilegt, welcher den äussersten Punkten des Gegenstandes entspricht.

Der Scheitel des Kegels liegt in demjenigen Punkte der Axe, deren Entfernung von der i^{ten} brechenden Fläche g''_i ist.

Den Durchschnitt der Kegeloberfläche mit der i^{ten} brechenden Fläche bestimmt die Gleichung (n) von Nro. 52. Sein Halbmesser ist hiernach

$$Y''_i = \frac{K_i \varphi_1}{V_i} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(e)}$$

vorausgesetzt, dass statt φ_1 der angegebene grösste Werth genommen wird.

Denselben Werth würden wir, wie am angeführten Orte bereits bemerkt wurde, erhalten haben, wenn wir in (d) $z_i = 0$ gesetzt hätten; wir können daher auch diesen Durchschnitt mit einem Querschnitte des Kegels verwechseln, welcher durch den Scheitel der i^{ten} brechenden Fläche gelegt ist.

Hierbei muss übrigens bemerkt werden, dass die Halbmesser der Kegelflächen r'_i, R'_i, y''_i, Y''_i in den einzelnen Fällen verschiedene Zeichen erhalten können. Sollen sie daher jederzeit als positiv angenommen werden, so muss man nöthigenfalls das Zeichen, welches die Formeln geben, in das entgegengesetzte verwandeln.

Es bleibt nun noch übrig, denjenigen Raum zu bestimmen, in welchem alle durch die Hauptblendung gehende Strahlen nach der i^{ten} Brechung liegen. Dieser Raum wird von einer Fläche begrenzt, die sämmtliche bisher betrachtete Strahlenkegel umhüllt. Es ist leicht, die Gestalt dieser Hülle zu bestimmen. Da nämlich alle Hauptstrahlen innerhalb eines senkrechten Kegels liegen, dessen Halbmesser in der Entfernung z_i von der i^{ten} brechenden Fläche $= y''_i$ ist; da ferner jeder Hauptstrahl die Axe eines Strahlenkegels bildet, welcher in derselben Entfernung r'_i zum Halbmesser hat, so ist klar, dass der Querschnitt der Hülle nur ein Kreis seyn kann, dessen Halbmesser der Summe der beiden, positiv angenommenen, Halbmesser y''_i und r'_i gleich ist.

Behielten y''_i und r'_i für alle Werthe von z_i einerlei Zeichen, so würde die Hülle eine senkrechte Kegelfläche seyn. r'_i verschwindet aber, wenn $z_i = g'_i$ wird, und ändert daher an dieser Stelle sein Zeichen. Ebenso verschwindet y''_i für $z_i = g''_i$, und erhält folglich daselbst gleichfalls das entgegengesetzte Zeichen. Da nun diese beiden Halbmesser stets positiv genommen werden müssen, um den Halbmesser der Hülle zu berechnen, so folgt hieraus, dass dieselbe aus drei Theilen von senkrechten Kegelflächen mit kreisförmigen Basen zusammengesetzt ist, welche in denjenigen Querschnitten zusammenstossen, denen die Abscissen g'_i und g''_i zugehören. Haben z. B. r'_i und y''_i die in den Formeln (b) und (d) angegebenen Zeichen,

wenn z_i grösser als g_i ist, und wird zugleich g_i grösser als $\overset{\prime\prime}{g}_i$ angenommen, so erstreckt sich die erste Kegelfläche, woraus die Hülle zusammengesetzt ist, von $z_i = g_i$ bis zu $z_i = \infty$. In dem durch beide Werthe bestimmten Raume ist $\overset{\prime}{r}_i$ negativ, $\overset{\prime\prime}{y}_i$ positiv, mithin der Halbmesser der Hülle $= (-\overset{\prime}{r}_i + \overset{\prime\prime}{y}_i)$. Die zweite Kegelfläche, welche einen Theil der Hülle ausmacht, liegt zwischen den Abscissen g_i und $\overset{\prime\prime}{g}_i$, woselbst $\overset{\prime}{r}_i$ und $\overset{\prime\prime}{y}_i$ zugleich positiv sind. Ihr Halbmesser ist daher $= (+\overset{\prime}{r}_i + \overset{\prime\prime}{y}_i)$. Die dritte Kegelfläche endlich erstreckt sich von $z_i = \overset{\prime\prime}{g}_i$ bis zu $z_i = -\infty$. Hier ist $\overset{\prime}{r}_i$ positiv, $\overset{\prime\prime}{y}_i$ negativ, folglich der Halbmesser der Hülle $= (+\overset{\prime}{r}_i - \overset{\prime\prime}{y}_i)$.

Bei den Anwendungen reicht es gewöhnlich hin, den Halbmesser zu kennen, welchen die Hülle an einer bestimmten Stelle hat. In diesem Falle ist es unnöthig, die drei Theile derselben von einander zu unterscheiden, es genügt vielmehr, wenn man die Zeichen von $\overset{\prime}{r}_i$ und $\overset{\prime\prime}{y}_i$ nöthigenfalls so abändert, dass beide stets positiv werden.

Auf ähnliche Weise ist es ersichtlich, dass sich die Hülle und die i^{te} brechende Fläche in einem Kreise durchschneiden, dessen Halbmesser der Summe der beiden, positiv angenommenen, Halbmesser $\overset{\prime\prime}{Y}_i$ und $\overset{\prime}{R}_i$ gleich ist. Bezeichnet man daher durch

r_i den Halbmesser der Hülle in der Entfernung z_i von der i^{ten} brechenden Fläche,

R_i den Halbmesser des Durchschnittes beider Flächen,

so geben die Formeln (b), (c), (d) und (e) mit Rücksicht auf die wegen der Zeichen gemachte Bemerkung

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\prime}{r}_i &= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \overset{\prime}{R}_1 = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \\
&= -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_i \\
\overset{\prime\prime}{y}_i &= \frac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{v_i}\left[1+\left(1-\frac{v_i\, K_i}{V_i^2 g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\right] = \\
&= \frac{V_i\, g_i\, \varphi_1}{v_i}\left(\frac{z-\overset{\prime\prime}{g}}{g-\overset{\prime\prime}{g}}\right)_i \\
r_i &= \overset{\prime}{r}_i + \overset{\prime\prime}{y}_i \\
\overset{\prime}{R}_i &= \frac{\overset{\prime}{R}_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \\
\overset{\prime\prime}{Y}_i &= \frac{K_i\, \varphi_1}{V_i} \\
R_i &= \overset{\prime}{R}_i + \overset{\prime\prime}{Y}_i
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Oeffnungen der brechenden Flächen.

57) Die verschiedenen brechenden Flächen eines optischen Instrumentes müssen hinlängliche Oeffnungen erhalten, damit alle

Strahlen durchgelassen werden, welche durch die Hauptblendung gehen und solchen Punkten des Gegenstandes angehören, die man durch das Instrument übersehen will. Es ist klar, dass dieses stattfindet, wenn man jene Oeffnungen kreisförmig macht und ihnen Halbmesser giebt, welche wenigstens den Halbmessern der Durchschnitte zwischen den brechenden Flächen und den Hüllen der gebrochenen Strahlen gleich sind. Nennen wir daher

R_i den *Oeffnungshalbmesser* der i^{ten} brechenden Fläche,

so ist derselbe vermöge (f) der vorhergehenden Nummer durch die Formeln gegeben:

$$\left.\begin{aligned} R'_i &= \frac{R'_1}{V_i} = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \frac{1}{V_i}\left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \\ Y'_i &= \frac{K_i\,\varphi_1}{V_i} \\ R_i &= R'_i + Y''_i \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

wobei ϱ_j den Halbmesser der Hauptblendung bezeichnet, φ_1 auf die äussersten Punkte des Gegenstandes bezogen und die Zeichen von R'_i und Y''_i nöthigenfalls abgeändert werden müssen, damit beide stets positiv werden. In der Ausführung ist es übrigens räthlich, die Oeffnungshalbmesser etwas grösser zu machen, als sie die Rechnung giebt, indem hierdurch kein Nachtheil entsteht, die Oeffnungen aber wegen der Abweichungen der Strahlen leicht zu klein ausfallen können, wenn sie nach den vorhergehenden Formeln bestimmt werden.

Die Formeln (a) zeigen, dass der Oeffnungshalbmesser der i^{ten} brechenden Fläche aus den beiden Theilen R'_i und Y''_i besteht, wovon der erste R'_1, der zweite φ_1 proportional ist. Da nun, wie wir in der Folge sehen werden, die Lichtstärke allein von R'_1, das Gesichtsfeld dagegen nur von φ_1 abhängt, so nennt man gewöhnlich

R'_i *den Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit,*

Y''_i *den Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes.*

Blendungen.

58) Ausser der Hauptblendung, welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt, kommen, wie wir bereits in Nro. 22 angeführt haben, bei den optischen Werkzeugen häufig noch andere Blendungen vor. Der folgenden Untersuchung wegen ist es zuerst nothwendig, die Coordinaten der Durchschnittspunkte der Strahlen mit der Ebene einer solchen Blendung durch bekannte Grössen auszudrücken. Sodann muss ihre Oeffnung, ebenso wie es bei den brechenden Flächen geschehen ist, auf eine solche Art bestimmt werden, dass sie den durch die Hauptblendung gehenden Strahlen kein Hinderniss in den Weg legt. Hiernach muss dieselbe kreis-

förmig seyn und einen Halbmesser erhalten, welcher dem Halbmesser des Durchschnittes zwischen der Ebene der Blendung und der Hülle der gebrochenen Strahlen gleich ist.

Nehmen wir an, dass die Blendung hinter der i^{ten} brechenden Fläche angebracht ist, und nennen wir

ϱ_i den Halbmesser der Blendung,

ζ_i die Entfernung derselben von der i^{ten} brechenden Fläche, *hinter* dieser angenommen,

ζ'_{i+1} die Entfernung der Blendung von der $(i+1)^{ten}$ Fläche, *vor* derselben angenommen,

ϱ'_i und v''_i die Werthe, welche r'_i und y''_i erhalten, wenn in denselben $z_i = -\zeta_i$ gesetzt wird,

so erhalten wir zuerst die Coordinaten der Durchschnittspunkte sowohl des allgemeinen Strahles als des Hauptstrahles mit der Ebene der Blendung, wenn wir in der ersten Gleichung (p) von Nro. 39, sodann in (h) und (i) von Nro. 52, r_i, z_i, r'_i, y''_i mit ϱ_i, $-\zeta_i$, ϱ'_i, v''_i verwechseln. Dies giebt

$$\left.\begin{aligned}
\varrho'_i &= \left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_i R'_1 = \left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \\
&= \left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \\
v''_i &= \frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i}\left[1-\left(1-\frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)\left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_i\right] = \\
&= -\frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i}\left(\frac{g''+\zeta}{g-g''}\right)_i
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

Nach den in Nro. 22 gegebenen Werthen können wir die Stellung der Blendung auch auf die $(i+1)^{te}$ brechende Fläche beziehen, ebenso wie es bei der Hauptblendung geschehen ist.

Die dortigen Formeln in Verbindung mit (d) und (o) von Nro. 51 geben durch Verwechselung von j und $i-1$ mit i:

$$c_{i+1} - d_i = g_i$$

$$V_i = \frac{V_{i+1}\, c_{i+1}}{g_i}$$

$$1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i} = 1 - \frac{v_i K_{i+1}}{V_i^2 g_i} - \frac{d_i}{c_{i+1}} = \frac{g_i}{c_{i+1}}\left[1 - \frac{v_i K_{i+1}}{V_{i+1}^2 c_{i+1}}\right]$$

$$\left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_i = \frac{c_{i+1}}{g_i}\left(\frac{c-\zeta'}{c}\right)_{i+1}$$

$$\left(\frac{g+\zeta}{Vg}\right)_i = \left(\frac{c-\zeta'}{Vc}\right)_{i+1}$$

$$\left(\frac{g''+\zeta}{g-g''}\right)_i = \left(\frac{c''-\zeta'}{c-c''}\right)_{i+1}$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Formeln (a) in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho'_i &= \left(\frac{c-\zeta'}{Vc}\right)_{i+1} R'_1 = \left(\frac{c-\zeta'}{Vc}\right)_{i+1} \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \\ &= \left(\frac{c-\zeta'}{Vc}\right)_{i+1} \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \\ v''_i &= \frac{V_{i+1}\, c_{i+1}\, \varphi_1}{v_i} \left[1 - \left(1 - \frac{v_i\, K_{i+1}}{V^2_{i+1} c_{i+1}}\right)\left(\frac{c-\zeta'}{c}\right)_{i+1}\right] = \\ &= -\frac{V_{i+1}\, c_{i+1}\, \varphi_1}{v_i} \left(\frac{c''-\zeta'}{c-c''}\right)_{i+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Der Winkel Ψ_1, welchen ϱ'_i mit der Verlängerung von v''_i macht, ist vermöge (o) von Nro. 39 einerlei mit dem, welcher in Bezug auf die erste brechende Fläche durch jenen Buchstaben bezeichnet wurde.

Um nun aus diesen Formeln den Halbmesser der Blendung herzuleiten, müssen wir sie zuerst auf die Hülle der gebrochenen Strahlen beziehen, d. h. wir müssen zuerst statt R'_1 und ϱ_j die Halbmesser des auf die erste brechende Fläche fallenden Strahlenkegels und der Hauptblendung, statt φ_1 aber den der Grenze der Gesichtsfeldes entsprechenden Werth nehmen, ferner die Zeichen von ϱ'_i und v''_i nöthigenfalls abändern, damit beide stets positiv werden, endlich die Summe von ϱ'_i und v''_i dem Halbmesser der Blendung gleich setzen.

Hiernach ist der *Halbmesser der Blendung:*

$$\varrho_i = \varrho'_i + v''_i \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

worin statt ϱ'_i und v''_i ihre Werthe aus (a) oder (b) mit Rücksicht auf die vorhergehenden Bemerkungen substituirt werden müssen.

Jede nach diesen Formeln berechnete Blendung hat die Eigenschaft, dass sie allen, der Hauptblendung und dem angenommenen Werthe von φ_1 entsprechenden Strahlenkegeln ungehinderten Durchgang gestattet.

So oft bei einem optischen Werkzeuge zwei auf einander folgende brechende Flächen eine grosse Entfernung von einander haben, ist es räthlich, zwischen denselben eine oder mehrere Blendungen anzubringen, deren Oeffnungen nach den vorhergehenden Formeln berechnet werden.

Die Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen, wenn sie wirklich zu Stande kommen, sind schickliche Stellen für Blendungen, weil daselbst die Strahlen in einen engen Raum gebracht sind, die Blendungen mithin nur eine kleine Oeffnung zu erhalten brauchen und daher sehr geeignet sind, fremdartige Strahlen abzuhalten.

Für eine solche, bei dem Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen angebrachte Blendung ist

$$\zeta_i = -g''_i$$

$$\zeta'_{i+1} = c''_{i+1}$$

folglich geben die vorhergehenden Formeln (a), (b) und (c)

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\prime\prime}{v}_i &= 0 \\
\varrho_i = \overset{\prime}{\varrho}_i &= \left(\frac{g-\overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i \overset{\prime}{R}_1 = \left(\frac{g-\overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_i = \\
&= \left(\frac{g-\overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j = \left(\frac{c-\overset{\prime\prime}{c}}{Vc}\right)_{i+1} \overset{\prime}{R}_1 = \\
&= \left(\frac{c-\overset{\prime\prime}{c}}{Vc}\right)_{i+1} \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \\
&= \left(\frac{c-\overset{\prime\prime}{c}}{Vc}\right)_{i+1} \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j
\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Entstehen in dem Instrumente ein oder mehrere wirkliche Bilder, so ist es nothwendig, an dem letzten derselben eine Blendung anzubringen, welche dazu dient, das Gesichtsfeld scharf zu begrenzen.

Für eine an dem i^{ten} Bilde angebrachte Blendung ist

$$\zeta_i = -g_i$$
$$\zeta'_{i+1} = c_{i+1}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}
\overset{\prime}{\varrho}_i &= 0 \\
\varrho_i = \overset{\prime\prime}{v}_i &= \frac{V_i g_i \varphi_1}{\nu_i} = f_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

Solche an dem letzten Bilde angebrachte Blendungen haben den Vortheil, dass dadurch sämmtliche Strahlen ausgeschlossen werden, welche Punkten des Gegenstandes zugehören, deren Abstand von der Axe grösser als $c_1\,\varphi_1$ ist. Von allen näher liegenden Punkten dagegen gehen die Strahlenkegel ungehindert durch das Instrument, wenn die Oeffnungshalbmesser der brechenden Flächen und die Halbmesser der übrigen Blendungen nach den vorhergehenden Bestimmungen berechnet sind.

Anders verhält es sich, wenn in dem Instrumente kein wirkliches Bild zu Stande kommt. Die Grenze des Gesichtsfeldes wird alsdann durch eine Blendung bestimmt, welche entweder besonders angebracht, oder durch die Fassung von einer der brechenden Flächen ersetzt werden kann. Der letztere Fall ist in dem ersteren enthalten und entsteht aus demselben, wenn man die Entfernung der Blendung von der correspondirenden brechenden Fläche = 0 setzt. Ich betrachte daher bloss den ersteren Fall und nehme an, dass die durch die Formeln (a), (b) und (c) bestimmte Blendung diejenige ist, welche das Gesichtsfeld begrenzt. Da ihr Halbmesser nach dem Vorhergehenden so berechnet ist, dass er der Hülle der gebrochenen Strahlen entspricht, so werden alle diejenigen Strahlenkegel ungehindert durch dieselbe gelassen, welche von Punkten des Gegenstandes ausgehen, deren Abstand von der Axe kleiner als $c_1\,\varphi_1$ ist, und welche mithin innerhalb eines mit dem Halbmesser $c_1\,\varphi_1$ beschriebenen Kreises

liegen. Ist der Halbmesser der Hauptblendung gegeben, so kann ϱ'_i vermittetst der ersten Formel (a) oder (b) berechnet werden. Nehmen wir ferner den Halbmesser der Blendung ϱ_i ebenfalls als bekannt an, so dienen die zweiten jener Formeln, verbunden mit (c), zur Berechnung des grössten Werthes von φ_1, bei welchem die Strahlenkegel noch ungehindert durch die Blendung gehen. Substituirt man nämlich in (c) statt v''_i seinen Werth aus (a) und (b), so folgt daraus

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{v_i\,(\varrho-\varrho')_i}{V_i\,g_i\left[1-\left(1-\frac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right)\left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_i\right]}\\ &= -\frac{v_i\,(\varrho-\varrho')_i\,(g-g'')_i}{V_i\,g_i\,(g''+\zeta)_i}\\ &= \frac{v_i\,(\varrho-\varrho')_i}{V_{i+1}\,c_{i+1}\left[1-\left(1-\frac{v_i\,K_{i+1}}{V_{i+1}^2\,c_{i+1}}\right)\left(\frac{c-\zeta'}{c}\right)_{i+1}\right]}\\ &= -\frac{v_i\,(\varrho-\varrho')_i\,(c-c'')_{i+1}}{V_{i+1}\,c_{i+1}\,(c''-\zeta')_{i+1}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(f)$$

Das Gesichtsfeld ist jedoch in der Natur unbegrenzt, es giebt daher noch andere Punkte des Gegenstandes, welche eine grössere Entfernung von der Axe als $c_1\,\varphi_1$ haben. Diejenigen Strahlen, welche von diesen Punkten ausgehen und durch die Hauptblendung gelassen werden, bilden ebenso, wie es bei den näher liegenden Punkten der Fall ist, Kegel, deren Durchschnitte mit der Ebene der Blendung Kreise vom Halbmesser ϱ'_i sind.

Bezeichnen wir durch

$(\varphi)_1$ denjenigen Werth von φ_1, welcher einem jener entfernteren Punkte des Gegenstandes zugehört, und inclaviren wir alle Grössen, welche sich darauf beziehen,

so erhalten wir die Ordinate des Mittelpunktes des Kreises, welcher durch den Durchschnitt des Strahlenkegels mit der Ebene der Blendung gebildet wird, aus den zweiten Gleichungen (a) und (b), wenn wir darin v''_i und φ_1 mit $(v'')_i$ und $(\varphi)_1$ verwechseln.

Die Ordinaten der beiden Punkte jenes Kreises, welche die grösste und kleinste Entfernung von der Axe des Instrumentes haben, sind daher

$$(\varrho)_i = (v'')_i + \varrho'_i$$

und

$$(\varrho)_i = (v'')_i - \varrho'_i$$

Da $(\varphi)_1$ grösser als φ_1 angenommen worden, so ist $(v'')_i$ grösser als v''_i und folglich der erstere der vorhergehenden Werthe von $(\varrho)_i$ grösser als der Halbmesser der Blendung, der durch die Formel (c) ausgedrückt wird. Hieraus folgt, dass bei allen Punkten des Gegen-

standes, deren Abstand von der Axe grösser als $c_1\ \varphi_1$ ist, ein Theil der ihnen zugehörigen Strahlenkegel von der Blendung aufgehalten und daher unwirksam gemacht wird. Lassen wir $(\varphi)_1$ von φ_1 an nach und nach zunehmen, so wird jener unwirksame Theil desto grösser, je grösser $(\varphi)_1$ wird, und es giebt einen Werth dieser Grösse, wobei der ganze Strahlenkegel aufhört durch die Blendung zu gehen.

Wir erhalten denselben, wenn wir den zweiten der vorhergehenden Werthe von $(\varrho)_i$ dem Halbmesser der Blendung ϱ_i gleich setzen, woraus folgt:

$$\varrho_i = (\overset{\prime\prime}{v})_i - \overset{\prime}{\varrho}_i$$

Diese Gleichung entsteht aus (c) durch Verwechselung von $\overset{\prime\prime}{v}_i$ und $\overset{\prime}{\varrho}_i$ mit $(\overset{\prime\prime}{v})_i$ und $-\overset{\prime}{\varrho}_i$. Da sich nun $\overset{\prime\prime}{v}_i$ in $(\overset{\prime\prime}{v})_i$ verwandelt, wenn man φ_1 mit $(\varphi)_1$ vertauscht, so geben die in (f) erhaltenen Ausdrücke von φ_1 durch diese Verwechselungen unmittelbar die entsprechenden Ausdrücke von $(\varphi)_1$, und es ist ersichtlich, dass sich hierdurch in den ersteren weiter nichts, als $(\varrho - \overset{\prime}{\varrho})_i$ in $(\varrho + \overset{\prime}{\varrho})_i$ abändert, mithin

$$(\varphi)_1 = \frac{(\varrho + \overset{\prime}{\varrho})_i}{(\varrho - \overset{\prime}{\varrho})_i}\,\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

wird, wobei φ_1 den in (f) gefundenen Werth erhält und $\overset{\prime}{\varrho}_i$ nach der früher gemachten Bemerkung stets positiv zu nehmen ist.

Der hierdurch bestimmte Werth von $(\varphi)_1$ giebt die grösste Entfernung $c_1\ (\varphi)_1$ derjenigen Punkte des Gegenstandes, von welchen noch Strahlen durch die Blendung gehen.

Denken wir uns daher auf dem Gegenstande zwei Kreise mit den Halbmessern $c_1\ \varphi_1$ und $c_1\ (\varphi)_1$ beschrieben, wobei φ_1 und $(\varphi)_1$ nach den Formeln (f) und (g) berechnet sind, so haben die innerhalb des ersteren Kreises liegenden Punkte die Eigenschaft, dass die ihnen zugehörigen Strahlenkegel ganz durch die Blendung gehen. Von den zwischen den beiden Kreisen befindlichen Punkten werden die Strahlenkegel nur theilweise und von den ausserhalb des grösseren Kreises liegenden Punkten gar nicht durch die Blendung gelassen. Hierbei sind jedoch, wie schon oben bemerkt wurde, nur diejenigen Strahlen berücksichtigt, welche zugleich durch die Hauptblendung gehen, indem die übrigen unwirksam sind, und daher nicht betrachtet zu werden brauchen.

Ein ähnlicher Fall tritt auch bisweilen ausnahmsweise bei denjenigen Instrumenten ein, in welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder entstehen, wenn nämlich einer abgesondert angebrachten, oder durch die Fassung einer brechenden Fläche gebildeten Blendung aus anderen Rücksichten diejenige Oeffnung nicht gegeben werden kann, welche nach den vorhergehenden Bestimmungen erforderlich ist, um alle Strahlen durchzulassen, die sowohl durch die Hauptblendung, als durch die am letzten Bilde angebrachte Blendung gehen

können. Bezieht man in diesem Falle die Formeln (a), (b) und (c) auf die Blendung, welche eine zu kleine Oeffnung hat, so bestimmen auch hier die in (f) erhaltenen Ausdrücke denjenigen Theil des Gesichtsfeldes, bei welchem die den einzelnen Punkten zugehörigen Strahlenkegel ungehinderten Durchgang finden. Die äusserste Grenze des Gesichtsfeldes ist aber jetzt nicht durch die Formel (g) gegeben, sondern sie hängt von der am letzten Bilde befindlichen Blendung ab und kann aus (e) leicht berechnet werden, wenn der Halbmesser jener Blendung als bekannt angenommen wird. Hiernach ist für die Grenze des Gesichtsfeldes

$$\varphi_1 = \frac{v_i\, \varrho_i}{V_i\, g_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

wobei dem Index i derjenige Werth gegeben werden muss, welcher dem letzten Bilde entspricht.

Eintheilung der Instrumente.

59) Alle optische Werkzeuge können in zwei Classen getheilt werden.

Einige nämlich, z. B. das Sonnenmicroscop, die Camera obscura etc. sind so eingerichtet, dass von dem Gegenstande ein wirkliches Bild auf einer Ebene entworfen wird, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und die *Projectionsebene* genannt werden soll.

Bei anderen Instrumenten dagegen, z. B. den Fernröhren etc. fallen die Strahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das hinter dem Instrumente befindliche Auge.

Beiderlei Instrumente erfordern in mancher Beziehung eine verschiedene Behandlung; ich werde sie daher bei den folgenden Untersuchungen durch die Benennung *Instrumente der ersten und der zweiten Art* von einander unterscheiden.

Ausserdem müssen wir uns zuvor noch mit der Structur des Auges beschäftigen, indem die Instrumente der zweiten Art eine Kenntniss derselben voraussetzen. Da jedoch hier nur von den Problemen der ersten Ordnung die Rede ist, bei welchen die Abweichungen vernachlässigt werden, so können wir bei dem Auge auf gleiche Weise verfahren. Ich werde daher vorerst nur die wesentlichsten Theile desselben berücksichtigen, soweit es zu einer approximativen Berechnung nothwendig ist, und das Uebrige verschieben, bis wir in den Stand gesetzt seyn werden, genauere Untersuchungen hierüber anzustellen.

Auge.

60) Das beinahe kugelförmige Auge ist bekanntlich auf dem grösseren hinteren Theile seiner Oberfläche mit drei Häuten bekleidet, von denen die äusserste die *harte Haut*, die mittlere die *Gefässhaut*, die innerste die *Netzhaut* genannt werden. Auf der vorderen Seite

befindet sich eine Erhabenheit, welche mit der sehr durchsichtigen *Hornhaut* bedeckt ist. Von dem Kreise, welcher die Grenze zwischen der harten Haut und der Hornhaut ausmacht, erstreckt sich eine ebene, undurchsichtige Membran, die *Iris*, der *Augenstern* oder die *Blendung* genannt, in das Innere des Auges; sie ist mit einer Oeffnung, der *Pupille*, versehen, durch welche das Licht in das Auge fällt. Der innere Raum des Auges enthält drei durchsichtige Körper. In einer kleinen Entfernung hinter der Blendung befindet sich nämlich die *Crystall-Linse*, welche ungefähr die Gestalt einer convexen Linse hat, der vordere Raum zwischen ihr und der Hornhaut ist mit der *wässerigen Feuchtigkeit*, der hintere Raum dagegen zwischen der Crystall-Linse und der Netzhaut mit dem *Glaskörper* ausgefüllt.

Diese oberflächliche Beschreibung des Auges reicht hin, den Weg der Lichtstrahlen im Innern desselben zu beurtheilen und eine approximative Berechnung darüber anzustellen, wenn die hierzu erforderlichen Elemente bekannt sind. Die von einem und demselben Punkte eines Gegenstandes ausgehenden Lichtstrahlen, welche auf die Hornhaut fallen, erleiden an der Oberfläche von jener die erste Brechung und setzen dann ihren Weg fast in geraden Linien durch die Hornhaut und wässerige Feuchtigkeit fort, da beide sehr nahe einerlei Brechungsvermögen besitzen. Diese Strahlen gelangen jedoch nicht alle in das Innere des Auges, indem der grössere Theil derselben durch die Blendung aufgefangen und nur ein kleiner Strahlenkegel durch die Pupille durchgelassen wird. Die Blendung bestimmt hiernach die Lage der wirksamen Strahlen, und ist daher bei dem Auge dasjenige, was wir im Allgemeinen mit der Benennung Hauptblendung bezeichnet haben. Nach dem Durchgange durch die Pupille treffen die Strahlen die Vorderfläche der Crystall-Linse und erleiden daselbst die zweite Brechung. In der Crystall-Linse selbst würden sie abermals nach geraden Richtungen fortgehen, wenn die Crystall-Linse homogen wäre; ihre Dichtigkeit nimmt jedoch von aussen nach innen zu, daher der Weg der Lichtstrahlen eigentlich krummlinig ist. Bei einer bloss approximativen Rechnung können wir jedoch diesen Umstand ausser Acht lassen und die Crystall-Linse als einen Körper von gleichförmiger Dichte betrachten. Unter dieser Voraussetzung beschreiben die an der Vorderfläche der Crystall-Linse zum zweitenmale gebrochenen Strahlen im Inneren derselben gerade Linien und erleiden dann an ihrer Hinterfläche die dritte Brechung. Sie setzen hierauf ihren Weg durch den homogenen Glaskörper geradlinig fort und vereinigen sich in einem Punkte, welcher bei gut organisirten Augen genau auf die Netzhaut fällt. Dasselbe findet in Bezug auf alle Punkte des von dem Auge betrachteten Gegenstandes statt, es entsteht daher von diesem ein Bild auf der Netzhaut. Hierdurch wird das Gefühl des Sehens in jener nervösen Membran hervorgebracht, und durch den Sehenerven, von welchem sie eine Fortsetzung ist, zum Gehirn fortgepflanzt.

Nach den neueren Beobachtungen sind zwar die Krümmungen der Hinterfläche der Hornhaut und der Oberflächen der Crystall-Linse nicht sphärisch; beschränkt man sich jedoch auf kleine Werthe von φ_1, so wie sie bei optischen Instrumenten vorkommen, so kann man bei der approximativen Berechnung des Auges jene Flächen als sphärisch betrachten und von den vorhergehenden Formeln Gebrauch machen.

Nehmen wir ferner an, dass die Hornhaut und die wässerige Feuchtigkeit einerlei Brechungsvermögen haben, wie es sehr nahe aus den Beobachtungen von Chossat folgt, so kommt es auf die Gestalt der Hinterfläche der Hornhaut nicht an, und es ist

die Vorderfläche der Hornhaut . . die 1te,
die Vorderfläche der Crystall-Linse die 2te,
die Hinterfläche derselben die 3te brechende Fläche.

Die Halbmesser der beiden ersten Flächen müssen verneint genommen werden, da ihre Mittelpunkte hinter ihnen liegen, statt dass sie in den Formeln vor denselben angenommen sind, und ebenso alle Vereinigungsweiten, welche hinter den ihnen entsprechenden brechenden Flächen liegen.

Nach den angenommenen Bezeichnungen ist daher

der Halbmesser der Vorderfläche der Hornhaut . . .	$= -a_1$
der Halbmesser der Vorderfläche der Crystall-Linse .	$= -a_2$
der Halbmesser der Hinterfläche der Crystall-Linse .	$= a_3$
die Entfernung zwischen den Vorderflächen der Hornhaut und der Crystall-Linse	$= d_1$
die Entfernung zwischen der Vorderfläche und Hinterfläche der Crystall-Linse oder ihrer Axe . .	$= d_2$
die Entfernung der Hauptblendung von der Vorderfläche der Hornhaut	$= \zeta_1$
die Entfernung der Netzhaut von der Hinterfläche der Crystall-Linse	$= -z_3$

Ueber die Dimensionen des menschlichen Auges hat zuerst Petit[1]) zu Anfang des vorigen Jahrhunderts Messungen angestellt, deren Resultate in der folgenden Tafel enthalten sind. Später wurden noch einige Messungen der Art von Young[2]) und von Brewster und Gordon[3]) vorgenommen, deren Resultate ich ebenfalls beifüge, mit Bezeichnung der Beobachter vermittelst ihrer Anfangsbuchstaben. Unter den vielen Beobachtungen von Petit über die Dimensionen der Crystall-Linse habe ich nur diejenigen beibehalten, welche an Individuen bis zu 50 Jahren gemacht wurden, mit Weglassung von zweien, wobei die Crystall-Linsen eine sehr abnorme Bildung hatten.

[1]) Mém. de l'Acad. de Paris. 1728. pag. 206 und 289; 1730. pag. 4.
[2]) Philos. transact. 1801. part I. pag. 38.
[3]) Edinb. Philos. Journal. Vol. I. pag. 43.

Bei allen diesen Beobachtungen sind die Oberflächen der durchsichtigen Körper als sphärisch vorausgesetzt und diejenigen Durchmesser gesucht worden, welche ihren Krümmungen am meisten entsprechen. Die Längenmaasse sind in französischen Linien ausgedrückt.

Nummer der Beobachtung.	Hornhaut.			Blendung.	Beobachter.
	Durchmesser der Krümmung der Vorderfläche.	Dicke.	Entfernung der Hinterfläche von der Crystall-Linse.	Entfernung von der Crystall-Linse.	
1	7.00	0.17	1.00	0.12	P.
2	7.50	0.25	1.33	0.17	P.
3	—	—	—	0.25	P.
4	6.90	—	—	—	Y.
5	—	0.47	—	—	B. und G.
Mittel	7.133	0.296	1.167	0.180	—

Nummer der Beobachtung.	Crystall-Linse.				Beobachter.
	Alter.	Durchmesser der Krümmung der Vorderfläche.	Durchmesser der Krümmung der Hinterfläche.	Axe oder Dicke.	
1	12	7.50	5.00	2.00	P.
2	15	6.00	4.75	2.00	P.
3	15	5.50	4.50	2.50	P.
4	20	6.00	4.75	2.50	P.
5	25	6.00	5.00	2.67	P.
6	30	6.00	5.00	1.75	P.
7	30	7.50	6.00	1.67	P.
8	30	6.00	6.00	2.00	P.
9	30	7.25	6.25	1.75	P.
10	40	7.50	5.00	2.87	P.
11	40	6.00	5.00	2.00	P.
12	45	6.50	5.00	2.00	P.
13	45	6.50	5.00	1.67	P.
14	50	7.00	5.50	2.00	P.
15	50	7.00	5.00	2.00	P.
Mittel	—	6.550	5.183	2.092	

In neueren Zeiten fand zuerst Chossat [1]) an Thieraugen und dann Krause [2]) an Menschenaugen, dass die Oberflächen der durchsichtigen Körper im Auge keineswegs sämmtlich sphärisch sind. Nach den Beobachtungen des letzteren ist im menschlichen Auge

[1]) Annales de chimie et de physique. Tome X. pag. 337.

[2]) Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie. Bd. XXXIX. pag. 529.

nur die Vorderfläche der Hornhaut eine Kugelfläche, dagegen sind die Hinterflächen der Hornhaut und der Crystall-Linse Paraboloide, die Vorderfläche der Crystall-Linse und die Netzhaut endlich Ellipsoide. Die folgende Tafel enthält die Resultate, welche Krause aus seinen micrometrischen Messungen an acht Augen vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet hat, nebst den übrigen von ihm gefundenen Dimensionen, soweit sie zu unserem Zwecke nothwendig sind. Die Längenmaasse sind dabei ebenfalls in französischen Linien ausgedrückt.

Nummer der Beobachtung.	Hornhaut.			Blendung.		Netzhaut.	
	Radius der Vorderfläche.	Dicke in der Mitte.	Parameter der Hinterfläche.	Entfernung von der Hornhaut.	Durchmesser der Pupille.	Halbe grosse Axe.	Halbe kleine Axe.
1	4.38	0.40	6.14	1.00	1.80	5.12	4.45
2	4.12	0.35	5.55	1.15	2.25	5.05	4.15
3	3.67	0.40	5.28	1.25	2.60	5.12	4.23
4	3.91	0.40	6.22	—	—	5.07	4.41
5	3.84	0.50	6.18	1.10	1.40	5.14	4.58
6	3.78	0.48	5.59	1.10	—	5.05	4.43
7	3.86	0.53	5.54	0.90	1.50	5.05	4.41
8	3.72	0.50	4.31	0.90	1.20	4.93	4.19
Mittel	3.910	0.445	5.601	1.057	1.792	5.066	4.356

Nummer der Beobachtung.	Crystall-Linse.						Aeussere Axe des Auges.
	Vorderfläche.			Axe oder Dicke der Linse.	Hinterfläche.		
	Entfernung von der Hornhaut.	Halbe grosse Axe.	Halbe kleine Axe.		Parameter.	Entfernung von der Netzhaut.	
1	1.20	2.05	0.95	2.00	4.49	6.65	10.90
2	1.35	2.00	0.91	1.90	4.99	6.80	11.05
3	1.25	2.00	1.14	2.40	4.99	6.10	10.70
4	1.35	2.05	1.10	2.20	4.51	5.90	10.50
5	1.25	2.03	0.83	1.85	4.83	6.40	10.80
6	1.20	1.95	0.98	2.35	4.53	6.00	10.80
7	1.00	2.03	0.95	1.80	4.09	6.65	10.65
8	1.00	2.00	0.94	1.85	3.79	6.55	10.65
Mittel	1.200	2.014	0.975	2.044	4.527	6.381	10.756

Krause hat bei dem Auge Nro. 1 vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate auch die Radien sämmtlicher Flächen berechnet, welche seinen Beobachtungen unter der Voraussetzung entsprechen,

dass jene Flächen sphärisch sind, und zugleich die Gewichte angegeben, welche die Bestimmungen sowohl nach dieser Hypothese als bei den anderen von ihm angenommenen Krümmungen der Flächen erhalten. Die Resultate hiervon sind aus der folgenden Tafel ersichtlich.

Fläche.		Constante Linien der angenommenen Krümmung.	Gewicht.	Radius der als sphärish angenommenen Fläche.	Gewicht.
Hornhaut	Vorderfläche	Radius = 4.3826	11977	4.3826	11977
	Hinterfläche	Parameter = 6.1443	53726	3.2309	5896
Linse	Vorderfläche	Halbe Axen = 2.0500, 0.9500	134695	3.6987	13156
	Hinterfläche	Parameter = 4.4921	106111	2.5267	11305

Die Vergleichung der den beiden Voraussetzungen entsprechenden Gewichte zeigt, dass eine bei weitem grössere Wahrscheinlichkeit für die angenommenen Krümmungen als für die Sphäricität der Flächen im menschlichen Auge vorhanden ist.

Zum Behufe der approximativen Berechnung nehme ich zuerst das Mittel aus den in der ersten Tafel enthaltenen früheren Messungen, mit der Ausnahme, dass ich bei der Vorderfläche der Hornhaut nur das Mittel aus den Beobachtungen von Petit gebrauche, weil die Beobachtung von Young an seinem sehr kurzsichtigen Auge gemacht wurde, die folgenden Rechnungen dagegen für unendlich entfernte Gegenstände geführt werden sollen; dass ich sodann für die Dicke der Hornhaut und die Entfernung der Netzhaut von der Hinterfläche der Crystall-Linse diejenigen Werthe wähle, welche im Mittel aus den Beobachtungen von Krause folgen, weil die erstere jener Grössen von Petit zu klein bestimmt zu seyn scheint, die letztere aber bei den früheren Messungen gar nicht vorkommt. Hierdurch entstehen die Werthe, welche in der ersten Columne der nachstehenden Tafel enthalten sind.

Um ferner die obigen Formeln bei einem kleinen Gesichtsfelde auf die Beobachtungen von Krause anzuwenden, nehme ich bei den nicht sphärischen Flächen ihre Krümmungshalbmesser am Scheitel. Hierdurch entstehen für das Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen diejenigen Werthe, welche in der zweiten Columne der Tafel angegeben sind.

Endlich füge ich zur Vergleichung der beiden von Krause gemachten Voraussetzungen in Bezug auf das Auge Nro. 1 in der dritten Columne diejenigen Werthe bei, welche ebenso wie die der zweiten Columne berechnet sind, in der vierten Columne dagegen diejenigen, welchen die Annahme der Sphäricität sämmtlicher Flächen zu Grunde liegt.

	I.	II.	III.	IV.
a_1 —	3.625	3.910	4.383	4.383
a_2 —	3.275	4.160	4.424	3.699
a_3	2.591	2.263	2.246	2.527
d_1	1.612	1.645	1.600	1.600
d_2	2.092	2.044	2.000	2.000
ζ_1	1.432	1.502	1.400	1.400
z_3 —	6.381	6.381	6.650	6.650

Ueber die Brechungsverhältnisse der durchsichtigen Körper im menschlichen Auge haben Brewster und Gordon[1]), Chossat[2]), Young[3]) und ich[4]) Beobachtungen angestellt, deren Resultate in der folgenden Tafel enthalten sind. Young fand das Brechungsverhältniss des mittleren Theiles der Crystall-Linse $= \frac{21}{20}$ von dem des Wassers. Nimmt man daher statt des letzteren das Mittel aus den in der Tafel angegebenen Resultaten, so folgt daraus der in derselben angenommene Werth.

Nummer der Beobachtung.	Wasser.	Hornhaut.	Wässerige Feuchtigkeit.	Mittlerer Theil der Crystall-Linse.	Glaskörper.	Beobachter.
1	1.3358	—	1.3366	1.3990	1.3394	B. u. G.
2	—	1.33	1.3380	1.4200	1.3390	C.
3	—	—	—	1.4028	—	Y.
4	1.3363	—	1.3376	1.4036	1.3391	S.
Mittel	1.3360	1.33	1.3374	1.4066	1.3392	—

Nehmen wir daher das Brechungsverhältniss der Hornhaut und wässerigen Feuchtigkeit für einerlei an, betrachten die Crystall-Linse als homogen und setzen ihr Brechungsverhältniss dem ihres mittleren Theiles gleich, so ist nach der angenommenen Bezeichnung und nach den vorhergehenden Werthen

das Brechungsverhältniss der wässerigen Feuchtigkeit $= \nu_1 = 1.3374$,
das Brechungsverhältniss der Crystall-Linse $= \nu_2 = 1.4066$,
das Brechungsverhältniss des Glaskörpers $= \nu_3 = 1.3392$.

[1]) Am angeführten Orte.

[2]) Bibliothèque universelle. Tome IX. pag. 26.

[3]) Am angeführten Orte.

[4]) Diese Beobachtungen wurden nach der Wollaston'schen Methode angestellt, indem auf die untere horizontal liegende Fläche eines Prismas, dessen Brechungsverhältniss und brechender Winkel genau bestimmt worden waren, eine kleine Quantität der zu untersuchenden Substanz gebracht und das Verschwinden ihres Bildes beobachtet wurde.

Hieraus folgt ferner

$$n_1 = v_1 = 1.3374$$

$$n_2 = \frac{v_2}{v_1} = 1.0517$$

$$n_3 = \frac{v_3}{v_2} = 0.9521$$

Setzt man endlich

die Entfernung des Gegenstandes $= c_1 = \infty$

so geben die Formeln (a) von Nro. 40 vermittelst der vier verschiedenen Werthe, welche oben für die Halbmesser und Entfernungen der brechenden Flächen angenommen wurden, die folgenden Werthe für die Vereinigungsweiten der Strahlen nach den verschiedenen Brechungen im Auge:

	I.	II.	III.	IV.
c_1	∞	∞	∞	∞
g_1 —	14.370	15.499	17.370	17.370
c_2 —	12.758	13.854	15.770	15.770
g_2 —	11.168	12.429	14.004	13.589
c_3 —	9.076	10.385	12.004	11.589
g_3 —	7.399	8.106	9.098	9.047
z_3 —	6.381	6.381	6.650	6.650
$g_3 - z_3$ —	1.018	1.725	2.448	2.397

Die negativen Vereinigungsweiten zeigen, dass sämmtliche Vereinigungspunkte hinter den correspondirenden brechenden Flächen liegen. Da ferner der letzte derselben bei gut organisirten Augen auf die Netzhaut fällt, so sollten g_3 und z_3 einander gleich seyn, was jedoch nach den zu Grund gelegten Beobachtungen bei keiner der gemachten Voraussetzungen der Fall ist. Wir müssen aber hierbei berücksichtigen, dass die Crystall-Linse bei den obigen Rechnungen als homogen angenommen wurde, statt dass ihr Brechungsvermögen nach einem bis jetzt nicht bekannten Gesetze von Aussen nach Innen zunimmt, wesshalb schon Young[1]) die Bemerkung gemacht hat, dass man das Brechungsverhältniss der als homogen betrachteten Crystall-Linse etwas grösser annehmen muss, wenn die danach berechnete Vereinigungsweite mit derjenigen übereinstimmen soll, welche bei der ungleichförmigen Dichte der Crystall-Linse stattfindet. Dazu kommt noch, dass alle Messungen mit Ausnahme der in Nro. 4 der ersten Tafel enthaltenen an todten Augen angestellt worden sind, daher die gefundenen Krümmungen leicht etwas von denen im lebenden Zustande verschieden seyn können. Hiernach

[1]) Am angeführten Orte.

müssen wir zu der Ueberzeugung gelangen, dass approximative Rechnungen von der Art, wie die oben geführten, nicht hinreichend sind, um über die Frage zu entscheiden, welche der beiden Annahmen über die Gestalt der gekrümmten Flächen im Auge die richtige ist, dass vielmehr hierzu genauere Rechnungen mit Rücksicht auf die bei jeder Fläche entstehenden Abweichungen und auf das veränderliche Brechungsvermögen der Crystall-Linse, mithin eine hinlängliche Kenntniss des Gesetzes, welches das letztere befolgt, erforderlich sind.

Für den gegenwärtigen Zweck sind aber die approximativen Rechnungen genügend, da sie nur dazu dienen sollen, im Allgemeinen den Weg der Lichtstrahlen im Auge kennen zu lernen.

Aus den allegirten Formeln ist übrigens ersichtlich, dass die sämmtlichen Vereinigungsweiten von c_1 oder der Entfernung des Gegenstandes abhängen. Wenn daher das Auge so eingerichtet ist, dass für eine gewisse Entfernung die Strahlen auf der Netzhaut vereinigt werden, so findet dieses bei derselben Einrichtung nicht mehr statt, sobald sich die Entfernung abändert. Hieraus folgt, dass wir bei ungeänderter Einrichtung des Auges nur in einer bestimmten Entfernung deutlich sehen können. Die Erfahrung lehrt uns dagegen, dass das deutliche Sehen bei verschiedenen Entfernungen innerhalb gewisser Grenzen möglich ist, woraus wir den Schluss machen können, dass in dem Auge innere Veränderungen erfolgen müssen, wenn es sich nach Gegenständen in verschiedenen Entfernungen richtet. Unser Gefühl überzeugt uns auch wirklich von dem Daseyn solcher inneren Veränderungen; worin sie aber bestehen, werden wir erst später discutiren, sobald wir in den Stand gesetzt seyn werden, in das nähere Detail einzugehen.

Berechnen wir jetzt die Vereinigungsweite der einfallenden Hauptstrahlen c''_1. Sie ist durch die zweite Formel (c) von Nro. 51 gegeben, wenn man darin

$$i = 1$$
$$g''_1 = -\zeta_1$$

setzt. Diess giebt

$$\frac{1}{c''_1} = -\frac{n_1}{\zeta_1} - \frac{(n_1 - 1)}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Vermittelst der viererlei oben angenommenen Werthe wird hiernach

	I.	II.	III.	IV.
c''_1 =	1.189	1.244	1.139	1.139

Die einfallenden Hauptstrahlen schneiden sich daher in einem Punkte, welcher etwas mehr als um 1''' hinter der Hornhaut liegt.

Den Halbmesser r' des einfallenden Strahlenbündels erhalten wir aus der letzten Formel (q) von Nro. 39, wenn wir darin

$$j = 1$$
$$\zeta_1 = -g''_1$$
$$V_1 = 1$$

setzen. Diess giebt

$$r' = \left(\frac{z-c_1}{c_1}\right)\left(\frac{g}{g''-g}\right)_1 \varrho_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Multiplicirt und dividirt man diesen Ausdruck durch $\frac{(c''_1 - c_1)\,c''_1}{g''_1}$, so verwandelt er sich in den folgenden:

$$r' = \left(\frac{z-c_1}{c''_1-c_1}\right)\left(\frac{c''-c}{cc''}\right)_1\left(\frac{gg''}{g''-g}\right)_1 \frac{c''_1\,\varrho_1}{g''_1}$$

Vermöge (o) von Nro. 51 ist aber

$$\left(\frac{c''-c}{cc''}\right)_1\left(\frac{gg''}{g''-g}\right)_1 = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{c''}}{\frac{1}{g}-\frac{1}{g''}}\right)_1 = n_1$$

folglich

$$r' = \left(\frac{z-c_1}{c''_1-c_1}\right)\frac{n_1\,c''_1}{g''_1}\,\varrho_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

In dieser Formel bezeichnet

ϱ_1 den Halbmesser der Pupille,

z die Entfernung der Hornhaut von der Stelle, an welcher r' bestimmt werden soll, vor der Hornhaut angenommen.

Bei den Anwendungen wird r' vorzüglich an zwei Stellen gebraucht, nämlich bei dem Vereinigungspunkte der einfallenden Hauptstrahlen und bei dem Durchschnitte des einfallenden Strahlenbündels mit der Hornhaut. Für die erstere Stelle ist

$$z = c''_1$$

folglich, wenn man in diesem Falle ϱ statt r' setzt,

$$\varrho = \frac{n_1\,c''_1}{g''_1}\,\varrho_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

Da dieser Ausdruck unabhängig von c_1 ist, so folgt daraus, dass der Halbmesser des einfallenden Strahlenbündels an der Stelle, wo die einfallenden Hauptstrahlen sich schneiden, für alle Entfernungen des Gegenstandes einerlei Grösse behält.

Dagegen ist der Werth von ϱ wegen des Halbmessers der Pupille, welchem er proportional ist, veränderlich, indem die Erfahrung lehrt, dass der letztere Halbmesser nicht nur bei verschiedenen Augen sehr verschieden ist, sondern auch bei demselben Auge von der veränderlichen Lichtstärke und Entfernung der Gegenstände abhängt.

Nach den obigen Werthen ist für diesen Fall

	I.	II.	III.	IV.
$\frac{\varrho}{\varrho_1}$	1.111	1.107	1.088	1.088

Derselbe Werth von $\acute{r}$ gilt auch für alle Werthe von z, wenn der Gegenstand unendlich weit entfernt, mithin $c_1 = \infty$ ist, in welchem Falle sich der einfallende Strahlenbündel in einen Cylinder verwandelt.

Für den Durchschnitt des einfallenden Strahlenbündels mit der Hornhaut ist

$$z = 0$$

und der Halbmesser $\acute{r}$ an dieser Stelle wurde oben mit $\acute{R}_1$ bezeichnet.

Die Formeln (c) und (d) geben daher

$$\acute{R}_1 = \left(\frac{c}{c-\overset{''}{c}}\right)_1 \frac{n_1 \overset{''}{c}_1}{\overset{''}{g}_1} \varrho_1 = \left(\frac{c}{c-\overset{''}{c}}\right)_1 \varrho \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

Die Ordinate des Bildes ist vermöge (o) von Nro. 52 und (d) von Nro. 54

$$f_3 = \frac{V_3 g_3 \varphi_1}{v_3} = \frac{V_3 g_3}{v_3} \left(\frac{c-\overset{''}{c}}{c}\right)_1 tg\overset{''}{\omega} \quad \ldots\ldots \text{(f)}$$

mithin φ_1 oder $tg\overset{''}{\omega}$ proportional. Für unendlich entfernte Gegenstände sind beide Grössen gleich und selbst bei kleinen Entfernungen wenig von einander verschieden, da c_1 immer gross in Vergleichung mit $\overset{''}{c}_1$ ist.

Durch die oben angegebenen Werthe erhält man

	I.	II.	III.	IV.
$\frac{f_3}{\varphi_1}$ —	7.657	8.104	8.730	8.724

Aus dem negativen Zeichen von f_3 müssen wir schliessen, dass die Ordinate des Bildes die umgekehrte Lage von der des Gegenstandes hat, das Bild auf der Netzhaut daher verkehrt ist.

Da die sämmtlichen Vereinigungsweiten, und folglich auch V_3, von c_1 abhängen, so folgt aus dem Ausdrucke von f_3, dass die Grösse des Bildes auf der Netzhaut bei einerlei Werth von $tg\overset{''}{\omega}$ eine Function der Entfernung des Gegenstandes ist. Die Beobachtungen, welche weiter unten angeführt werden sollen, zeigen dagegen, dass jenes Bild bei allen Entfernungen des Gegenstandes eine unveränderliche Grösse behält. Hiernach müssen die inneren Veränderungen im Auge von der Art seyn, dass die Grösse $\frac{V_3 g_3}{v_3}\left(\frac{c-\overset{''}{c}}{c}\right)$, bei allen

Werthen von c_1 einerlei bleibt, mithin eine Constante ist, oder wenigstens nur unmerkliche Veränderungen erleidet.

Um die in Nro. 49 und 50 erhaltenen Resultate auf das Auge anzuwenden, müssen wir uns erinnern, dass bei den vorhergehenden Rechnungen $c_1 = \infty$ angenommen wurde. Hiernach ist vermöge (h) und (i) von Nro. 50:

die Abscisse des zweiten Brennpunktes $= g_3$,

die zweite Brennweite $= p_3 = \frac{V_3 g_3}{v_3}$,

die Abscisse des zweiten wahren Mittelpunktes $= m_3 = g_3 - p_3$.

Die Werthe, welche nach den obigen Annahmen hieraus folgen, sind in der nachstehenden Tafel enthalten:

	I.	II.	III.	IV.
g_3 —	7.399	8.106	9.047	9.098
p_3 —	7.657	8.104	8.724	8.730
m_3	+ 0.258	— 0.002	— 0.323	— 0.368

Da die Abscisse m_3 vom Scheitel der Hinterfläche der Crystall-Linse an gezählt ist, so sehen wir aus dem Werthe dieser Grösse, dass der zweite wahre Mittelpunkt des Auges sehr nahe mit jenem Scheitel zusammenfällt.

Die auf der Axe gemessene Entfernung zwischen der Vorderfläche der Hornhaut und der Hinterfläche der Crystall-Linse ist $= d_1 + d_2$. Da nun m_3 in den Formeln *vor* der letzteren Fläche angenommen wurde, so ist die Abscisse des zweiten wahren Mittelpunktes, vom Scheitel der Vorderfläche der Hornhaut an gezählt, $= m_3 - d_1 - d_2$ und nach den oben angenommenen Werthen:

	I.	II.	III.	IV.
$m_3 - d_1 - d_2$ —	3.446	3.791	3.923	3.968

so dass der zweite wahre Mittelpunkt des Auges etwas weniger als 4 Linien hinter der Vorderfläche der Hornhaut liegt.

Bestimmen wir die Lage jenes Mittelpunktes gegen die Mittelpunkte der Krümmung, welche der Vorderfläche der Hornhaut und der Netzhaut in ihren Scheiteln zugehören, und nennen zu diesem Ende:

$\varkappa$ den Krümmungshalbmesser der Netzhaut im Scheitel, vor diesem angenommen,

H und N die Abscissen, welche den Scheiteln der Vorderfläche der Hornhaut und der Netzhaut zugehören, beide vom Scheitel der Hinterfläche der Crystall-Linse an gezählt und *vor* demselben angenommen,

so ist, da a_1 den Krümmungshalbmesser der Vorderfläche der Hornhaut, z_3 die Entfernung der Netzhaut von der Hinterfläche der Crystall-Linse, nach derselben Richtung gezählt, bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{l} H = a_1 + d_1 + d_2 \\ N = \varkappa + z_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Gebraucht man nun in I. statt $\varkappa$ den Werth, welcher den in II. zu Grund gelegten mittleren Werthen von Krause entspricht, so erhält man nach den obigen Angaben

	I.	II.	III.	IV.
$\varkappa$	+ 5.891	+ 5.891	+ 5.890	+ 5.890
H	+ 0.079	— 0.221	— 0.783	— 0.783
N	— 0.490	— 0.490	— 0.760	— 0.760
m_3	+ 0.258	— 0.002	— 0.323	— 0.368
$H - m_3$	— 0.179	— 0.219	— 0.460	— 0.415
$N - m_3$	— 0.748	— 0.488	— 0.437	— 0.392

Der zweite wahre Mittelpunkt des Auges fällt daher beinahe mit den Mittelpunkten der Krümmung zusammen, welche der Vorderfläche der Hornhaut und der Netzhaut in ihren Scheiteln zugehören, und liegt nur um weniges *vor* den beiden letzteren.

Aendert sich die Entfernung des Gegenstandes, so wird die Abscisse des ihr entsprechenden Mittelpunktes $= M_3$; sie ist von m_3 verschieden und durch die erste Formel (f) von Nro. 50 gegeben. Da aber die innere Einrichtung des Auges sich zugleich mit der Entfernung des Gegenstandes verändert, so können die dadurch entstehenden Veränderungen in der Lage des Mittelpunktes sowohl als in den übrigen oben gefundenen Resultaten nur alsdann genau berechnet werden, wenn die Veränderungen in der inneren Einrichtung des Auges hinlänglich bekannt sind, was bis jetzt nicht der Fall ist. Die folgende Betrachtung kann jedoch dazu dienen, im Allgemeinen die Lage jenes Mittelpunktes approximativ zu bestimmen.

Wäre nämlich der ganze, hinter der Vorderfläche der Hornhaut befindliche innere Raum des Auges mit einem homogenen durchsichtigen Körper ausgefüllt, so fände die einzige Brechung an der Hornhaut statt, so dass

$$i = 1$$
$$V_i = 1$$
$$v_i = n_1$$
$$D = 0$$

würde. Vermittelst dieser Werthe geben die beiden Formeln (f) von Nro. 50

$$M_1 = \frac{c_1\, g_1 \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)}{c_1 - \frac{g_1}{n_1}} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)_1}{\frac{1}{g_1} - \frac{1}{n_1 c_1}}$$

Aus (a) von Nro. 40 folgt aber

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{n_1 c_1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_1 \frac{1}{a_1}$$

Hierdurch wird

$$M_1 = a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

Bei dieser Voraussetzung würde mithin bei allen Entfernungen des Gegenstandes der ihnen entsprechende, wahre Mittelpunkt des Auges eine unveränderliche Lage haben und genau mit dem Mittelpunkte der Krümmung zusammenfallen, welche der Vorderfläche der Hornhaut zugehört. Da nun die Brechungsverhältnisse der im Auge befindlichen durchsichtigen Körper nur wenig von einander verschieden sind, so kann das vorhergehende Resultat nur unbedeutend von der Wahrheit abweichen.

In der That haben wir bereits aus der vorhergehenden Tafel ersehen, dass bei einer unendlichen Entfernung des Gegenstandes beide Mittelpunkte beinahe zusammenfallen.

Um sodann zu constatiren, dass bei einem und demselben Auge der den verschiedenen Entfernungen entsprechende Mittelpunkt eine fast unveränderliche Lage behält, habe ich für das in den vorhergehenden Rechnungen mit I. bezeichnete mittlere Auge und für eine Entfernung des Gegenstandes von 72 Linien M_3 nach der zweiten Formel (f) von Nro. 50 berechnet, und

$$M_3 = +\ 0.254$$

gefunden, welches von dem bei einer unendlichen Entfernung stattfindenden Werthe

$$m_3 = +\ 0.258$$

nur unmerklich abweicht.

Durch die inneren Veränderungen des Auges wird zwar dieses Resultat etwas abgeändert; da aber aus den Beobachtungen, welche später angeführt werden sollen, hervorgeht, dass die Krümmung der Hornhaut bei allen Entfernungen des Gegenstandes ungeändert bleibt oder wenigstens nur unmerkliche Aenderungen erleidet, da ferner die Crystall-Linse nur einen sehr geringen Einfluss auf das Resultat hat, so kann dasselbe durch die inneren Veränderungen des Auges nur unbedeutend abgeändert werden.

Wir können daher aus allem diesem den Schluss machen, dass bei allen Entfernungen des Gegenstandes der ihnen entsprechende wahre Mittelpunkt des Auges sehr nahe eine unveränderliche Lage behält und sich nur um weniges vor dem Mittelpunkte der Krümmung befindet, welche der Vorderfläche der Hornhaut zugehört.

Der erstere Mittelpunkt, der, wie wir oben gesehen haben, die Eigenschaft hat, dass sich alle Linien in ihm durchschneiden, welche die correspondirenden Punkte des Gegenstandes und des

Bildes auf der Netzhaut mit einander verbinden, wird, zur Unterscheidung von dem geometrischen Mittelpunkte, der *optische Mittelpunkt des Auges* genannt.

Die vorhergehenden Resultate setzen voraus, dass bei der Betrachtung eines Gegenstandes keine Bewegung des Auges stattfindet. Die Erfahrung lehrt uns jedoch, dass das Auge bei unveränderter Lage seiner Axe nur ein sehr kleines Gesichtsfeld deutlich sieht, und sich daher successiv nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes richtet, welchen es betrachten will. Nehmen wir an, dass dieses bei sämmtlichen Punkten desselben geschieht, so liegt jedesmal der betrachtete Punkt und das ihm zugehörige Bild auf der Netzhaut in der Axe des Auges, und die Richtungen, welche diese nach und nach annimmt, sind die Linien, welche die betrachteten Punkte des Gegenstandes mit den ihnen entsprechenden Bildern auf der Netzhaut verbinden. Sie durchschneiden sich sämmtlich in demjenigen Punkte, um den sich das Auge dreht, wenn es die Richtung seiner Axe verändert.

Da das Auge mit Ausnahme der kleinen durch die Hornhaut hervorgebrachten Erhabenheit beinahe eine kugelförmige Gestalt hat und in der zum Theil mit Fett ausgefüllten Augenhöhle eingeschlossen ist, so kann der Umdrehungspunkt desselben nicht viel von seinem geometrischen Mittelpunkte verschieden seyn, und muss daher um etwas mehr als die halbe äussere Axe des Auges vom Scheitel der Hornhaut abstehen, so dass diese Entfernung nach dem Mittel aus den angeführten Messungen von Krause etwas grösser als $5{,}'''38$ anzunehmen ist.

Hiermit stimmen die Beobachtungen von Volkmann sehr gut überein, welche sich auf den erwähnten Umdrehungspunkt zu beziehen scheinen, da bei denselben von dem Beobachter zwei verschiedene Punkte pointirt und daher wohl ohne Zweifel die Axe des Auges abwechselnd nach beiden gerichtet wurde. Sie gaben im Mittel aus den Messungen an acht Personen die Entfernung jenes Punktes vom Scheitel der Hornhaut $= 0{,}''466 = 5{,}'''59$.

Ausser dem Mittelpunkte verändert auch der Durchschnittspunkt der einfallenden Hauptstrahlen seine Lage, sobald sich das Auge successiv nach den verschiedenen Punkten des Gegenstandes richtet und nur diejenigen Hauptstrahlen berücksichtigt werden, welche den auf diese Weise betrachteten Punkten zugehören. Da sich nämlich die letzteren bei der Betrachtung jedesmal in der verlängerten Axe des Auges befinden, so bildet diese in ihren verschiedenen Lagen die jenen Punkten entsprechenden Hauptstrahlen, welche sich daher ebenfalls in dem Umdrehungspunkte des Auges durchschneiden, so dass in diesem Punkte nicht nur der Mittelpunkt, nach der obigen Definition, sondern auch der Durchschnittspunkt der Hauptstrahlen zusammenfallen.

Verbindung des Auges mit den Instrumenten der zweiten Art, wenn sich das erstere unveränderlich in der Axe derselben befindet.

62) In Nro. 60 wurden die optischen Werkzeuge in zwei Classen getheilt, wovon die zweite diejenigen Instrumente enthält, bei denen die Lichtstrahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das hinter dem Instrumente befindliche Auge fallen. Es ist daher bei den Untersuchungen über diese Instrumente nothwendig, sie in Verbindung mit dem Auge zu betrachten.

Um nun beide von einander unterscheiden zu können, werde ich für das Instrument die bisherigen Bezeichnungen beibehalten, und die i^{te} brechende Fläche als die letzte des Instrumentes annehmen; bei dem Auge dagegen werde ich die Grössen, welche sich auf dasselbe, als ein abgesondertes System von brechenden Flächen betrachtet, beziehen, mit denselben Buchstaben wie bei dem Instrumente bezeichnen, und sie nur dadurch unterscheiden, dass ich bei dem Index die römischen Ziffern statt der arabischen und den Buchstaben $\mathfrak{i}$ statt i gebrauche, wonach die Hornhaut den Index I. erhält.

Diess vorausgesetzt können wir untersuchen, auf welche Weise die Verbindung des Auges mit dem Instrumente statt finden kann.

Wir haben in der vorhergehenden Nummer gesehen, dass sich die einfallenden Hauptstrahen bei blossem unbewegtem Auge in einem Punkte der Axe schneiden, welcher ungefähr 1''' hinter der Hornhaut liegt. Soll nun das Auge durch ein Instrument der zweiten Art so gut als möglich sehen, so müssen die Strahlen nach der letzten Brechung durch das Instrument so in das Auge fallen, als wenn sie von einem mit blossem Auge betrachteten Gegenstande kämen. Nehmen wir daher zuerst an, dass das Auge seine Stellung ungeändert beibehält und dass die Axen des Instrumentes und des Auges in einer geraden Linie liegen, so wird die angegebene Bedingung erfüllt, wenn die Hauptstrahlen nach der letzten Brechung durch das Instrument sich in demjenigen Punkte des Auges durchschneiden, in welchem sich bei blossem unbewegtem Auge die von einem Gegenstande unmittelbar in dasselbe fallenden Hauptstrahlen schneiden würden.

Nach der angenommenen Bezeichnung ist

$\overset{\prime\prime}{g}_{i}$ die Vereinigungsweite der Hauptstrahlen nach der letzten Brechung durch das Instrument,

$\overset{\prime\prime}{c}_{I}$ die Vereinigungsweite der in das Auge fallenden Hauptstrahlen,

beide *vor* den correspondirenden brechenden Flächen angenommen.

Nennen wir daher

d die Entfernung der Hornhaut von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes,

so muss

$$d = \overset{\prime\prime}{c}_{I} - \overset{\prime\prime}{g}_{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

seyn, wenn die erwähnte Bedingung erfüllt werden soll.

Nachdem auf diese Weise der Ort des Auges bestimmt ist, können wir die Entfernung desselben von dem letzten Bilde des Instrumentes berechnen. Jenes Bild vertritt bei dem Auge die Stelle des Gegenstandes; nach der angenommenen Bezeichnung sind daher

g_i die Entfernung des letzten Bildes im Instrumente von der i^{ten} brechenden Fläche,

c_I die Entfernung desselben von der Hornhaut,

folglich

$$c_I = g_i + d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Wegen der folgenden Untersuchungen ist es nöthig, diese Entfernung von dem Durchschnittspunkte der in das Auge fallenden Hauptstrahlen an zu zählen, dessen Entfernung von der Hornhaut mit c''_I bezeichnet wurde.

Nennen wir daher

$(c)_I$ die Entfernung des letzten Bildes im Instrumente von dem Durchschnittspunkte der in das Auge fallenden Hauptstrahlen, *vor* demselben angenommen,

so ist, weil c_I und c''_I nach einerlei Richtung liegen,

$$(c)_I = c_I - c''_I$$

Die Formeln (a) und (b) geben aber

$$c_I - c''_I = g_i - g''_i$$

folglich

$$(c)_I = c_I - c''_I = g_i - g''_i \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

wonach $(c)_I$ vermittelst der Formeln von Nro. 56 berechnet werden kann.

Den Halbmesser r'_i des aus dem Instrumente gehenden Strahlenbündels, an der Stelle, wo die Hauptstrahlen die Axe durchschneiden, erhält man aus der ersten Formel (p) von Nro. 39, wenn man darin

$$z_i = g''_i$$

setzt. Diess giebt

$$r'_i = \left(\frac{g - g''}{\sqrt{g}}\right)_i R'_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

Dagegen würde der Halbmesser ϱ des in das blosse Auge fallenden Strahlenbündels an derselben Stelle nach (d) der vorhergehenden Nummer den folgenden Werth erhalten:

$$\varrho = \frac{n_I \, c''_I}{g''_I} \varrho_I \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

wonach eine Relation zwischen R'_1 und ϱ oder ϱ_I statt findet.

Bei dem Gebrauche dieser Formel müssen wir jedoch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nämlich im Instrumente eine Hauptblendung angebracht ist oder nicht.

Im ersten Falle bestimmt die Hauptblendung die Lage der Hauptstrahlen im Instrumente und g''_i kann vermittelst der in Nro. 51 gegebenen Formeln berechnet werden. Da ausserdem c''_I nach der vorhergehenden Nummer eine gegebene Grösse ist, so dient die Formel (a) dazu, d oder die Entfernung des Auges vom Instrumente zu berechnen.

Ist ferner ϱ gleich oder grösser als r'_i, so können alle aus dem Instrumente gehende Strahlen ihren Weg ungehindert durch die Pupille des Auges fortsetzen, und R'_1 behält den Werth, welchen es nach der Oeffnung der Hauptblendung hat. Ist dagegen ϱ kleiner als r'_i, so wird ein Theil jener Strahlen durch die Blendung im Auge aufgefangen und daher unwirksam. Um alsdann denjenigen Theil der Strahlen zu bestimmen, welcher in das Auge gelangt, muss man $r'_i = \varrho$ setzen und daraus R'_1 berechnen. Diess giebt den Halbmesser des wirksamen, in das Instrument fallenden Strahlenkegels

$$R'_i = \left(\frac{Vg}{g - g''}\right)_i \varrho = \left(\frac{Vg}{g - g''}\right)_i \frac{n_I c''_I}{g''_I} \varrho_I \quad \text{. (f)}$$

Alle Strahlen, welche in grösseren Entfernungen vom Hauptstrahle in das Instrument fallen, werden von der Blendung im Auge aufgefangen und brauchen daher nicht berücksichtigt zu werden.

Im zweiten Falle, wo keine Hauptblendung im Instrumente angebracht ist, hat dieses eine grössere Oeffnung, als dass alle in dasselbe fallende Strahlen durch die Pupille gehen können; die Lage der Hauptstrahlen hängt daher von der Stellung des Auges ab und die vorhergehenden Gleichungen dienen dazu, diejenigen Constanten zu bestimmen, welche sich auf jene Lage beziehen, wenn dieses nicht auf andere Weise geschieht. In der That ist alsdann die Entfernung des Auges vom Instrumente entweder der Willkühr überlassen und muss durch andere Rücksichten bestimmt werden, oder sie ist als eine gegebene Grösse zu betrachten.

Findet das Erstere statt, so wird durch jene Rücksichten, wie wir in der Folge sehen werden, gewöhnlich K_1 bestimmt, worauf K_i und dann $\frac{1}{g''_i}$ vermittelst (q) von Nro. 4 und (m) von Nro. 51 berechnet werden können, daher die vorhergehenden Formeln auch in diesem Falle Anwendung finden.

Ist dagegen die Entfernung d des Auges vom Instrumente unmittelbar gegeben, so erhält man, da c''_I ebenfalls bekannt ist, vermittelst der Gleichung (a) die Vereinigungsweite der Hauptstrahlen nach der letzten Brechung durch das Instrument, nämlich

$$g''_i = c''_I - d \quad \text{. (g)}$$

Aus der Vereinigungsweite g''_i können sowohl die Constante K_1, von welcher die Lage der Hauptstrahlen abhängt, als die daraus abgeleiteten Constanten K_m auf verschiedene Weise gefunden werden.

Berechnet man nämlich zuerst die sämmtlichen Vereinigungsweiten der allgemeinen Strahlen und der Hauptstrahlen nach einer der Methoden, welche in Nro. 40, 46 und 51 angegeben sind, indem man von den bekannten Werthen von c_1 und g''_i ausgeht, so findet man vermöge (q) von Nro. 51 die sämmtlichen K durch den Ausdruck

$$K_m = \frac{V_m^2}{v_m\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g''}\right)_m} = \frac{V_m^2}{v_{m-1}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c''}\right)_m} \quad . \quad . \quad (h)$$

worin man dem Index m nach und nach alle Werthe von 1 bis i geben muss.

Man kann aber auch vermittelst (h) nur die Grösse K_i berechnen, indem man darin i statt m setzt, wodurch

$$K_i = \frac{V_i^2}{v_i\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{g''}\right)_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

erhalten wird. Die vorhergehenden K giebt hierauf die zweite Formel (h) von Nro. 54, nämlich

$$K_{m-1} = \frac{c_m \, g''_{m-1}}{g_{m-1} \, c''_m} K_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

wenn man dem Index m nach und nach alle Werthe von i bis 2 beilegt.

Eine dritte Methode besteht darin, dass man zuerst nur die Vereinigungsweiten der allgemeinen Strahlen, und dann aus diesen und dem bekannten Werthe von g''_i die Grösse K_i vermittelst der Formel (i) berechnet. Alsdann folgt aus (q) von Nro. 4, durch Verwechselung des dortigen i und m mit m und n:

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= K_i + \Sigma_{\,n\,2}^{\,i} \frac{V_{n-1} V_n d_{n-1}}{v_{n-1}} \\ K_m &= K_1 - \Sigma_{\,n\,2}^{\,m} \frac{V_{n-1} V_n d_{n-1}}{v_{n-1}} \\ &= K_i + \Sigma_{\,n\,m+1}^{\,i} \frac{V_{n-1} V_n d_{n-1}}{v_{n-1}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Endlich muss der Halbmesser des wirksamen, in das Instrument fallenden Strahlenkegels hier ebenfalls nach der Formel (f) berechnet werden.

Da übrigens nach der Annahme die Axen des Instrumentes und des Auges in eine und dieselbe gerade Linie fallen, so können beide zusammengenommen als ein System von sphärischen brechenden Flächen betrachtet werden, worauf die für ein solches System gefundenen Formeln anwendbar sind, wenn man sie auf sämmtliche Flächen im Instrumente und Auge ausdehnt.

Zwischen den Grössen, welche sich auf dieses aus dem Instrumente und Auge zusammengesetzte System und auf jedes von beiden besonders beziehen, finden einige Relationen statt, deren Kenntniss

uns für die Folge nützlich seyn wird. Um sie zu finden, behalte ich für das Instrument und das Auge, abgesondert berechnet, die bisherigen Bezeichnungen bei, gebe dagegen den Grössen, die sich auf beide, als ein zusammengehöriges System betrachtet, beziehen, einen durch das ganze System fortlaufenden Index, wonach die Bezeichnung bei den zum Instrumente gehörigen Flächen ungeändert bleibt, die i^{te} Fläche des Auges dagegen den Index $(i+\mathrm{i})$ erhält.

Drücken wir daher die Grössen, welche sich auf das zusammengesetzte System beziehen, durch solche Grössen aus, welche dem Instrumente oder dem Auge abgesondert zugehören, so ist

$$\left.\begin{array}{l} c_{i+\mathrm{i}} = c_{\mathrm{i}} \\ g_{i+\mathrm{i}} = g_{\mathrm{i}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

Ebenso verhält es sich bei allen ähnlichen Grössen; in Ansehung der Entfernungen der brechenden Flächen von einander ist jedoch eine Bemerkung nothwendig. Oben wurde nämlich die Entfernung der Hornhaut von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes mit d bezeichnet. Diese Entfernung kommt weder bei dem Instrumente, noch bei dem Auge vor, wenn dieselben abgesondert berechnet werden. Sieht man dagegen beide als ein zusammengehöriges System an, so folgt d auf die i^{te} brechende Fläche und muss daher den Index i erhalten. Die darauf folgenden d bleiben bei der allgemeinen Regel. Hiernach ist

$$\left.\begin{array}{l} d_i = d \\ d_{i+\mathrm{i}} = d_{\mathrm{i}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

Zur Bestimmung von $v_{i+\mathrm{i}}$ und $V_{i+\mathrm{i}}$ müssen wir die in (l) von Nro. 4 gegebenen Ausdrücke dieser Grössen zu Hülfe nehmen. Wenden wir den ersten derselben auf das zusammengesetzte System, sodann auf das Instrument und das Auge abgesondert an, so erhalten wir

$$v_{i+\mathrm{i}} = n_1 \ldots\ldots n_i \,.\, n_I \ldots\ldots n_{\mathrm{i}}$$
$$v_i = n_1 \ldots\ldots n_i$$
$$v_{\mathrm{i}} = n_I \ldots\ldots n_{\mathrm{i}}$$

folglich

$$v_{i+\mathrm{i}} = v_i \, v_{\mathrm{i}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

Auf ähnliche Weise giebt der zweite der allegirten Ausdrücke

$$V_{i+\mathrm{i}} = \frac{g_1 \ldots\ldots g_{i-1} \; g_i \; g_I \ldots\ldots g_{\mathrm{i}-1}}{c_2 \ldots\ldots c_i \,.\, c_I \; c_{II} \ldots\ldots c_{\mathrm{i}}}$$
$$V_i = \frac{g_1 \ldots\ldots g_{i-1}}{c_2 \ldots\ldots c_i}$$
$$V_{\mathrm{i}} = \frac{g_I \ldots\ldots g_{\mathrm{i}-1}}{c_{II} \ldots\ldots c_{\mathrm{i}}}$$

folglich

$$V_{i+\mathrm{i}} = \frac{V_i \, g_i \, V_{\mathrm{i}}}{c_I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(p)}$$

Wenn in dem Instrumente entweder keine Hauptblendung vorhanden oder ihr Durchmesser grösser ist, als dass sämmtliche durch sie gehende Strahlen auch durch die Pupille des Auges gelassen werden, so vertritt die letztere die Stelle der Hauptblendung. Die Rechnung kann alsdann auf zweierlei Weise geführt werden.

Wenden wir nämlich die allgemeinen Formeln auf diesen Fall an, so müssen wir

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_j = \zeta_{i+1} = -\,g''_{i+1} = -\,g''_1 \\ \varrho_j = \varrho_{i+1} = \varrho_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (q)$$

setzen, weil die als Hauptblendung betrachtete Pupille hinter der Hornhaut steht, welche die 1^{te} Fläche des Auges und die $(i+1)^{\text{te}}$ Fläche des zusammengesetzten Systems ist.

Hierdurch werden jedoch die Grössen, welche sich auf das Instrument beziehen, von denen des Auges abhängig. Um dieses zu umgehen, dürfen wir nur an derjenigen Stelle, wo die aus dem Instrumente in das Auge fallenden Hauptstrahlen sich schneiden, eine Blendung angebracht denken, welche den Halbmesser ϱ hat, und dieselbe als Hauptblendung ansehen. Dass der Durchschnittspunkt jener Hauptstrahlen ein eingebildeter ist, thut zur Sache nichts, da der Zweck dieser Annahme nur ist, die Lage der Strahlen zu bestimmen, welches ebensogut durch ihre Verlängerungen, als durch die wirklich zu Stande kommenden Strahlen geschehen kann. Da hiernach die eingebildete Hauptblendung hinter der i^{ten} Fläche des Instrumentes liegt, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_j = \zeta_i = -\,g''_i \\ \varrho_j = \varrho_i = \varrho \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (r)$$

Vermittelst dieser Werthe verwandeln sich die allgemeinen Formeln zur Berechnung von R'_1 und K_m in diejenigen, welche oben gefunden und mit (f), (i), (k) und (l) bezeichnet wurden.

Verbindung des Auges mit den Instrumenten, wenn die Axe des ersteren jedesmal nach dem Hauptstrahle gerichtet ist.

63) Die in der vorhergehenden Nummer gemachte Voraussetzung, dass sich das Auge bei dem Gebrauche optischer Instrumente unveränderlich in der Axe derselben befindet, ist, strenge genommen, nicht diejenige, welche der Natur entspricht. Die Erfahrung zeigt nämlich, wie wir bereits in Nro. 61 bemerkt haben, dass das Auge bei unveränderter Lage seiner Axe nur ein sehr kleines Gesichtsfeld deutlich sieht und sich daher successiv nach den verschiedenen Punkten eines Gegenstandes richtet, welchen es betrachten will. Man wird daher richtigere Resultate erhalten, wenn man annimmt, dass das Auge bei dem Gebrauche optischer Werkzeuge zwar in einerlei Entfernung von der letzten brechenden Fläche bleibt, dagegen bei Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes seine

Axe so richtet, dass sie mit dem, jenem Punkte entsprechenden Hauptstrahle zusammenfällt. Untersuchen wir daher, welche Aenderungen diese Hypothese in den vorhergehenden Resultaten hervorbringt.

Wir haben am angeführten Orte gesehen, dass sich das Auge um einen etwas mehr als 5 Linien hinter der Hornhaut liegenden Punkt dreht, wenn seine Axe eine veränderte Richtung annimmt. Für diejenige Lage des Auges, in welcher seine Axe mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, bezeichne ich nun mit

o die auf der Axe gemessene Entfernung des Umdrehungspunktes von der Hornhaut, *vor* derselben angenommen.

Soll jetzt das Auge in eine solche Lage gebracht werden, dass seine Axe nach dem Hauptstrahle gerichtet ist, welcher mit der Axe des Instrumentes den Winkel $\overset{''}{\omega_i}$ macht, so muss es sich um den angegebenen Punkt so weit drehen, dass die neue Lage seiner Axe mit der ursprünglichen denselben Winkel $\overset{''}{\omega_i}$ einschliesst. Hierdurch beschreibt der Scheitel der Hornhaut einen Kreisbogen, dem jener Winkel am Mittelpunkte zugehört und dessen Halbmesser *o* ist. Die parallel mit der Axe des Instrumentes gemessene Entfernung jenes Scheitels von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes, welche anfänglich *d* war, erleidet daher eine Veränderung. Nennen wir

(*d*) den durch die Umdrehung des Auges veränderten Werth von *d*,

so ist

$$(d) = d - o\,(1 - \cos \overset{''}{\omega_i})$$

Drückt man $(1 - \cos \overset{''}{\omega_i})$ durch $tg\,\overset{''}{\omega_i}$ aus und vernachlässigt die Potenzen, welche die zweite übersteigen, so ist

$$1 - \cos \overset{''}{\omega_i} = \frac{tg^2 \overset{''}{\omega_i}}{2}$$

folglich

$$(d) = d - \frac{o\,tg^2 \overset{''}{\omega_i}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Da $tg\,\overset{''}{\omega_i}$ der Grösse φ_1 proportional ist und die Potenzen der letzteren in den Gliedern der ersten Ordnung vernachlässigt werden, so fällt das zweite Glied hier weg und die Folge wird zeigen, dass es unter diejenigen gehört, welche selbst bei den höheren Ordnungen nicht beibehalten werden. Hiernach ist die Entfernung des Scheitels der Hornhaut von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes bei allen Lagen des Auges $= d$, mithin unveränderlich.

Die Umdrehung des Auges ist jedoch nicht immer hinreichend, um die Richtung desselben nach dem Hauptstrahle zu bewirken, und es müssen hierbei eben so wie bei der vorhergehenden Untersuchung die beiden Fälle unterschieden werden, je nachdem im Instrumente eine Hauptblendung angebracht ist oder nicht. Im ersteren Falle ist die Lage des Hauptstrahles durch die Hauptblendung des Instrumentes vollkommen bestimmt. Die Umdrehung des Auges bewirkt

aber weiter nichts, als dass seine Axe eine parallele Lage mit dem Hauptstrahle erhält, ohne mit ihm zusammen zu fallen; soll daher dieses geschehen, so muss das Auge ausser der Umdrehung noch eine kleine fortschreitente Bewegung in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene und, mit Berücksichtigung der Glieder von höheren Ordnungen, auch noch eine zweite parallel mit der Axe des Instrumentes machen, damit der Durchschnittspunkt der in das Auge fallenden Hauptstrahlen, welcher durch die Umdrehung verrückt wurde, wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Alsdann erhält das Auge die Strahlen auf dieselbe Weise, wie es geschehen würde, wenn es ohne Gebrauch eines Instrumentes nach einem Punkte des Gegenstandes gerichtet wäre. Die durch die Formel (a) der vorhergehenden Nummer bestimmte Entfernung des Auges vom Instrumente ist daher auch hier die vortheilhafteste, und die daraus abgeleitete Formel (c) bleibt ungeändert.

Was den Werth von R'_1 betrifft, welcher gebraucht werden muss, wenn die Hauptblendung des Instrumentes eine grössere Oeffnung hat, als dass die durch dieselbe gehenden Strahlen zugleich durch die Pupille des Auges gelassen werden, so können wir uns leicht überzeugen, dass die in (f) der vorhergehenden Nummer gefundene Formel zur Berechnung dieses Werthes auch im vorliegenden Falle anwendbar ist. Da nämlich die Stelle, an welcher die aus dem Instrumente gehenden Hauptstrahlen sowohl, als die bei unverändertem Auge in dasselbe fallenden, sich durchschneiden, nach der Bewegung des Auges ungeändert bleibt, so sind die daselbst in (d) und (e) erhaltenen Werthe von r'_1 und ϱ hier ebenfalls richtig. Lägen nun diese beiden Halbmesser in einer und derselben Ebene, so könnten ihre Werthe unmittelbar einander gleich gesetzt werden; die Ebene, in welcher sich r'_1 befindet, steht aber senkrecht auf der Axe des Instrumentes, diejenige dagegen, in welcher ϱ liegt, senkrecht auf der Axe des Auges. Der Winkel zwischen beiden Ebenen ist daher $= \omega''_1$ und es würden, wenn man einen jener Halbmesser auf die Ebene des andern reducirte, Glieder von der Ordnung $tg^2 \omega''_1$ entstehen. Da aber solche Glieder bei der gegenwärtigen Untersuchung, wo bloss von denen der ersten Ordnung die Rede ist, vernachlässigt werden, so ist es gestattet, die in (d) und (e) erhaltenen Werthe unmittelbar einander gleich zu setzen, wodurch die Formel (f) entsteht, welche daher hier ebenfalls gebraucht werden kann.

Im zweiten Falle, wo keine Hauptblendung im Instrumente vorhanden ist, wird das Auge durch nichts veranlasst, ausser der Umdrehung auch noch eine fortschreitende Bewegung in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene oder parallel mit der Axe vorzunehmen; eine solche Bewegung ist sogar unmöglich, wenn das Instrument fest mit dem Kopfe verbunden ist, wie diess bei den Brillen stattfindet. Alsdann ist in jeder Lage des Auges

derjenige Strahl der Hauptstrahl, welcher mit der Axe des Auges zusammenfällt. Da sich nun dasselbe bloss um seinen Umdrehungspunkt dreht, wenn es sich nach den verschiedenen Hauptstrahlen richtet, da ferner die Lage der letzteren allein durch das Auge bestimmt wird, so folgt hieraus, dass sich in diesem Falle alle in das Auge fallende Hauptstrahlen in seinem Umdrehungspunkte schneiden, insofern bei den verschiedenen Lagen des Auges jedesmal nur derjenige berücksichtigt wird, der mit seiner Axe zusammenfällt, sowie wir es bereits am Ende von Nro. 61 bemerkt haben.

In den Formeln (c), (g), (h) und (i) der vorhergehenden Nummer bezeichneten g''_{i} und c''_{I} die Entfernungen des Durchschnittspunktes der in das Auge fallenden Hauptstrahlen von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes und von der Hornhaut; da also im vorliegenden Falle dieser Durchschnittspunkt mit dem Umdrehungspunkte des Auges zusammenfällt, so sind jene Grössen nunmehr die Entfernungen des Umdrehungspunktes von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes und von der Hornhaut. Die übrigen g''_{m} und c''_{m} werden alsdann vermittelst der Formeln von Nro. 51 erhalten, indem man von dem als bekannt angenommenen Werthe von g''_{i} ausgeht.

Um den Halbmesser R'_1 des in das Instrument fallenden Strahlenbündels zu finden, müssen wir bemerken, dass die Formeln (d) und (e) der vorhergehenden Nummer die Halbmesser r'_{i} und ϱ an derjenigen Stelle angeben, wo sich die in das Auge fallenden Hauptstrahlen durchschneiden würden, wenn dasselbe seine Lage ungeändert beibehielte. Bei der Umdrehung des Auges beschreibt dieser Durchschnittspunkt zwar einen Kreisbogen, seine Entfernung von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes wird aber hierdurch nach demjenigen, was oben in Bezug auf *d* gezeigt wurde, nur um eine zu vernachlässigende Grösse der zweiten Ordnung geändert, so dass sie als unveränderlich angenommen werden kann. Da nun die allegirten Formeln bloss von der Entfernung der Stelle, an welcher die Halbmesser bestimmt werden sollen, und keineswegs von der Lage der Hauptstrahlen abhängen, so sind sie auch hier anwendbar. Schliessen wir nun auf ähnliche Weise, wie im vorhergehenden Falle, so erhalten wir das Resultat, dass wir die Werthe von r'_{i} und ϱ ebenso wie dort einander gleich setzen, mithin R'_1 nach der Formel (f) der vorhergehenden Nummer berechnen können. Nur dürfen in derselben g''_{i} und c''_{I} nicht auf den Umdrehungspunkt des Auges bezogen werden, so wie es bei den Formeln (c), (g), (h) und (i) geschehen ist; vielmehr bezeichnen jene Grössen die von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes und von der Hornhaut an gezählten Entfernungen desjenigen Punktes, in welchem sich die in das Auge fallenden Hauptstrahlen durchschneiden würden, wenn dasselbe seine Lage ungeändert beibehielte.

In manchen Fällen ist es der Deutlichkeit wegen nicht möglich, dem Instrumente an der Stelle, wo sich das Auge befindet, eine so grosse Oeffnung zu geben, als es nach der Oeffnung der Pupille und wegen der oben erwähnten Umdrehung des Auges erforderlich wäre. Es ist alsdann nothwendig, vor das Auge eine Blendung von geringerer Oeffnung zu stellen, welche als die im Instrumente angebrachte Hauptblendung zu betrachten ist, daher die für diesen Fall oben entwickelten Formeln hier Anwendung finden.

Vergrösserung.

64) Die meisten optischen Instrumente sind dazu bestimmt, die Gegenstände vergrössert darzustellen; es ist daher von Wichtigkeit, die Vergrösserung berechnen zu können, welche durch ein Instrument hervorgebracht wird.

Beschäftigen wir uns zuerst mit den Instrumenten der ersten Art, bei welchen von dem Gegenstande ein wirkliches Bild auf der Projectionsebene entworfen wird, und vergleichen wir die Grösse dieses Bildes mit der Grösse des Gegenstandes. Wir haben bereits in Nro. 47 gesehen, dass das Bild ohne Rücksicht auf die Abweichungen dem Gegenstande ähnlich ist; zu jener Vergleichung reicht es daher hin, zwei correspondirende Linien in beiden zu bestimmen, wozu wir die zusammengehörigen Ordinaten eines beliebigen Punktes des Gegenstandes und des Bildes wählen wollen. Nach (b) und (c) der allegirten Nummer ist die Ordinate eines Punktes des Gegenstandes

$$y = c_1 \varphi_1 \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

die Ordinate des dazu gehörigen Bildes dagegen

$$y_i = \frac{V_i \, g_i \, \varphi_1}{v_1} \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

Nennt man nun

v_i' diejenige Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal grösser das Bild als der Gegenstand ist, und welche die *absolute Vergrösserung* genannt werden kann,

so wird diese Zahl durch die Division von y in y_i erhalten. Die vorhergehenden Ausdrücke von y und y_i geben daher

$$v_i' = \frac{y_i}{y} = \frac{V_i \, g_i}{v_i \, c_1} \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

In manchen Fällen ist es jedoch zweckmässig, die Vergrösserung bei den Instrumenten der ersten Art nicht allein nach der absoluten Vergrösserung des Bildes oder nach der Zahl v_i' zu schätzen. Wenn nämlich das Auge das von dem Instrumente entworfene Bild in einer anderen Entfernung betrachtet, als es den Gegenstand ohne den Gebrauch des Instrumentes betrachten würde, so hat diese verschie-

dene Entfernung Einfluss auf die scheinbare Grösse von beiden. Es entsteht daher die Frage, wie die Vergrösserung bestimmt werden kann, wenn sie nicht nach der absoluten Grösse des Gegenstandes und des Bildes, sondern nach der scheinbaren Grösse derselben geschätzt wird. Zu diesem Ende seyen

$(c)_1$ die Entfernung, in welcher das Auge den Gegenstand ohne Instrument betrachten würde,

$(c)_I$ die Entfernung, in welcher das Auge das von dem Instrumente entworfene Bild betrachtet, beide von dem Durchschnittspunkte der in das Auge fallenden Hauptstrahlen an gezählt,

v_i die Zahl, welche ausdrückt, wievielmal grösser das Bild dem Auge erscheint, als der Gegenstand, und welche die *scheinbare Vergrösserung* genannt werden kann.

Denken wir uns nun an der Stelle des Gegenstandes einen ihm ähnlichen, v_i mal vergrösserten Gegenstand, welcher mit jenem eine parallele Lage hat und mit blossem Auge in der Entfernung $(c)_1$ betrachtet wird; nennen wir ferner

(ψ) und (y) die Polarcoordinaten eines beliebigen Punktes dieses hypothetischen Gegenstandes,

(ω) den Winkel, welchen der von dem Endpunkte der Polarordinate (y) in das Auge fallende Hauptstrahl mit der Axe macht,

ψ_i, y_i und $(\omega)_i$ dieselben Grössen in Bezug auf das von dem Instrumente entworfene Bild,

so ist für den hypothetischen Gegenstand

$$\left.\begin{aligned} (y) &= v_i y = v_i c_1 \varphi_1 \\ tg(\omega) &= \frac{(y)}{(c)_1} = \frac{v_i c_1 \varphi_1}{(c)_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Für das von dem Instrumente entworfene Bild dagegen ist

$$\left.\begin{aligned} y_i &= \frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i} \\ tg(\omega)_i &= \frac{y_i}{(c)_I} = \frac{V_i g_i \varphi_1}{v_i (c)_I} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Soll das von dem Instrumente entworfene Bild dem Auge ebenso erscheinen, wie der hypothetische Gegenstand, so müssen die von den correspondirenden Punkten derselben ausgehenden Hauptstrahlen nach einerlei Richtungen in das Auge fallen, wodurch die Gleichungen entstehen

$$(\psi) = \psi_i$$
$$tg(\omega) = tg(\omega)_i$$

Die erste derselben wird wegen der Aehnlichkeit des hypothetischen Gegenstandes mit dem wirklichen und mit dem Bilde und wegen ihrer ähnlichen Lage von selbst erfüllt. Die zweite Gleichung dient zur Bestimmung von v_i. Substituirt man nämlich darin statt

$tg(\omega)$ und $tg(\omega)_i$ die in (d) und (e) gefundenen Werthe, so folgt daraus die scheinbare Vergrösserung

$$v_i = \frac{V_i\, g_i\, (c)_1}{\nu_i\, c_1\, (c)_I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

ferner durch die Vergleichung dieser Formel mit (c)

$$v_i = \frac{(c)_1}{(c)_I}\, v_i' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(g)}$$

Bei den Instrumenten der zweiten Art, bei welchen die Strahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das hinter denselben befindliche Auge fallen, müssen wir zur Bestimmung der Vergrösserung die Lage der aus dem Instrumente gehenden Hauptstrahlen mit der Lage derjenigen vergleichen, welche dem hypothetischen Gegenstande zugehören, indem hier bloss von der scheinbaren Vergrösserung die Rede seyn kann.

Nach der früher gebrauchten Bezeichnung ist

ω_i'' der Winkel, welchen der Hauptstrahl nach der letzten Brechung durch das Instrument mit der Axe macht,

ψ_i der Winkel, welchen die Ebene des Hauptstrahles mit der durch die Axe des Instrumentes und den Ursprung der (ψ) gelegten Ebene macht.

Der erstere Winkel ist durch die Gleichung (k) von Nro. 53 gegeben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega_i'' &= \frac{V_i\,\varphi_1}{\nu_i}\left[1 - \frac{\nu_i\, K_i}{V_i^2\, g_i}\right] = \\ &= \frac{V_i}{\nu_i}\left(\frac{g}{g - g''}\right)_i \varphi_1 = -\frac{Y_1''}{V_i''\, g_i''} = -\frac{Y_i''}{g_i''} \end{aligned}\right\} \quad \text{(h)}$$

Für den hypothetischen Gegenstand haben wir dagegen in (d) gefunden

$$tg(\omega) = \frac{\nu_i\, c_1\, \varphi_1}{(c)_1}$$

Sollen nun die Hauptstrahlen nach der letzten Brechung ebenso in das Auge fallen, als wenn sie von dem hypothetischen Gegenstande ausgiengen, so muss, wie in dem vorhergehenden Falle,

$$(\psi) = \psi_i$$
$$tg(\omega) = tg\,\omega_i''$$

seyn.

Die erste dieser Gleichungen wird von selbst erfüllt; die zweite giebt, wenn man statt $tg(\omega)$ und $tg\,\omega_i''$ die vorhergehenden Werthe substituirt, die scheinbare Vergrösserung:

$$\left.\begin{aligned} v_i &= \frac{(c)_1\, tg\,\omega_i''}{c_1\,\varphi_1} = \frac{V_i\,(c)_1}{\nu_i\, c_1}\left[1 - \frac{\nu_i\, K_i}{V_i^2\, g_i}\right] = \\ &= \frac{V_i\,(c)_1}{\nu_i\, c_1}\left(\frac{g}{g - g''}\right)_i = -\frac{(c)_1\, Y_1''}{c_1\, V_i''\, g_i''\,\varphi_1} = -\frac{(c)_1\, Y_i''}{c_1\, g_i''\,\varphi_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{(i)}$$

worin statt

$$\frac{\overset{''}{Y}_1}{\varphi_1} \text{ und } \frac{\overset{''}{Y}_i}{\varphi_1}$$

ihre Werthe

$$\frac{\overset{''}{Y}_1}{\varphi_1} = K_1$$

$$\frac{\overset{''}{Y}_i}{\varphi_1} = \frac{K_i}{V_i}$$

substituirt werden können.

Hierbei müssen wir bemerken, dass der in (f) für die Instrumente der ersten Art gefundene Ausdruck der scheinbaren Vergrösserung alle Fälle in sich begreift. Setzt man nämlich in demselben zuerst $(c)_I = (c)_1$, so entsteht daraus derjenige, welchen wir in (c) für die absolute Vergrösserung erhalten haben. Dieses ist auch daraus ersichtlich, dass man die letztere als diejenige scheinbare Vergrösserung ansehen kann, welche stattfindet, wenn der Gegenstand und das Bild in gleichen Entfernungen betrachtet werden. Ferner verwandelt sich die Formel (f) in die den Instrumenten der zweiten Art entsprechende Formel (i), wenn man in der ersteren statt $(c)_I$ den für diese Instrumente gültigen Werth aus (c) von Nro. 62 substituirt. In der That können die letzteren Instrumente auch als Instrumente der ersten Art betrachtet werden, bei denen das Auge das letzte Bild von dem Durchschnittspunkte der Hauptstrahlen aus betrachtet. Mit diesen Modificationen ist daher die Formel (f) auf alle Instrumente anwendbar.

Da gut organisirte Augen bei Parallelstrahlen deutlich sehen, so werden die Instrumente der zweiten Art meistens unter der Voraussetzung berechnet, dass

$$(c)_I = g_i = \infty$$

ist. Unter dieser Voraussetzung wird

$$v_i = \frac{V_i\,(c)_1}{\nu_i\, c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (k)$$

Bei den gebräuchlichsten Instrumenten ist $\nu_i = 1$, weil sich vor und hinter denselben Luft befindet. Ausserdem setzt man bei Fernröhren gewöhnlich

$$(c)_1 = c_1$$

wodurch

$$v_i = V_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

wird. In Bezug auf die Microscope hingegen kann das letztere nicht geschehen, weil bei denselben c_1 meistens so klein ist, dass man die Gegenstände in dieser Entfernung mit blossem Auge nicht deutlich sehen kann. In diesem Falle muss für $(c)_1$ diejenige Entfernung gesetzt werden, in welcher das Auge kleine Gegenstände am deutlichsten sieht und welche die *Weite des deutlichen* Sehens genannt wird. Bei gut organisirten Augen nimmt man sie gewöhnlich zu 8 Zoll an.

Vermittelst der oben gefundenen Werthe kann v_i durch die mit Parenthesen bezeichneten Grössen ausgedrückt werden. Substituirt man nämlich in (f) statt $\frac{V_i g_i'}{v_i c_1}$ seinen Werth aus (c) von Nro. 46, so wird

$$v_i = \frac{(c)_1}{(c)_I (2i, 1')} = \frac{(c)_1}{(c)_I [(2i, 2) c_1 + (2i, 3)]} \quad \text{(m)}$$

Bei den Instrumenten der zweiten Art ist

$$(c)_I = g_i - \overset{''}{g_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

und kann daher nach Nro. 46 und 51 ebenfalls durch die erwähnten Grössen ausgedrückt werden.

Für Augen, welche bei Parallelstrahlen deutlich sehen, ist

$$g_i = \infty$$

mithin vermöge (a) von Nro. 46

$$\left.\begin{aligned}(c)_I = g_i &= \frac{n_i (2i-1, 1')}{(2i, 1')} = \\ &= \frac{n_i (2i-1, 2) c_1 + (2i-1, 3)}{(2i, 2) c_1 + (2i, 3)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

folglich, wenn man diesen Werth in (m) substituirt,

$$v_i = \frac{(c)_1}{n_i (2i-1, 1')} = \frac{(c)_1}{n_i [(2i-1, 2) c_1 + (2i-1, 3)]} \quad \text{(p)}$$

Bei Fernröhren ist

$$c_1 = (c)_1 = \infty$$

der vorhergehende Ausdruck wird daher

$$v_i = \frac{1}{n_i (2i-1, 2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(q)}$$

Ist die Hauptblendung an der ersten brechenden Fläche angebracht, so ist

$$\overset{''}{c_1} = \zeta_1 = 0$$

Da sich nun g_i in $\overset{''}{g_i}$ verwandelt, wenn man darin c_1 mit $\overset{''}{c_1}$ verwechselt, so folgt aus (o) mit Rücksicht auf den vorhergehenden Werth von $\overset{''}{c_1}$

$$\overset{''}{g_i} = \frac{(2i-1, 3)}{(2i, 3)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(r)}$$

Substituirt man daher in (n) statt g_i und $\overset{''}{g_i}$ ihre Werthe aus (o) und (r), bemerkt man ferner, dass vermöge der zweiten Formel (b) von Nro. 42

$$(2i, 2)(2i-1, 3) - (2i, 3)(2i-1, 2) = -v_{i-1}$$

ist, so wird

$$(c)_I = \frac{v_i c_1}{(2i, 3) [(2i, 2) c_1 + (2i, 3)]} \quad \ldots\ldots \quad \text{(s)}$$

Hierdurch entsteht für diesen Fall aus (m) der Ausdruck

$$v_i = \frac{(c)_1 \, (2i, 3)}{\nu_i \, c_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

welcher für alle Werthe von c_1 und g_i gültig ist.

Wir können bei den Instrumenten der zweiten Art die durch dieselben hervorgebrachte scheinbare Vergrösserung mit der absoluten Vergrösserung vergleichen, welche bei dem auf der Netzhaut entstehenden Bilde stattfindet. Die erstere ist vermöge (i), wenn man darin statt $(g - \overset{\prime\prime}{g})_i$ seinen Werth $(c - \overset{\prime\prime}{c})_I$ aus (c) von Nro. 62 substituirt,

$$v_i = \frac{V_i \, (c)_1 \, g_i}{\nu_i \, c_1 \, (c - \overset{\prime\prime}{c})_I},$$

die letztere dagegen folgt aus (c) durch Verwechselung von i mit $(i + 1)$, sie ist mithin

$$v'_{i+1} = \frac{V_{i+1} \, g_{i+1}}{\nu_{i+1} \, c_1}$$

Durch Substitution der in (m), (o) und (p) von Nro. 62 gegebenen Werthe verwandelt sich dieser Ausdruck in den folgenden:

$$v_{i+1} = \frac{V_i \, g_i \, V_i \, g_i}{\nu_i \, \nu_i \, c_I \, c_1}$$

Die Vergleichung der vorhergehenden Werthe von v_i und v'_{i+1} giebt

$$v_{i+1} = \frac{V_i \, g_i \, (c - \overset{\prime\prime}{c})_I}{\nu_i \, (c)_1 \, c_I} \, v_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (u)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die absolute Vergrösserung des Bildes auf der Netzhaut der durch das Instrument hervorgebrachten scheinbaren Vergrösserung proportional ist, da, wie wir in Nro. 61 gesehen haben, alle Grössen, welche in dem Factor vor v_i vorkommen, bei einerlei Auge als constant zu betrachten sind.

Der vorhergehenden Vergleichung liegt zwar die Voraussetzung zu Grund, dass sich das Auge unverändert in der Axe des Instrumentes befindet, wir können uns jedoch leicht überzeugen, dass das gefundene Resultat auch dann noch seine Richtigkeit behält, wenn angenommen wird, dass sich das Auge bei der Betrachtung eines jeden Punktes stets nach dem ihm entsprechenden Hauptstrahle richtet. Denken wir uns nämlich das auf der Netzhaut entstehende Bild in unzählig viele Theile getheilt, so wird jeder derselben, wenn er betrachtet werden soll, mit seinem Mittelpunkte in die Axe des Auges gebracht, wodurch sich seine Grösse nicht abändert, wenn die Abweichungen, wie es hier geschieht, nicht berücksichtigt werden. Sehen wir daher die Summe jener einzelnen nach und nach in die Axe des Auges gebrachten Theile als das auf der Netzhaut entstehende Bild an, so hat dieses dieselbe Grösse, welche es erhalten würde, wenn das Auge seine Stellung unverändert beibehielte.

Lichtstärke.

65) Die Lichtstärke eines Instrumentes hängt bei übrigens gleichen Umständen von der Menge der Lichtstrahlen ab, welche von dem Gegenstande in das Instrument fallen. Um diese zu bestimmen, müssen wir zuerst untersuchen, wie gross die Menge der Lichtstrahlen ist, die von einem beliebigen Punkte des Gegenstandes ausgehen und ein Element der ersten brechenden Fläche von willkührlicher Lage treffen.

Zu diesem Ende nehme ich die in (a) von Nro. 39 gefundene Gleichung des einfallenden Strahles wieder vor, und da das Resultat, welches wir suchen, von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig ist, so verlege ich den Ursprung der Coordinaten in den leuchtenden Punkt, dessen Coordinaten bei dem bisherigen Ursprunge

$$x = 0$$
$$y = b_1 = c_1 \varphi_1$$
$$z = c_1$$

waren. Hierdurch verwandeln sich die dortigen Grössen x, $(y - c_1 \varphi_1)$, $(z - c_1)$ in x, y, z. Nennen wir ausserdem

X, Y, Z die Coordinaten des Einfallspunktes auf der ersten brechenden Fläche,

so ist nach der früheren Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} X &= X'_1 \\ Y &= Y'_1 + (K_1 - c_1)\varphi_1 \\ Z &= -c_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

und die allegirte Gleichung nimmt die Gestalt an

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Der beständige Werth von Z zeigt, dass die brechende Fläche mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnungen als eine Ebene zu betrachten ist. Ferner werden bei den Grössen der ersten Ordnung die Potenzen und Producte von X'_1, Y'_1 und φ_1 vernachlässigt; dasselbe gilt daher auch von X und Y.

Denken wir uns die erste brechende Fläche in unendlich kleine Elemente getheilt, so sind diese rechtwinkelige Parallelogramme, deren Seiten dX und dY sind, und deren Inhalt durch $dXdY$ ausgedrückt wird. Legen wir sodann durch die Seiten eines solchen Elementes und den leuchtenden Punkt vier Ebenen, so wird dadurch eine Pyramide gebildet, welche alle Lichtstrahlen enthält, die von dem leuchtenden Punkte auf das Element fallen. Um ihre Menge zu bestimmen, müssen wir mit dem Halbmesser $= 1$ eine Kugelfläche um den leuchtenden Punkt beschrieben denken. Die Seitenflächen der Pyramide schneiden von dieser Kugelfläche ein sphärisches Viereck ab, dessen Seiten den Winkeln jener Seitenflächen an der

Spitze der Pyramide, und dessen Winkel den Neigungswinkeln zwischen den Seitenflächen gleich sind. Nehmen wir zuerst an, dass sich das Licht von dem leuchtenden Punkte gleichförmig nach allen Richtungen verbreitet, so ist die Menge desselben, welche auf das Element $dX\,dY$ fällt, dem Inhalte des sphärischen Vierecks proportional. Berechnen wir daher diesen Inhalt. Zu dem Ende seyen

ξ, υ die Seiten des sphärischen Vierecks, welche dX und dY entsprechen,

θ der von ihnen eingeschlossene Winkel.

Demjenigen Punkte der brechenden Fläche, in welchem die Seiten des Elementes dX und dY zusammenstossen, gehören die Coordinaten X, Y, Z an; dem zweiten Endpunkte der Seite dX dagegen die Coordinaten $(X+dX)$, Y, Z. Werden durch diese beiden Punkte und den leuchtenden Punkt zwei gerade Linien gelegt, so sind dieselben mit den an jenen Stellen einfallenden Strahlen einerlei. Die Gleichung der ersteren Linie ist daher die Gleichung (b).

Die Gleichung der zweiten Linie erhält man hieraus, wenn man statt X, Y, Z die Coordinaten des anderen Endpunktes substituirt. Bezeichnet man daher diese Gleichung durch

$$\frac{x}{X_,} = \frac{y}{Y_,} = \frac{z}{Z_,} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} X_, &= X + dX \\ Y_, &= Y \\ Z_, &= Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Der Winkel zwischen den Linien (b) und (c) ist die gesuchte Seite ξ des sphärischen Vierecks; diese wird mithin durch den bekannten Ausdruck erhalten:

$$\sin \xi = \frac{\sqrt{(X_, Y - X Y_,)^2 + (Y_, Z - Y Z_,)^2 + (Z_, X - Z X_,)^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,\sqrt{X_,^2 + Y_,^2 + Z_,^2}} \quad (e)$$

Da der Winkel ξ unendlich klein ist, so kann man seinen Sinus mit dem Bogen verwechseln. Substituirt man ferner statt $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ die in (d) angegebenen Werthe und vernachlässigt die Potenzen und Producte von X, Y, $X_,$ und $Y_,$, so wird

$$\xi = -\frac{dX}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Da die Gleichungen (b) und (c) in Bezug auf X und Y symmetrisch sind, so erhält man die zweite Seite υ aus der vorhergehenden Formel durch blosse Verwechselung von X mit Y, folglich ist

$$\upsilon = -\frac{dY}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

In dem Elemente $dX\,dY$ sind die gegenüberstehenden Seiten gleich; die Formeln (f) und (g) zeigen daher, dass dieses auch bei dem sphärischen Vierecke stattfindet. Zur Berechnung seines Inhaltes ist daher nur noch der Winkel θ erforderlich.

Die Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt und durch dX gelegt werden kann, geht durch die beiden Endpunkte von dX, deren Coordinaten X, Y, Z und $(X + dX)$, Y, Z sind. Bezeichnen wir daher durch

$$\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(h)}$$

die Gleichung jener Ebene und substituiren wir darin statt x, y, z zuerst X, Y, Z, dann $(X + dX)$ Y, Z, so erhalten wir zur Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z = 0$$
$$\mathfrak{X}(X + dX) + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z = 0$$

Sie geben

$$\mathfrak{X} = 0$$
$$\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{Z}} = -\frac{Z}{Y}$$

Wir können daher, da es erlaubt ist, die Coefficienten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, durch jede beliebige Zahl zu multipliciren, dafür die folgenden Werthe annehmen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{X} = 0\\ \mathfrak{Y} = -Z\\ \mathfrak{Z} = Y\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(i)}$$

Die Gleichung der Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt und dY geht, wird aus (h) durch blosse Verwechselung von $\mathfrak{X}$, X und X, mit $\mathfrak{Y}$, Y und Y, erhalten. Nehmen wir daher für jene Gleichung die folgende an,

$$\mathfrak{X}_{,}x + \mathfrak{Y}_{,}y + \mathfrak{Z}_{,}z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(k)}$$

so ist

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{X}_{,} = -Z\\ \mathfrak{Y}_{,} = 0\\ \mathfrak{Z}_{,} = X\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(l)}$$

Den Winkel θ zwischen den Ebenen (h) und (k) giebt der Ausdruck (e), wenn man darin ξ mit θ und die lateinischen Buchstaben mit deutschen verwechselt; folglich ist vermöge der in (i) und (l) gefundenen Werthe und mit Vernachlässigung der Potenzen von X und Y

$$\sin\theta = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(m)}$$

Das sphärische Viereck ist daher ein rechtwinkeliges Parallelogramm und sein Inhalt ist nach den in (f) und (g) erhaltenen Werthen =

$$\xi v = \frac{dX\,dY}{Z^2}$$

Substituirt man hierin statt X, Y und Z ihre Werthe aus (a) und bemerkt, dass K_1, c_1 und φ_1 constant sind, weil die Lage des leuchtenden Punktes und der Hauptblendung als unveränderlich angenommen werden, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von ξv in den folgenden:

$$\xi v = \frac{dX_1'\,dY_1'}{c_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(n)}$$

Nennen wir nun

$\mathfrak{A}$ die Menge der Lichtstrahlen, welche auf der Oberfläche der mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kugel durch die Einheit des Flächenmaasses gehen,

$d\mathfrak{M}$ die Menge derselben, welche durch das sphärische Viereck ξv gehen und auf das Element $d\acute{X}_1\ d\acute{Y}_1$ der ersten brechenden Fläche fallen,

so ist

$$d\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\,\xi v = \frac{\mathfrak{A}\ d\acute{X}_1\ d\acute{Y}_1}{c_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Das Integral dieses Ausdrucks giebt die Menge der von dem leuchtenden Punkte in das Instrument fallenden Strahlen, nämlich

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}}{c_1^2} \int d\acute{X}_1\ d\acute{Y}_1$$

Das Integral muss auf denjenigen Theil der ersten brechenden Fläche ausgedehnt werden, welcher von dem einfallenden Strahlenkegel getroffen wird, $\int d\acute{X}_1\ d\acute{Y}_1$ bezeichnet daher die Fläche desselben.

Nehmen wir die Gestalt der Hauptblendung als kreisförmig an, wie es bei den optischen Instrumenten gewöhnlich der Fall ist, so ist nach (c) von Nro. 57 der erwähnte Theil der ersten brechenden Fläche ein Kreis, dessen Halbmesser = $\acute{R}_1$ ist. Hierdurch wird

$$\int d\acute{X}_1\ d\acute{Y}_1 = \pi\,\acute{R}_1^2$$

folglich

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A}\,\pi\,\acute{R}_1^2}{c_1^2}$$

Alle in $\mathfrak{M}$ enthaltene Strahlen vereinigen sich nach der i^{ten} Brechung in demjenigen Punkte, der das Bild des leuchtenden Punktes ausmacht, die Erleuchtung desselben ist folglich der Grösse $\mathfrak{M}$ und der Intensität des von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Lichtes proportional. Um daher jene Erleuchtung zu finden, braucht man nur $\mathfrak{M}$ mit einem, der Intensität proportionalen Factor $\mathfrak{J}$ zu multipliciren. Hierdurch wird dieselbe =

$$\mathfrak{M}\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}\,\pi\,\acute{R}_1^2\,\mathfrak{J}}{c_1^2}$$

Berechnen wir jetzt die Erleuchtung des ganzen, von dem Gegenstande entstehenden Bildes, und denken wir uns hierbei den Gegenstand als eine kreisförmige Ebene, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und gleichförmig mit leuchtenden Punkten übersäet ist. Jedem dieser Punkte gehört ein Bild zu, dessen Erleuchtung durch $\mathfrak{M}\mathfrak{J}$ ausgedrückt wird; wir müssen daher die Summe der $\mathfrak{M}\mathfrak{J}$ für alle Punkte des Gegenstandes suchen, um die Erleuchtung des ganzen Bildes zu erhalten.

Bestimmen wir die Lage der dem Gegenstande zugehörigen Punkte wie in Nro. 47 durch die Polarcoordinaten ψ_1 und $y = c_1 \varphi_1$, so ist ein Element von der Fläche des Gegenstandes =

$$y\,dy\,d\psi_1 = c_1^2\,\varphi_1\,d\varphi_1\,d\psi_1$$

Nennen wir ferner

$\mathfrak{B}$ die Anzahl der leuchtenden Punkte, die in der Einheit des Flächenmaasses enthalten sind,

$d\mathfrak{L}$ die durch das Flächenelement des Gegenstandes im Bilde hervorgebrachte Beleuchtung,

so ist die Anzahl derjenigen Punkte, welche in jenem Flächenelemente liegen =

$$= \mathfrak{B}\,c_1^2\,\varphi_1\,d\varphi_1\,d\psi_1$$

und da durch jeden dieser Punkte im Bilde die Erleuchtung $\mathfrak{M}\,\mathfrak{J}$ entsteht, so ist $d\mathfrak{L}$ das Product jener beiden Grössen. Wir erhalten daher, wenn wir statt $\mathfrak{M}\,\mathfrak{J}$ den obigen Werth substituiren,

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\pi\,\acute{\mathrm{R}}_1^2\,\mathfrak{J}\,\varphi_1\,d\varphi_1\,d\psi_1$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $\psi_1 = 0$ bis zu $\psi_1 = 2\pi$ und von $\varphi_1 = 0$ bis zu demjenigen Werthe dieser Grösse, welcher der Grenze des Gesichtsfeldes entspricht, so findet man die Erleuchtung, welche von dem ganzen Gegenstande im Bilde hervorgebracht wird, nämlich

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\pi\,\acute{\mathrm{R}}_1^2 \int \mathfrak{J}\,\varphi_1\,d\varphi_1\,d\psi_1$$

Ist der Gegenstand nicht gleichförmig erleuchtet, wie es in der Natur gewöhnlich stattfindet, so ist $\mathfrak{J}$ eine Function von φ_1 und ψ_1. Da jedoch die ungleichförmige Erleuchtung von zufälligen Umständen abhängt, so kann man bei der Construction der Instrumente nicht auf die einzelnen Fälle, sondern nur auf das Mittel aus denselben Rücksicht nehmen, welches die gleichförmige Erleuchtung ist. Nehmen wir daher diese an und ersetzen den Coefficienten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\pi\,\mathfrak{J}$, der sich bei jener Voraussetzung in eine Constante verwandelt, durch den Buchstaben Γ, so wird

$$\mathfrak{L} = \Gamma\pi\,\acute{\mathrm{R}}_1^2\,\varphi_1^2$$

wobei φ_1 den der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechenden Werth dieser Grösse bezeichnet.

Die durch $\mathfrak{L}$ ausgedrückte Beleuchtung ist auf der ganzen Fläche des Bildes gleichförmig verbreitet. Dividiren wir daher $\mathfrak{L}$ durch die Fläche des Bildes, so erhalten wir diejenige Erleuchtung, welche im Bilde auf die Einheit des Flächenmaasses kommt und die *absolute Lichtstärke* genannt werden soll.

Nach (a) von Nro. 47 ist der Halbmesser des Bildes =

$$f_i = \frac{V_i\,g_i\,\varphi_1}{v_i}$$

folglich seine Fläche =

$$\pi f_i^2 = \frac{\pi V_i^2 g_i^2 \varphi_i^2}{v_i^2}$$

Bezeichnen wir daher durch A_i' die absolute Lichtstärke, so ist

$$A_i' = \frac{\mathfrak{L}}{\pi f_i^2} = \frac{\Gamma v_i^2 R_i'^2}{V_i^2 g_i^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (p)$$

Durch das auf diese Weise erhaltene Resultat sind wir in den Stand gesetzt, die Lichtstärke bei den verschiedenen Instrumenten zu berechnen; es ist jedoch auch hier zweckmässig, die beiden Classen derselben abgesondert zu behandeln.

Bei den Instrumenten der ersten Art ist die Formel (p) unmittelbar anwendbar, kann jedoch noch auf verschiedene Arten ausgedrückt werden. Nach (c) von Nro. 64 ist nämlich die absolute Vergrösserung

$$v_i' = \frac{V_i g_i}{v_i c_1}$$

folglich

$$\frac{v_i}{V_i g_i} = \frac{1}{v_i' c_1}$$

und wenn man diesen Werth in (p) substituirt,

$$A_i' = \frac{\Gamma R_1'^2}{v_i'^2 c_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (q)$$

Ferner ist vermöge (c) von Nro. 57

$$\frac{R_1'}{V_i} = R_i'$$

wodurch sich der Ausdruck (p) in den folgenden verwandelt:

$$A_i' = \frac{\Gamma v_i^2 R_i'^2}{g_i^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (r)$$

Aus diesen Formeln ist ersichtlich, dass die absolute Lichtstärke bei einerlei Werth von $\frac{v_i}{V_i}$ der Grösse $\left(\frac{R_1'}{g_i}\right)^2$, bei einerlei Werth von v_i' der Grösse $\left(\frac{R_1'}{c_1}\right)^2$ und bei einerlei Werth von v_i der Grösse $\left(\frac{R_i'}{g_i}\right)^2$ proportional ist.

Die Instrumente der zweiten Art lassen eine andere Bestimmung der Lichtstärke zu, indem man nämlich diese mit derjenigen vergleicht, welche bei blossem Auge stattfindet. Da uns die letztere durch die Erfahrung bekannt ist, so giebt sie einen genauen Maassstab für die durch das Instrument erhaltene Lichtstärke ab, wodurch diese Methode hier den Vorzug verdient. Berechnen wir daher zuerst die absolute Lichtstärke für den Fall, dass das Auge sich unverändert in der Axe des Instrumentes befindet und dass beide als ein zusammengehöriges System von brechenden Flächen betrachtet werden.

Die Formel (p) giebt für diesen Fall, wenn man den Index i mit $(i+1)$ verwechselt,

$$\Lambda'_{i+1} = \frac{\Gamma\, v_{i+1}^2\, \acute{R}_1^2}{V_{i+1}^2\, g_{i+1}^2}$$

Vermöge (m), (o) und (p) von Nro. 62 ist aber

$$v_{i+1} = v_1\, v_i$$

$$V_{i+1} = \frac{V_1\, g_1\, V_i}{c_I}$$

$$g_{i+1} = g_i$$

folglich

$$\Lambda'_{i+1} = \frac{\Gamma\, v_1^2\, v_i^2\, \acute{R}_1^2\, c_I^2}{V_1^2\, g_1^2\, V_i^2\, g_i^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(s)}$$

Der hier gefundene Werth von Λ'_{i+1} drückt die absolute Lichtstärke aus, welche auf der Netzhaut stattfindet, wenn das Auge den Gegenstand durch das Instrument betrachtet. Zu der beabsichtigten Vergleichung müssen wir daher noch den Werth von Λ'_1 suchen, der sich auf das blosse Auge bezieht. Wir erhalten denselben aus (p) durch Verwechselung des Index 1 und i mit I und 1, nämlich

$$\Lambda'_1 = \frac{\Gamma\, v_1^2\, \acute{R}_I^2}{V_1^2\, g_1^2}$$

Substituiren wir hierin statt $\acute{R}_I$ den in (e) von Nro. 61 gefundenen Werth

$$\acute{R}_I = \left(\frac{c}{c - c''}\right)_I \varrho$$

so wird

$$\Lambda'_1 = \frac{\Gamma\, v_1^2}{V_1^2\, g_1^2} \left(\frac{c}{c - c''}\right)_I^2 \varrho^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(t)}$$

Wir haben in Nro. 61 gesehen, dass die Grösse $\frac{V_1\, g_1}{v_1}\left(\frac{c - c''}{c}\right)_I$ bei allen Entfernungen des Gegenstandes denselben Werth behält. Da nun Γ bei einem und demselben Gegenstande ebenfalls constant ist, so ist die absolute Lichtstärke bei blossem Auge ϱ^2 proportional und hängt daher nur in so weit von der Entfernung des Gegenstandes ab, als der Halbmesser der Pupille, womit der in (d) von Nro. 61 erhaltene Ausdruck von ϱ multiplicirt ist, sich zugleich mit jener Entfernung abändert.

Wir können nunmehr die Lichtstärke bei dem Gebrauche des Instrumentes und bei blossem Auge mit einander vergleichen. Drücken wir nämlich die Lichtstärke, welche bei dem Gebrauche des Instrumentes auf der Netzhaut stattfindet, in aliquoten Theilen der Lichtstärke bei blossem Auge aus, und nennen jene die *relative Lichtstärke*, so wird dieselbe durch die Division von Λ'_1 in Λ'_{i+1} erhalten. Bezeichnet daher

Λ_i die relative Lichtstärke,

so geben die Formeln (s) und (t)

$$\Lambda_i = \frac{\Lambda'_{i+i}}{\Lambda'_i} = \frac{v_i^2\, \acute{R}_1^2\, (c - \overset{\prime\prime}{c})_I^2}{V_i^2\, g_i^2\, \varrho^2}$$

Vermöge (c) von Nro. 62 ist aber

$$(c - \overset{\prime\prime}{c})_I = (g - \overset{\prime\prime}{g})_i$$

folglich

$$\Lambda_i = \frac{v_i^2\, \acute{R}_1^2}{\varrho^2} \left(\frac{g - \overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (u)$$

Die vorhergehende Formel kann ebenso, wie es bei Λ'_i geschehen ist, auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Nach (i) von Nro. 64 ist nämlich die scheinbare Vergrösserung

$$v_i = \frac{V_i\, (c)_1}{v_i\, c_1} \left(\frac{g}{g - \overset{\prime\prime}{g}}\right)_i$$

folglich

$$\left(\frac{g - \overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i = \frac{(c)_1}{v_i\, v_i\, c_1}$$

Hierdurch nimmt der Ausdruck (u) die Gestalt an:

$$\Lambda_i = \frac{(c)_1^2\, \acute{R}_1^2}{v_i^2\, c_1^2\, \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

Ferner haben wir in (d) von Nro. 62 gefunden:

$$\acute{r}_i = \left(\frac{g - \overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i \acute{R}_1$$

Substituiren wir daher den hieraus resultirenden Werth von $\left(\frac{g - \overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i$ in (u), so wird

$$\Lambda_i = \frac{v_i^2\, \acute{r}_i^2}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (w)$$

In diesen Formeln bezeichnet

$\acute{r}_i$ den Halbmesser des aus dem Instrumente gehenden Strahlenbündels an der Stelle, wo sich bei blossem unbewegtem Auge die einfallenden Hauptstrahlen durchschneiden würden,

ϱ den Halbmesser des bei blossem Auge einfallenden Strahlenbündels an derselben Stelle.

In Bezug auf die gewöhnlichen Instrumente, bei welchen $v_i = 1$ ist, geben die vorhergehenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_i &= \frac{\acute{R}_1^2}{\varrho^2} \left(\frac{g - \overset{\prime\prime}{g}}{Vg}\right)_i^2 \\ &= \frac{(c)_1^2\, \acute{R}_1^2}{v_i^2\, c_1^2\, \varrho^2} \\ &= \frac{\acute{r}_i^2}{\varrho^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (x)$$

Ist $\overset{\prime}{r}_i$ grösser als ϱ, so werden die durch das Instrument gehenden Strahlen nicht alle durch die Pupille des Auges gelassen und man muss $\overset{\prime}{r}_i = \varrho$ setzen, um nur die wirksamen Strahlen zu berücksichtigen. In diesem Falle ist daher bei den zuletzt erwähnten Instrumenten $A_i = 1$, oder die durch sie hervorgebrachte Lichtstärke derjenigen gleich, welche bei blossem Auge stattfindet. Aus demselben Grund muss A_i jederzeit $= 1$ gesetzt werden, wenn eine der übrigen Formeln (x) einen grösseren Werth dafür giebt.

Ist dagegen $\overset{\prime}{r}_i$ kleiner als ϱ, so nimmt die relative Lichtstärke in dem quadratischen Verhältnisse beider Halbmesser ab. Hieraus ist ersichtlich, dass bei jenen Instrumenten durch keine Vorrichtung eine grössere Lichtstärke erhalten werden kann, als bei blossem Auge; meistens ist sie sogar bedeutend kleiner, da $\overset{\prime}{r}_i$, vorzüglich bei starken Vergrösserungen, einen sehr kleinen Werth bekommt. Dieses ist auch aus der zweiten Formel (x) ersichtlich, nach welcher sich A_i bei übrigens gleichen Umständen umgekehrt wie das Quadrat der scheinbaren Vergrösserung verhält.

Wird das Instrument für gut organisirte Augen berechnet, welche bei Parallelstrahlen deutlich sehen, so ist

$$g_i = \infty$$

folglich erhalten wir aus der ersten Formel (x)

$$A_i = \frac{\overset{\prime}{R}{}_1^2}{V_i^2 \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (y)$$

Setzt man ausserdem, wie es bei den Fernröhren gewöhnlich ist,

$$(c)_1 = c_1$$

so wird

$$v_i = V_i$$

folglich

$$A_i = \frac{\overset{\prime}{R}{}_1^2}{v_i^2 \varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (z)$$

Befindet sich vor der ersten brechenden Fläche ein Körper, welcher ein grösseres Brechungsvermögen als die Luft besitzt, wie es z. B. der Fall ist, wenn man das Objectiv eines Microscopes in eine Flüssigkeit taucht, um darin befindliche Gegenstände zu betrachten, so wird v_i ein ächter Bruch. Da nun $\overset{\prime}{r}_i$ nie grösser als ϱ werden kann, insofern nur die wirksamen Strahlen berücksichtigt werden, so ist aus (w) ersichtlich, dass alsdann die relative Lichtstärke nie einen grösseren Werth als v_i^2 erhält.

Um die Lichtstärke durch die mit Parenthesen bezeichneten Grössen auszudrücken, ist weiter nichts erforderlich, als in (q) und (v) statt v_1' und v_i ihre Werthe aus (m), (p), (q) und (t) der vorhergehenden Nummer, mit Rücksicht auf die daselbst gemachten Bemerkungen, zu substituiren. Hierdurch wird:

die absolute Lichtstärke

$$A'_i = \frac{\Gamma \acute{R}_1^2 (2i, 1')^2}{c_1^2} = \frac{\Gamma \acute{R}_1^2 [(2i, 2) c_1 + (2i, 3)]^2}{c_1^2} \quad . \quad (A)$$

die relative Lichtstärke

$$A_i = \frac{(c)_I^2 \acute{R}_1^2 (2i, 1')^2}{c_1^2 \varrho^2} = \frac{(c)_I^2 \acute{R}_1^2 [(2i, 2) c_1 + (2i, 3)]^2}{c_1^2 \varrho^2} \quad . \quad (B)$$

Bei den Instrumenten der ersten Art ist $(c)_I$ eine gegebene Grösse, bei den Instrumenten der zweiten Art muss in der vorhergehenden Formel dafür $(g - \overset{\prime\prime}{g})_i$ gesetzt werden.

Für Augen, welche bei Parallelstrahlen deutlich sehen, ist

$$A_i = \frac{n_i^2 \acute{R}_1^2 (2i-1, 1')^2}{c_1^2 \varrho^2} = \frac{n_i^2 \acute{R}_1^2 [(2i-1, 2) c_1 + (2i-1, 3)]^2}{c_1^2 \varrho^2} \quad (C)$$

und wenn ausserdem die Entfernung des Gegenstandes unendlich angenommen wird,

$$A_i = \frac{n_i^2 \acute{R}_1^2 (2i-1, 2)^2}{\varrho^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (D)$$

Ist die Hauptblendung an der ersten brechenden Fläche angebracht, so ist für alle Werthe von c_1 und g_i

$$A_i = \frac{\nu_i^2 \acute{R}_1^2}{\varrho^2 (2i, 3)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (E)$$

Wenn in dem Instrumente kein wirkliches Bild zu Stande kommt, oder wenn eine darin angebrachte Blendung einen zu kleinen Durchmesser hat, um den sämmtlichen Strahlenkegeln ungehinderten Durchgang zu gestatten, so erleiden die erhaltenen Resultate an der Grenze des Gesichtsfeldes eine Modification, welche wir näher untersuchen wollen.

Berechnet man für diejenige Blendung, welche im ersten Falle die Grenze des Gesichtsfeldes bestimmt, im zweiten dagegen eine zu geringe Oeffnung hat, die Werthe von φ_1 und $(\varphi)_1$ nach (f) und (g) von Nro. 59, so bleiben die vorhergehenden Resultate bei allen Punkten des Gegenstandes ungeändert, deren Abstand von der Axe kleiner als $c_1 \varphi_1$ ist, weil die ihnen zugehörigen Strahlenkegel ganz durch die Blendung gelassen werden. Ist jener Abstand grösser als $c_1 \varphi_1$ und kleiner als $c_1 (\varphi)_1$, so wird ein Theil des Strahlenkegels von der Blendung aufgefangen, und dieser Theil ist desto grösser, je mehr sich der Abstand dem letzteren Werthe nähert. Die Lichtstärke nimmt daher von $c_1 \varphi_1$ bis zu $c_1 (\varphi)_1$ beständig ab, wo sie endlich ganz verschwindet, weil bei dieser und allen grösseren Entfernungen keine Strahlen mehr durch die Blendung und die Hauptblendung zugleich gelassen werden.

Es ist leicht, jene veränderliche Lichtstärke für jeden Punkt des Gegenstandes nach der Grösse des durch die Blendung gehenden Theiles des ihm zugehörigen Strahlenkegels zu berechnen; es wird jedoch vorerst genügen, im Allgemeinen mit dieser Sache bekannt

zu seyn, da wir später Gelegenheit haben werden, uns umständlicher damit zu beschäftigen.

Wir haben zwar in den vorhergehenden Untersuchungen über die Lichtstärke bei den Instrumenten der zweiten Art vorausgesetzt, dass sich das Auge unverändert in der Axe des Instrumentes befindet, es lässt sich jedoch leicht einsehen, dass die sämmtlichen Resultate keine Aenderung erleiden, wenn man annimmt, dass sich das Auge bei der Betrachtung eines jeden Punktes stets nach dem ihm entsprechenden Hauptstrahle richtet. Nach Nro. 63 wird nämlich hierdurch weder die Entfernung des Auges vom Instrumente verändert, noch die Oeffnung, welche das Auge den aus dem Instrumente gehenden Strahlen darbietet, wofern man nur die Grössen der ersten Ordnung berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung behält auch das Bild auf der Netzhaut in den verschiedenen Lagen des Auges dieselbe Grösse. Da nun bei der Bestimmung der Lichtstärke ausser denjenigen Grössen, welche in beiden Fällen unveränderlich sind, keine weitere, als die angegebenen, in Betracht kommen, so folgt daraus, dass die erhaltenen Resultate auch dann anwendbar sind, wenn sich das Auge stets nach den Hauptstrahlen richtet.

Uebrigens müssen wir noch bemerken, dass bei sämmtlichen vorhergehenden Untersuchungen über die Lichtstärke der Verlust nicht berücksichtigt worden ist, welchen das Licht bei dem Uebergange aus einem durchsichtigen Körper in einen anderen von verschiedenem Brechungsvermögen durch Reflexion erleidet.

Sodann ist die oben gemachte Voraussetzung, dass sich das Licht nach allen Richtungen gleichförmig verbreitet, strenge genommen, nur bei einem isolirten leuchtenden Punkte richtig. Geht dagegen das Licht von einer Fläche aus, so lehrt die Erfahrung, dass die Lichtstärke jedesmal dem Sinus des Winkels proportional ist, welchen der Lichtstrahl mit der leuchtenden Fläche macht. Da wir nun den Gegenstand als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene angenommen haben, so ist jener Winkel das Complement des Winkels, welchen der Strahl mit der Axe macht und dessen Projectionen auf den Ebenen der yz und der xz die in Nro. 53 gefundenen Winkel ω und $\varkappa$ sind. Bezeichnet man daher durch

η den Winkel zwischen dem allgemeinen einfallenden Strahle und der Axe des Instrumentes,

so muss der in (o) gefundene Ausdruck von $d\mathfrak{M}$ mit $\cos\eta$ multiplicirt werden, um auf jenen Umstand Rücksicht zu nehmen. Es ist aber

$$tg^2\eta = tg^2\omega + tg^2\varkappa$$

folglich, wenn man $\cos\eta$ in eine Reihe entwickelt, welche nach Potenzen von $tg\,\omega$ und $tg\,\varkappa$ geordnet ist, und nur die beiden ersten Glieder beibehält,

$$\cos\eta = 1 - \frac{1}{2}\,(tg^2\omega + tg^2\varkappa)$$

$tg\omega$ und $tg\varkappa$ sind aber mit Y'_1, X'_1 und φ_1 multiplicirt. Werden daher, wie es hier geschieht, die Potenzen und Producte dieser Grössen gegen 1 vernachlässigt, so ist

$$\cos\eta = 1$$

so dass die erhaltenen Formeln hierdurch keine Aenderung erleiden, in so fern man die Abweichungen vernachlässigt.

Gesichtsfeld.

66) Wir haben in Nro. 57 angenommen, dass der Gegenstand, welcher durch das Instrument betrachtet wird, eine auf der Axe desselben senkrecht stehende Ebene ist, und dass derjenige Theil des Gegenstandes, welcher durch das Instrument übersehen werden kann, von einem mit dem Halbmesser $b_1 = c_1\,\varphi_1$ beschriebenen Kreise begrenzt wird. Nennt man daher den Durchmesser dieses Kreises das *Gesichtsfeld*, so ist

$b_1 = c_1\,\varphi_1$ das halbe Gesichtsfeld, in dem bei dem Instrumente gebrauchten Längenmaasse ausgedrückt.

Diese Bestimmung des Gesichtsfeldes ist jedoch bei Instrumenten, welche für entfernte Gegenstände gebraucht werden, nicht zweckmässig, weil sich die Entfernung der letzteren bei einem und demselben Instrumente bedeutend abändern kann, mithin das Gesichtsfeld für jede Entfernung besonders angegeben werden müsste. In diesem Falle schätzt man daher das Gesichtsfeld nicht nach seiner absoluten Grösse, sondern nach dem Winkel zwischen zwei Linien, welche von den beiden Endpunkten eines Durchmessers nach dem Scheitel der ersten brechenden Fläche gezogen sind. Hiernach ist

$\varphi_1 = \frac{b_1}{c_1}$ die Tangente des halben Gesichtsfeldes, in Winkel ausgedrückt.

Ein möglichst grosses Gesichtsfeld ist bei allen optischen Instrumenten eine sehr wünschenswerthe Sache; in der Ausführung bieten sich jedoch hierbei bedeutende Schwierigkeiten dar, welche darin ihren Grund haben, dass die Abweichungen der Strahlen desto mehr zunehmen, je weiter sich der dazu gehörige Punkt des Gegenstandes von der Axe entfernt. Das Gesichtsfeld kann daher nur durch die Verminderung dieser Abweichungen vergrössert werden, wovon später die Rede seyn wird. Ist diese Verminderung, soweit es die Umstände erlauben, bewirkt, so bleibt nichts mehr übrig, als das Gesichtsfeld soweit zu beschränken, dass die an der Grenze desselben stattfindende Undeutlichkeit noch erträglich ist.

Nach Nro. 59 wird die Beschränkung des Gesichtsfeldes bei denjenigen Instrumenten, in welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen, durch eine an dem letzten derselben angebrachte Blendung bewirkt.

Setzt man den Halbmesser der Blendung ϱ_i als bekannt voraus und nimmt an, dass dieselbe an dem i^{ten} Bilde angebracht sey, so

kann daraus das halbe Gesichtsfeld vermittelst der letzten Formel (e) der allegirten Nummer berechnet werden, sie giebt nämlich

$$\varphi_1 = \frac{v_i\, \varrho_i}{V_i\, g_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

In Nro. 48 haben wir die Lage eines beliebigen Punktes im i^{ten} Bilde durch die Grössen g_i und Φ_i bestimmt, ebenso wie diess bei dem correspondirenden Punkte des Gegenstandes durch die Grössen c_1 und φ_1 geschehen ist.

Nehmen wir nun an, dass die i^{te} brechende Fläche die letzte des Instrumentes sey, so ist das entsprechende Bild das letzte vergrösserte Bild des Instrumentes. Beziehen wir daher Φ_i auf die äussersten Punkte dieses Bildes, so können wir den Winkel, welchem jene Grösse als Tangente zugehört, das *halbe vergrösserte Gesichtsfeld* nennen. Wird dasselbe als bekannt angenommen, so dient die letzte Formel (b) der allegirten Nummer, um daraus das wirkliche Gesichtsfeld zu berechnen, nämlich

$$\varphi_1 = \frac{v_i\, \Phi_i}{V_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Substituirt man hierin statt V_i seinen Werth aus (f) von Nro. 64, so wird

$$c_1\, \varphi_1 = \frac{(c)_1\, g_i\, \Phi_i}{(c)_I\, v_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Bei den Instrumenten der zweiten Art ist gewöhnlich Φ_i bei einerlei Einrichtung der Oculare, wegen der durch dieselben hervorgebrachten Abweichungen, eine gegebene Grösse; werden ausserdem diese Instrumente für gut organisirte Augen berechnet, welche bei Parallelstrahlen deutlich sehen, so sind g_i und $(c)_I$ unendlich und $(c)_1$ ist eine gegebene Grösse, welche bei Fernröhren $= c_1$ wird. In diesem Falle ist daher $c_1\, \varphi_1$ und bei Fernröhren φ_1 der scheinbaren Vergrösserung umgekehrt proportional.

Ferner ist vermöge (l) von Nro. 53

$$\Phi_i = tg\, \overset{\prime\prime}{\omega}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Das vergrösserte Gesichtsfeld ist daher bei jener Voraussetzung dem Winkel $\overset{\prime\prime}{\omega}_i$ gleich, unter welchem die den äussersten Punkten des Gegenstandes zugehörigen Hauptstrahlen in das Auge fallen, wenn sich seine Axe mit der Axe des Instrumentes in einer geraden Linie befindet.

Kommt in dem Instrumente kein wirkliches Bild zu Stande, so besteht das Gesichtsfeld nach Nro. 59 aus zwei Theilen. Im inneren findet überall eine gleiche Lichtstärke statt, im äusseren dagegen nimmt sie bis an die Grenze desselben nach und nach ab. Die Werthe von φ_1, welche den Grenzen dieser beiden Theile entsprechen, sind durch die Formeln (f) und (g) der allegirten Nummer gegeben.

Ist die Grösse des Gesichtsfeldes, in Winkel ausgedrückt, entweder gegeben oder nach dem Vorhergehenden berechnet worden, so findet man daraus das Gesichtsfeld, in Längenmaass ausgedrückt, durch die Formel

$$b_1 = c_1\, \varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Oeffnungsmaasse.

67) Um das in der vorhergehenden Nummer angegebene Gesichtsfeld zu erhalten, müssen die brechenden Flächen hinlängliche Oeffnungen bekommen, und wir haben in Nro. 58 gesehen, dass der hierzu erforderliche, von φ_1 abhängende Theil des Oeffnungshalbmessers derjenige ist, welchen wir in Bezug auf die i^{te} brechende Fläche mit $\overset{\prime\prime}{Y}_i$ bezeichnet und den Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes genannt haben. Wird dieser Halbmesser in Vergleichung mit dem Krümmungshalbmesser a_i der brechenden Fläche sehr gross, so können die von φ_1 abhängenden Abweichungen so bedeutend werden, dass es wegen der dadurch entstehenden Undeutlichkeit unmöglich ist, der brechenden Fläche die hiernach bestimmte Oeffnung zu geben. Um nun in dieser Beziehung Ueberlegungen anstellen zu können, ehe man sich über die Einrichtung eines Instrumentes entscheidet, kann man die Oeffnungshalbmesser $\overset{\prime\prime}{Y}_i$ in aliquoten Theilen der correspondirenden Halbmesser a_i der brechenden Flächen ausdrücken, oder statt der letzteren die Grössen $\frac{n_i\, a_i}{n_i - 1}$ wählen, da diese wegen des bekannten Werthes von n_i leicht aus a_i abgeleitet werden können und die Formeln dadurch eine einfachere Gestalt erhalten. Die auf diese Weise ausgedrückten Oeffnungshalbmesser $\frac{(n_i - 1)\overset{\prime\prime}{Y}_i}{n_i\, a_i}$ sollen die *Oeffnungsmaasse* genannt werden.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} t_i &= \frac{n_i\, a_i}{n_i - 1} \\ l_i &= \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{t_i} = \frac{(n_i - 1)\,\overset{\prime\prime}{Y}_i}{n_i\, a_i} \\ u_i &= \frac{g_i}{c_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

so ist l_i das Oeffnungsmaass der i^{ten} brechenden Fläche.

Die letzte dieser Gleichungen giebt

$$\frac{1}{g_i} = \frac{1}{c_i\, u_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Substituiren wir ferner in der zweiten Gleichung (a) von Nro. 40 statt $\frac{1}{g_i}$ und $\left(\frac{n-1}{n}\right)_i \frac{1}{a_i}$ die vorhergehende Werthe, so folgt daraus

$$\frac{1}{t_i} = \frac{1}{c_i}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{n}\right)_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Die zweite Gleichung (b) von Nro. 51 verwandelt sich sodann durch Substitution des ersten, in (a) angenommenen Werthes in die folgende:

$$\frac{1}{\overset{\prime\prime}{g}_i} = \frac{1}{t_i} + \frac{1}{n_i\, \overset{\prime\prime}{c}_i}$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit $-\overset{''}{Y}_i$ und bemerken, dass vermöge des zweiten in (a) angenommenen Werthes und vermöge (k) von Nro. 53

$$\frac{\overset{''}{Y}_i}{t_i} = l_i$$

$$-\frac{\overset{''}{Y}_i}{\overset{''}{g}_i} = tg\,\overset{''}{\omega}_i$$

$$-\frac{\overset{''}{Y}_i}{\overset{''}{c}_i} = tg\,\overset{''}{\omega}_{i-1}$$

ist, so entsteht daraus die Differenzengleichung:

$$tg\,\overset{''}{\omega}_i = \frac{1}{n_i}\,tg\,\overset{''}{\omega}_{i-1} - l_i \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(d)}$$

Sie hat einerlei Gestalt mit der Gleichung (K) von Nro. 3, welche sich in dieselbe verwandelt, wenn man

$$u = tg\,\overset{''}{\omega}$$

$$q = \frac{1}{n}$$

$$t = -l$$

setzt. Ihr Integral wird daher vermöge der zweiten Gleichung (M) jener Nummer:

$$tg\,\overset{''}{\omega}_i = \left[\frac{1}{n_i}\right]^i \left\{ tg\,\overset{''}{\omega}_0 - \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i\,[n_m]^m\,l_m \right\}$$

Es ist aber

$$[n_i]^i = n_i\,n_{i-1}\,.\,.\,.\,.\,n_1 = \nu_i$$

Ferner ist $\overset{''}{\omega}_0$ der Winkel, welchen der Hauptstrahl mit der Axe macht, ehe er die erste brechende Fläche trifft, d. h. der entsprechende Winkel des einfallenden Hauptstrahles, welcher oben mit $\overset{''}{\omega}$ bezeichnet wurde und durch die erste Gleichung (l) von Nro. 53 gegeben ist, nämlich

$$tg\,\overset{''}{\omega}_0 = tg\,\overset{''}{\omega} = \varphi_1 - \frac{\overset{''}{Y}_1}{c_1}$$

Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir daher aus dem vorhergehenden Integrale

$$tg\,\overset{''}{\omega}_i = \frac{1}{\nu_i}\left[\varphi_1 - \frac{\overset{''}{Y}_1}{c_1} - \Sigma_{\mathrm{m}}{}_1^i\,\nu_m\,l_m\right] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(e)}$$

Setzt man $\nu_1\,l_1 = n_1\,l_1$ aus dem Summationszeichen heraus und bemerkt, dass nach dem in (a) angenommenen Werthe von l_i und der zweiten Gleichung (a) von Nro. 40

$$\frac{\overset{''}{Y}_1}{c_1} + \nu_1\,l_1 = \frac{n_1\,\overset{''}{Y}_1}{g_1}$$

ist, so kann der vorhergehende Ausdruck auch unter die Gestalt gebracht werden:

$$tg\,\overset{''}{\omega}_i = \frac{1}{\nu_i}\left[\varphi_1 - \frac{n_1\,\overset{''}{Y}_1}{g_1} - \Sigma_{\mathrm{m}}{}_2^i\,\nu_m\,l_m\right] \;.\;.\;.\;.\;.\;\text{(f)}$$

In (l) von Nro. 53 haben wir ferner gefunden:

$$tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_i = \Phi_i - \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{g_i}$$

mithin

$$\Phi_i = tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_i + \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{g_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Sodann ist vermöge (b) von Nro. 48

$$\Phi_i = \frac{V_i\,\varphi_1}{v_i} = \frac{V_{i-1}\,g_{i-1}\,\varphi_1}{n_i\,v_{i-1}\,c_i}$$

Man hat aber allgemein

$$\left.\begin{aligned} V_i\,g_i &= \frac{g_i}{c_i}\,\frac{g_{i-1}}{c_{i-1}}\ldots\ldots\frac{g_1}{c_1}\,c_1 \\ &= u_i\,u_{i-1}\ldots\ldots u_1\,c_1 = [u_i]^i\,c_1 = [u_i]^{i-1}\,g_1 \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

folglich, wenn man den durch Verwechselung von i mit $i-1$ hieraus resultirenden Werth in dem vorhergehenden Ausdrucke von Φ_i substituirt,

$$\Phi_i = \frac{[u_{i-1}]^{i-1}\,c_1\,\varphi_1}{n_i\,v_{i-1}\,c_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Die beiden Gleichungen (b) und (c) geben mit Rücksicht auf den in (a) angenommenen Werth von l_i:

$$\frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{g_i} = \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{t_i\,u_i\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i} = \frac{l_i}{u_i\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i}$$

Aus diesem Werthe, verbunden mit (d), folgt

$$tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_i + \frac{\overset{\prime\prime}{Y}_i}{g_i} - \frac{1}{n_i}\left[tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_{i-1} + \frac{l_i}{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i}\right] \quad \ldots \quad (k)$$

Da die beiden Ausdrücke (i) und (k) vermöge (g) einander gleich sind, so erhalten wir daraus zuerst

$$\frac{1}{c_i} = \frac{v_{i-1}}{[u_{i-1}]^{i-1}\,c_1\,\varphi_1}\left[tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_{i-1} + \frac{l_i}{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i}\right] \quad \ldots \quad (l)$$

und dann vermittelst dieses Werthes aus (b) und (c)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{g_i} &= \frac{v_{i-1}}{[u_i]^i\,c_1\,\varphi_1}\left[tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_{i-1} + \frac{l_i}{\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i}\right] \\ \frac{1}{t_i} &= \frac{v_{i-1}}{[u_{i-1}]^{i-1}\,c_1\,\varphi_1}\left[\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{n}\right)_i tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_{i-1} + l_i\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (m)$$

Werden daher ausser c_1, φ_1 und $\overset{\prime\prime}{Y}_1 = K_1\,\varphi_1$ auch noch die Oeffnungsmaasse l_i und die Grössen u_i, welche die Verhältnisse der zusammengehörigen Vereinigungsweiten bestimmen, als bekannt angenommen, so geben die Formeln (l) und (m), oder (l), (b) und (c), wenn man darin statt $tg\,\overset{\prime\prime}{\omega}_{i-1}$ seinen Werth aus (e) oder (f) substituirt, nicht nur die Vereinigungsweiten c_i und g_i, sondern auch, mit Rücksicht

auf die erste Gleichung (a), die Halbmesser a_i der brechenden Flächen. Zur Abkürzung werde ich in den folgenden Formeln die Bezeichnungen $tg\,\overset{''}{\omega}_i$ und t_i und ebenso diejenigen, welche hieraus durch Veränderung des Index entstehen, beibehalten, worunter jedesmal die durch die vorhergehenden Ausdrücke bestimmten Werthe zu verstehen sind.

In Bezug auf den Hauptstrahl folgt aus (k) von Nro. 53

$$\frac{1}{\overset{''}{g}_i} = -\frac{tg\,\overset{''}{\omega}_i}{\overset{''}{Y}_i}$$

$$\frac{1}{\overset{''}{c}_{i+1}} = -\frac{tg\,\overset{''}{\omega}_i}{\overset{''}{Y}_{i+1}}$$

mithin, wenn man hierin statt $\overset{''}{Y}_i$ und $\overset{''}{Y}_{i+1}$ ihre Werthe aus (a) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\overset{''}{g}_i} &= -\frac{tg\,\overset{''}{\omega}_i}{t_i\,l_i} \\ \frac{1}{\overset{''}{c}_{i+1}} &= -\frac{tg\,\overset{''}{\omega}_i}{t_{i+1}\,l_{i+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Die Entfernung des Bildes von dem Vereinigungspunkte der Hauptstrahlen wird vermöge (a) und (c) von Nro. 56 mit Rücksicht auf die obige Gleichung (h):

$$(g-\overset{''}{g})_i = (c-\overset{''}{c})_{i+1} = \frac{[u_i]^i\,c_1\,\varphi_1}{v_i\,tg\,\overset{''}{\omega}_i} \quad \ldots\ldots \quad (o)$$

Verwechselt man hierin $[u_i]^i$ mit $u_i\,[u_{i-1}]^{i-1}$, so erhält man daraus

$$u_i = \frac{v_i\,(g-\overset{''}{g})_i\,tg\,\overset{''}{\omega}_i}{[u_{i-1}]^{i-1}\,c_1\,\varphi_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

Ferner giebt die erste Gleichung (n) durch Elimination von $tg\,\overset{''}{\omega}_i$ vermittelst (o)

$$\frac{1}{\overset{''}{g}_i} = -\frac{[u_i]^i\,c_1\,\varphi_1}{v_i\,t_i\,l_i\,(g-\overset{''}{g})_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Wir haben in (c) von Nro. 62 gesehen, dass $(g-\overset{''}{g})_i$ die Entfernung des letzten, im Instrumente entstehenden Bildes vom Durchschnittspunkte der einfallenden Hauptstrahlen im Auge ist, welche daselbst mit $(c)_I$ bezeichnet wurde; dass ferner $\overset{''}{g}_i$ die Entfernung jenes Durchschnittspunktes von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes ausdrückt, vorausgesetzt, dass i auf diese Fläche bezogen wird. Sind daher $(g-\overset{''}{g})_i$ und die sämmtlichen u, mit Ausnahme des letzten, gegeben, so bestimmen die Formeln (p) und (q) diejenigen Werthe von u_i und $\overset{''}{g}_i$, welche dem gegebenen Werthe von $(g-\overset{''}{g})_i$ entsprechen.

Substituirt man in der identischen Gleichung

$$-\overset{''}{c}_{i+1} = (c-\overset{''}{c})_{i+1} - c_{i+1}$$

statt $\overset{''}{c}_{i+1}$ und $(c-\overset{''}{c})_{i+1}$ ihre Werthe aus (n) und (o), so folgt daraus

$$t_{i+1}\, l_{i+1} = \frac{[u_i]^i\, c_1\, \varphi_1}{v_i} - c_{i+1}\, tg\, \overset{''}{\omega}_i \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (r)$$

Da $t_{i+1}\, l_{i+1} = \overset{''}{Y}_{i+1}$ der wegen des Gesichtsfeldes erforderliche Oeffnungshalbmesser der $(i+1)^{\text{ten}}$ brechenden Fläche ist, so wird derselbe vermittelst der vorhergehenden Formel durch Grössen ausgedrückt, welche als bekannt angenommen worden sind.

Für die scheinbare Vergrösserung bei den Instrumenten der zweiten Art haben wir bereits in (i) von Nro. 64 den Ausdruck erhalten:

$$v_i = \frac{(c)_1\, tg\, \overset{''}{\omega}_i}{c_1\, \varphi_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (s)$$

welcher ebenfalls nur als bekannt vorausgesetzte Grössen enthält. Suchen wir hieraus den Werth von $tg\, \overset{''}{\omega}_i$ und substituiren denselben in (o) und (p), so entstehen dadurch die folgenden Formeln, welche durch die scheinbare Vergrösserung ausgedrückt sind:

$$\left.\begin{aligned} tg\, \overset{''}{\omega}_i &= \frac{v_i\, c_1\, \varphi_1}{(c)_1} \\ \frac{1}{\overset{''}{g}_i} &= -\frac{v_i\, c_1\, \varphi_1}{(c)_1\, t_i\, l_i} \\ u_i &= \frac{\nu_i\, v_i\, (g-\overset{''}{g})_i}{(c)_1\, [u_{i-1}]^{i-1}} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (t)$$

In den vorhergehenden Formeln ist φ_1 als bekannt angenommen worden; es kann jedoch auch derjenige Werth von φ_1 gesucht werden, welcher einer gegebenen Vergrösserung entspricht. Zu diesem Ende giebt der Ausdruck (s), wenn man darin statt $tg\, \overset{''}{\omega}_i$ einen der beiden in (e) und (f) gefundenen Werthe substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\left(\dfrac{\overset{''}{Y}_1}{c_1} + \Sigma_1^i\, \nu_m\, l_m\right)}{\dfrac{c_1\, \nu_i\, v_i}{(c)_1} - 1} \\ &= -\frac{\left(\dfrac{n_1\, \overset{''}{Y}_1}{g_1} + \Sigma_2^i\, \nu_m\, l_m\right)}{\dfrac{c_1\, \nu_i\, v_i}{(c)_1} - 1} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (u)$$

Wird nicht $\overset{''}{Y}_1$ sondern K_1 als bekannt vorausgesetzt, so folgt aus dem letzten Ausdrucke von φ_1, nach vorheriger Verwechselung von $\overset{''}{Y}_1$ mit $K_1\, \varphi_1$,

$$\varphi_1 = \frac{-\Sigma_2^i\, \nu_m\, l_m}{\dfrac{c_1\, \nu_i\, v_i}{(c)_1} + \dfrac{n_1\, K_1}{g_1} - 1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (v)$$

Die vorhergehenden Formeln sind denen analog, welche Euler für ein System von Linsengläsern gegeben hat,[1]) und welche nachher in die meisten Lehrbücher der Optik übergegangen sind. Er nennt die in aliquoten Theilen der Brennweiten ausgedrückten Oeffnungshalbmesser der Linsen, *rationes aperturarum*, wofür im Deutschen die Benennung *Oeffnungsmaasse* durch Klügel[2]) eingeführt wurde. Bei einem System von brechenden Flächen treten an die Stelle der Brennweiten die oben mit t bezeichneten Grössen, da sich bei einer Linse, deren Dicke vernachlässigt wird und deren Hinterfläche die i^{te} des Systems ist, $\frac{n_{i-1}}{t_{i-1}} + \frac{1}{t_i}$ in das Reciproke der Brennweite verwandelt.

Im Allgemeinen können wir aber über diese Formeln die folgenden Bemerkungen machen. Sobald man die Abweichungen wegen der Gestalt ausserhalb der Axe vernachlässigt, wie es in den bisher gebräuchlichen Näherungsformeln geschah, so entsteht die Besorgniss, dass jene unbekannten Abweichungen allzu bedeutend werden möchten, wenn die brechenden Flächen die wegen des Gesichtsfeldes erforderlichen Oeffnungen erhalten. Der Zweck jener Formeln ist daher hauptsächlich der, dass man durch die mit (u) und (v) bezeichneten Ausdrücke in den Stand gesetzt wird, die Einrichtung des Instrumentes so zu treffen, dass bei keiner brechenden Fläche die Oeffnung einen, als zulässige Grenze angenommenen Theil ihres Krümmungshalbmessers übersteigt und demungeachtet ein möglichst grosses Gesichtsfeld erhalten wird. Berücksichtigt man dagegen, wie es bei den folgenden Untersuchungen geschehen wird, die erwähnten Abweichungen und berechnet ihre Grösse in den einzelnen Fällen, so fällt jene Besorgniss weg, und es zeigt sich bei der Ausübung, dass oft gerade solche Einrichtungen den Vorzug verdienen, bei welchen die in aliquoten Theilen der Krümmungshalbmesser ausgedrückten Oeffnungen grössere Werthe erhalten. Die erwähnten Formeln können daher nur zu vorläufigen Ueberlegungen in Bezug auf die Einrichtung der Instrumente gebraucht werden, das Nähere dagegen muss den Untersuchungen über die dabei in Betracht kommenden Abweichungen vorbehalten bleiben.

[1]) Dioptrica. Pars I. pag. 202.

[2]) Analytische Dioptrik. Pag. 19.

Sechstes Kapitel.

Nähere Betrachtung der Abweichungen.

Die Probleme der höheren Ordnungen beziehen sich auf die Aenderungen, welche die in dem vorhergehenden Kapitel gefundenen Resultate durch die Abweichungen der Strahlen erleiden; es ist daher nothwendig, dass wir uns mit den letzteren näher beschäftigen. Zu diesem Zwecke müssen wir die oben erhaltenen Gleichungen der gebrochenen Strahlen wieder vornehmen und ihnen eine zur Rechnung bequemere Gestalt geben, sodann die Modificationen suchen, welche die Verbindung des Instrumentes mit dem Auge und die genaue Einstellung von beiden in jenen Gleichungen hervorbringen, worauf sie mit Leichtigkeit auf die Instrumente der ersten und zweiten Art angewandt und die in den verschiedenen Fällen entstehenden Abweichungen bestimmt werden können.

Gleichungen der gebrochenen Strahlen mit Rücksicht auf die Abweichungen.

68) Nach (b) von Nro. 34 sind die Gleichungen des Hauptstrahles, wenn man seine Lage nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet,

$$\left.\begin{aligned} y''_{\mathrm{i}} &= \frac{V_{\mathrm{i}}\, z_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{i}}} \left\{ \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &1 + [(K)_{\circ} - K_1]\, \Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_{\circ} - K_1]^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ &- \frac{v_{\mathrm{i}}\, K_{\mathrm{i}}}{V_{\mathrm{i}}^2} \left(\frac{z-g}{g\, z}\right)_{\mathrm{i}} \end{aligned} \right\} \varphi_1 \\ &+ \left[P_{\mathrm{i}} + (P)_{\circ}\, \Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1^3 \\ &+ Q_{\circ}\, K_1^5\, \varphi_1^5 \end{aligned} \right. \\ x''_{\mathrm{i}} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Ferner haben wir in (c) von Nro. 35 die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles gefunden, wenn seine Lage ebenfalls nur in der Nähe des letzten Bildes betrachtet und der Ursprung der Coordinaten y'_{i} und x'_{i} in dem dazu gehörigen Hauptstrahle angenommen wird. Da wir von diesen Gleichungen häufig Gebrauch machen werden, so schreibe ich statt der zusammengesetzten Coefficienten, welche darin enthalten sind, zur Abkürzung einfache Buchstaben, ich setze nämlich

$$\left.\begin{aligned}
L &= L_i + (L)_o\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
M &= M_i + (M)_o\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
N &= N_i + (N)_o\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
O &= O_i + 3(N)_o\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
Q &= Q_o\\
S &= S_i + 2(S)_o\,\Delta\frac{1}{c_1} = S_i - 2T_o\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
s &= s_i\\
U &= U_o\\
T &= T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}\\
t &= t_i\\
W &= W_i\\
J &= -\frac{v_i}{V_i^2}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (b)$$

Bemerkt man ausserdem, dass $\acute{X}_1$, $\acute{Y}_1$, K_1 und φ_1 den Index 1, V_i, g_i, v_i, $\acute{x}_i$, $\acute{y}_i$ und z_i dagegen den Index i haben, so kann man den Index weglassen, da hierdurch keine Zweideutigkeit zu befürchten ist.

Auf diese Art bekommen die allegirten Gleichungen die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\acute{y} &= \frac{Vz}{v}\left\{\begin{aligned}
&L(\acute{X}^2+\acute{Y}^2)\acute{Y} + M\left(\frac{\acute{X}^2+3\acute{Y}^2}{2}\right)\varphi\\
&+O\acute{Y}\varphi^2 + Q\left[(\acute{Y}+K\varphi)\left(\acute{X}^2+(\acute{Y}+K\varphi)^2\right)^2 - K^5\varphi^5\right]\\
&+S\acute{Y}\delta v + s\acute{Y}\delta v^2\\
&+U\left[(\acute{Y}+K\varphi)\left(\acute{X}^2+(\acute{Y}+K\varphi)^2\right) - K^3\varphi^3\right]\delta v\\
&+T\varphi\,\delta v + t\varphi\,\delta v^2 + W\varphi^3\,\delta v\\
&+J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\acute{Y}
\end{aligned}\right.\\
\acute{x} &= \frac{Vz}{v}\left\{\begin{aligned}
&L(\acute{X}^2+\acute{Y}^2)\acute{X} + M\acute{X}\acute{Y}\varphi + N\acute{X}\varphi^2\\
&+Q\acute{X}\left[\acute{X}^2+(\acute{Y}+K\varphi)^2\right]^2\\
&+S\acute{X}\delta v + s\acute{X}\delta v^2 + U\acute{X}\left[\acute{X}^2+(\acute{Y}+K\varphi)^2\right]\delta v\\
&+J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\acute{X}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}(c)$$

Wegen der folgenden Rechnung ist es bequem, die rechtwinkeligen Coordinaten $\acute{X}$ und $\acute{Y}$ in Polarcoordinaten zu verwandeln. Nennen wir ohne Rücksicht auf die Abweichungen

R die auf die Ebene der xy projicirte Entfernung zwischen den Durchschnittspunkten des Hauptstrahles und des allgemeinen farbigen Strahles mit der ersten brechenden Fläche,

Ψ den Winkel, welchen R mit der Axe der y macht,

so ist $\acute{Y} = R \cos \Psi$

$\acute{X} = R \sin \Psi$

folglich

$$(\acute{X}^2 + \acute{Y}^2)\,\acute{Y} = R^3 \cos \Psi$$

$$(\acute{X}^2 + \acute{Y}^2)\,\acute{X} = R^3 \sin \Psi$$

$$\left(\frac{\acute{X}^2 + 3\acute{Y}^2}{2}\right) = R^2 \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \Psi\right)$$

$$\acute{X}\acute{Y} = R^2 \sin \Psi \cos \Psi$$

$$\acute{X}^2 + (\acute{Y} + K\varphi)^2 = R^2 + K^2\varphi^2 + 2RK\varphi \cos \Psi$$

$$(\acute{Y} + K\varphi)\,[\acute{X}^2 + (\acute{Y} + K\varphi)^2]^2 - K^5\varphi^5 =$$
$$= R \cos \Psi \begin{bmatrix} (R^2 + K^2\varphi^2)^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix}$$
$$+ K\varphi \begin{bmatrix} R^4 + 2R^2K^2\varphi^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix}$$

$$\acute{X}[\acute{X}^2 + (\acute{Y} + K\varphi)^2]^2 =$$
$$= R \sin \Psi \begin{bmatrix} (R^2 + K^2\varphi^2)^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix}$$

$$(\acute{Y} + K\varphi)\,[\acute{X}^2 + (\acute{Y} + K\varphi)^2] - K^3\varphi^3 =$$
$$= R \cos \Psi\,[R^2 + K^2\varphi^2 + 2RK\varphi \cos \Psi]$$
$$+ K\varphi\,[R^2 + 2RK\varphi \cos \Psi]$$

$$\acute{X}[\acute{X}^2 + (\acute{Y} + K\varphi)^2] =$$
$$= R \sin \Psi\,[R^2 + K^2\varphi^2 + 2RK\varphi \cos \Psi]$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen (c) in die folgenden:

$$\acute{y} = \frac{Vz}{v} \left\{ \begin{array}{l} LR^3 \cos \Psi + MR^2\varphi\left(\frac{1}{2} + \cos^2 \Psi\right) + OR\varphi^2 \cos \Psi \\ + Q \left\{ \begin{array}{l} R \cos \Psi \begin{bmatrix} (R^2 + K^2\varphi^2)^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix} \\ + K\varphi \begin{bmatrix} R^4 + 2R^2K^2\varphi^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix} \end{array} \right. \\ + SR \cos \Psi\,\delta v + sR \cos \Psi\,\delta v^2 \\ + U\delta v \left\{ \begin{array}{l} R \cos \Psi\,[R^2 + K^2\varphi^2 + 2RK\varphi \cos \Psi] \\ + K\varphi\,[R^2 + 2RK\varphi \cos \Psi] \end{array} \right. \\ + T\varphi\,\delta v + t\varphi\,\delta v^2 + W\varphi^3\,\delta v \\ + J\left(\frac{z-g}{gz}\right) R \cos \Psi \end{array} \right. \qquad \text{(d)}$$

$$\acute{x} = \frac{Vz}{v} \left\{ \begin{array}{l} LR^3 \sin \Psi + MR^2\varphi \sin \Psi \cos \Psi + NR\varphi^2 \sin \Psi \\ + QR \sin \Psi \begin{bmatrix} (R^2 + K^2\varphi^2)^2 + 4(R^2 + K^2\varphi^2) RK\varphi \cos \Psi \\ + 4R^2K^2\varphi^2 \cos^2 \Psi \end{bmatrix} \\ + SR \sin \Psi\,\delta v + sR \sin \Psi\,\delta v^2 \\ + UR \sin \Psi\,\delta v\,[R^2 + K^2\varphi^2 + 2RK\varphi \cos \Psi] \\ + J\left(\frac{z-g}{gz}\right) R \sin \Psi \end{array} \right.$$

Drückt man die Potenzen und Producte der trigonometrischen Functionen von Ψ durch trigonometrische Functionen der Vielfachen von Ψ aus, so ist

$$\begin{aligned} 2\cos^2\Psi &= 1+\cos 2\Psi \\ 4\cos^3\Psi &= 3\cos\Psi+\cos 3\Psi \\ 2\sin\Psi\cos\Psi &= \sin 2\Psi \\ 4\sin\Psi\cos^2\Psi &= \sin\Psi+\sin 3\Psi \end{aligned}$$

Hierdurch nehmen die Gleichungen (d) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= \frac{Vz}{v}\left\{\begin{aligned} &L\,\mathrm{R}^3\cos\Psi + M\mathrm{R}^2\varphi\left(1+\frac{1}{2}\cos 2\Psi\right) + O\,\mathrm{R}\varphi^2\cos\Psi \\ &+Q\left\{\begin{aligned}&3\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi(\mathrm{R}^2+2\mathrm{K}^2\varphi^2)+\mathrm{R}(\mathrm{R}^4+9\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2+5\mathrm{K}^4\varphi^4)\cos\Psi \\ &+2\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi(\mathrm{R}^2+2\mathrm{K}^2\varphi^2)\cos 2\Psi+\mathrm{R}^3\mathrm{K}^2\varphi^2\cos 3\Psi\end{aligned}\right. \\ &+S\mathrm{R}\,\delta v\cos\Psi + s\,\mathrm{R}\,\delta v^2\cos\Psi \\ &+U\delta v\left[2\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi+\mathrm{R}(\mathrm{R}^2+3\mathrm{K}^2\varphi^2)\cos\Psi+\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi\cos 2\Psi\right] \\ &+T\varphi\,\delta v + t\varphi\,\delta v^2 + W\varphi^3\delta v \\ &+J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\mathrm{R}\cos\Psi \end{aligned}\right. \\ \dot{x} &= \frac{Vz}{v}\left\{\begin{aligned} &L\,\mathrm{R}^3\sin\Psi + \frac{M}{2}\mathrm{R}^2\varphi\sin 2\Psi + N\mathrm{R}\varphi^2\sin\Psi \\ &+Q\left\{\begin{aligned}&\mathrm{R}(\mathrm{R}^4+3\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2+\mathrm{K}^4\varphi^4)\sin\Psi \\ &+2\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi(\mathrm{R}^2+\mathrm{K}^2\varphi^2)\sin 2\Psi+\mathrm{R}^3\mathrm{K}^2\varphi^2\sin 3\Psi\end{aligned}\right. \\ &+S\mathrm{R}\,\delta v\sin\Psi + s\,\mathrm{R}\,\delta v^2\sin\Psi \\ &+U\delta v\left[\mathrm{R}(\mathrm{R}^2+\mathrm{K}^2\varphi^2)\sin\Psi+\mathrm{R}^2\mathrm{K}\varphi\sin 2\Psi\right] \\ &+J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\mathrm{R}\sin\Psi \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

Die vorhergehenden Formeln sind sämmtlich unter der Voraussetzung entwickelt, dass $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist, deren Potenzen und Producte in andere Abweichungen vernachlässigt werden können. Wenn jedoch g_i nicht bedeutend gross ist, so wird $(z-g)$ ebenfalls eine kleine Grösse jener Ordnung. Nach der Bemerkung, welche am Ende von Nro. 5 gemacht wurde, ist es leicht, die Formeln, welche sich auf die letztere Annahme beziehen, aus den vorhergehenden abzuleiten, indem hierzu weiter nichts erforderlich ist, als den gemeinschaftlichen Factor z_i in g_i, sodann in den von $(z-g)_i$ abhängenden Gliedern $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ mit $\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i$ zu verwechseln und dem Ausdrucke von y_i das Glied $g_i\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i f_i$ zuzusetzen.

Vermöge (m) von Nro. 4 ist aber

$$g_i\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i f_i = \frac{V_i\,\varphi_1}{v_i}(z-g)_i$$

Da diese Grösse von φ_1 abhängt, so gehört sie dem Hauptstrahle an; setzt man sie daher dem in (a) gegebenen Ausdrucke von $\overset{\prime\prime}{y}_i$ zu und nimmt die angegebenen Verwechselungen vor, so erhält man

die folgenden Gleichungen des Hauptstrahles unter der Voraussetzung, dass $(z-g)_i$ eine Grösse von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen ist:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i\, g_i}{v_i}\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &1+[(K)_0-K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1}+[(K)_0-K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ &+\left(1-\frac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right)\left(\frac{z-g}{g}\right)_i \end{aligned}\right\}\varphi_1 \\ &+\left[P_i+(P)_0\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ &+Q_0\,K_1^5\,\varphi_1^5 \end{aligned}\right. \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \text{(f)}$$

In den Ausdrücken der Seitenabweichungen muss in diesem Falle der gemeinschaftliche Factor

$$z \text{ mit } g$$

und

$$\left(\frac{z-g}{gz}\right) \text{ mit } \left(\frac{z-g}{g^2}\right)$$

verwechselt werden, daher es unnöthig ist, jene Ausdrücke von Neuem zu schreiben.

Sollen diejenigen Glieder beibehalten werden, welche aus Producten von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ in Abweichungen bestehen, so kann diess vermittelst der in (a) von Nro. 34 und (b) von Nro. 35 gegebenen Formeln geschehen, wenn man sich auf die Glieder der zweiten Ordnung beschränkt und den Einfluss, welchen eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes hat, nicht berücksichtigt.

Wir können diesen Formeln eine ähnliche Gestalt geben, wie es bei den Formeln (a) und (c) geschehen ist, wenn wir die Glieder vereinigen, welche in Bezug auf $\acute{X}_1$, $\acute{Y}_1$ und φ_1 einerlei Argumente haben und statt der zusammengesetzten Coefficienten einfache Buchstaben gebrauchen. Zu diesem Ende setze ich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= L_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[L''_i+(K\,L-L'')_j] \\ \mathfrak{M} &= M_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[M''_i+(K\,M-M'')_j] \\ \mathfrak{q} &= -\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[q'_i-q'_j] \\ \mathfrak{N} &= N_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[N''_i+(K\,N-N'')_j] \\ \mathfrak{O} &= O_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[O''_i+(K\,O-O'')_j] \\ \mathfrak{P} &= P_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[P''_i+(K\,P-P'')_j] \\ \mathfrak{S} &= S_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[(S)_i+(K\,S-(S))_j] \\ \mathfrak{T} &= T_i-\frac{v_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i[(T)_i+(K\,T-(T))_j] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; \text{(g)}$$

Ferner ist nach der in (b) eingeführten Bezeichnung

$$J = -\frac{v_i}{V_i^2}$$

Hierdurch erhält man unter jenen Voraussetzungen aus (a) von Nro. 34 die Gleichungen des Hauptstrahles:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i\, z_i}{v_i}\left\{\left[1 - \frac{v_i\, \mathrm{K}_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i\right]\varphi_1 + \mathfrak{P}\,\varphi_i^3\right. \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} , \quad . \quad \text{(h)}$$

sodann aus (b) von Nro. 35, mit Weglassung des Index, die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles, wenn der Ursprung der Coordinaten y' und x' in dem dazu gehörigen Hauptstrahle angenommen wird:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{V z}{v}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}\,(X'^2 + Y'^2)\,Y' + \mathfrak{M}\left(\frac{X'^2 + 3\,Y'^2}{2}\right)\varphi \\ &+ \mathfrak{q}\,(X'^2 + Y'^2)\,\varphi + \mathfrak{O}\,Y'\varphi^2 \\ &+ \mathfrak{S}\,Y'\delta v + \mathfrak{T}\,\varphi\,\delta v \\ &+ J\left(\frac{z-g}{gz}\right)Y' \end{aligned}\right. \\ x' &= \frac{V z}{v}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}\,(X'^2 + Y'^2)\,X' + \mathfrak{M}\,X'Y'\varphi \\ &+ \mathfrak{N}\,X'\varphi^2 + \mathfrak{S}\,X'\delta v \\ &+ J\left(\frac{z-g}{gz}\right)X' \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(i)}$$

Durch die Verwandlung der rechtwinkeligen Coordinaten X' und Y' in die Polarcoordinaten R und ψ werden diese Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{V z}{v}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}\,\mathrm{R}^3 \cos\psi + \mathfrak{M}\,\mathrm{R}^2\varphi\left(\frac{1}{2} + \cos^2\psi\right) \\ &+ \mathfrak{q}\,\mathrm{R}^2\varphi + \mathfrak{O}\,\mathrm{R}\,\varphi^2\cos\psi \\ &+ \mathfrak{S}\,\mathrm{R}\cos\psi\,\delta v + \mathfrak{T}\,\varphi\,\delta v + J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\mathrm{R}\cos\psi \end{aligned}\right. \\ x' &= \frac{V z}{v}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{L}\,\mathrm{R}^3 \sin\psi + \mathfrak{M}\,\mathrm{R}^2\varphi\,\sin\psi\cos\psi \\ &+ \mathfrak{N}\,\mathrm{R}\,\varphi^2\sin\psi + \mathfrak{S}\,\mathrm{R}\sin\psi\,\delta v \\ &+ J\left(\frac{z-g}{gz}\right)\mathrm{R}\sin\psi \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad \text{(k)}$$

Die Formeln (h) und (k) entstehen aus (a) und (d), wenn man die lateinischen Buchstaben L, M, N, O, P, S, T mit den correspondirenden deutschen Buchstaben verwechselt und in dem inclavirten Factor von y' das Glied $\mathfrak{q}\,\mathrm{R}^2\varphi$ zusetzt, dagegen alle Glieder weglässt, welche entweder $\Delta\frac{1}{c_1}$ enthalten oder zur dritten Ordnung gehören.

Seitenabweichungen.

69) Wir können aus den Formeln der vorhergehenden Nummer sogleich mehrere bemerkenswerthe Folgerungen ziehen.

In Nro. 47 wurde gefunden, dass alle Strahlen, welche von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, nach der i^{ten} Brechung sich selbst und folglich auch den Hauptstrahl in demjenigen Punkte durchschneiden, dessen Abscisse gleich g_i ist, wodurch in jenem Punkte ein Bild des leuchtenden Punktes entsteht. Dieses Resultat ist jedoch nur in so fern richtig, als die Abweichungen vernachlässigt werden, und die Gleichungen (c) zeigen, dass mit Berücksichtigung dieser die Strahlen sich nicht mehr in einem Punkte schneiden. Betrachten wir nun den Hauptstrahl als eine Axe, auf welche die Lage der übrigen dazu gehörigen Strahlen bezogen wird, so drücken die Grössen y' und x', welche durch die Gleichungen (c) von Nro. 35 und die daraus abgeleiteten Gleichungen (c), (d) und (e) der vorhergehenden Nummer gegeben sind, die der Abscisse z entsprechende Entfernung des allgemeinen farbigen Strahles von jener Axe, parallel mit den Axen der y und x gemessen, aus, und können die *Seitenabweichungen* desselben genannt werden. Je kleiner diese bei dem dazu gehörigen Bilde sind, desto mehr nähert sich die Lage der Strahlen derjenigen, welche sie haben würden, wenn die Abweichungen nicht vorhanden wären.

Die Seitenabweichungen bestehen aus mehreren Theilen, welche einen verschiedenen Einfluss auf die Deutlichkeit des Bildes äussern und daher eine nähere Betrachtung verdienen.

Zuerst haben wir bei der Entwickelung der Gleichungen der gebrochenen Strahlen gesehen, dass diejenigen Glieder, welche bloss X', Y' und φ, oder R, Ψ und φ enthalten, von der Gestalt der brechenden Flächen abhängen. Diese Glieder drücken daher die *Seitenabweichungen wegen der Gestalt* aus. Die übrigen Glieder sind mit $\delta\nu$ multiplicirt und haben ihren Ursprung in der Farbenzerstreuung oder verschiedenen Brechbarkeit der farbigen Strahlen; man kann sie daher die *Seitenabweichungen wegen der Farbenzerstreuung* nennen. Sie enthalten theils nur die ersten Potenzen von X', Y' und φ oder R und φ, theils Potenzen und Producte dieser Grössen. Die ersteren Glieder sind von den Abweichungen wegen der Gestalt unabhängig, die letzteren dagegen drücken den Einfluss aus, welchen die Abweichung wegen der Gestalt auf die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung äussert.

In anderer Beziehung können die Seitenabweichungen in zwei Abtheilungen gebracht werden, je nachdem sie von φ unabhängig sind oder diese Grösse enthalten.

Befindet sich der leuchtende Punkt, von welchem die Strahlen ausgehen, in der Axe des Instrumentes, so ist $\varphi = 0$. In diesem Falle verschwinden daher alle mit φ multiplicirte Glieder und es bleiben nur diejenigen übrig, welche von φ unabhängig sind. Hiernach drücken die letzteren Glieder die Seitenabweichungen für einen in der Axe befindlichen leuchtenden Punkt aus und können dem zu Folge die *Seitenabweichungen in der Axe* genannt werden.

Dagegen sind die von φ abhängigen Glieder nur vorhanden, wenn sich der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe befindet, und nehmen desto mehr zu, je grösser φ ist, d. h. je mehr sich der leuchtende Punkt von der Axe entfernt. Jene Glieder bestimmen daher *die Seitenabweichungen ausser der Axe.* Da übrigens die Ausdrücke der Seitenabweichungen aus der Summe der verschiedenen Abweichungen bestehen, so gelten diejenigen Glieder, welche die Seitenabweichungen in der Axe ausdrücken, auch für die ausserhalb der Axe liegenden Punkte, und es kommen bei diesen nur noch diejenigen Glieder hinzu, welche wir mit dem Namen der Seitenabweichungen ausser der Axe belegt haben.

Nach diesen Distinctionen können wir nun leicht angeben, zu welcher Gattung von Abweichungen die verschiedenen Glieder in den Ausdrücken von y' und x' gehören, wobei wir zur Abkürzung die in der vorhergehenden Nummer eingeführten Bezeichnungen gebrauchen wollen.

Hiernach sind die ersten mit L multiplicirten Glieder jener Ausdrücke die bedeutendsten Theile von den Seitenabweichungen wegen der Gestalt in der Axe.

Die beiden folgenden von M, O und N abhängigen Glieder sind die bedeutendsten Theile der Seitenabweichungen wegen der Gestalt ausser der Axe.

Die vierten mit Q multiplicirten Glieder enthalten kleine Correctionen, welche an den Seitenabweichungen wegen der Gestalt in und ausser der Axe angebracht werden müssen, um ihre Werthe genauer berechnen zu können.

Die fünften mit dem Coefficienten S versehenen Glieder sind die bedeutendsten Theile der Seitenabweichungen wegen der Farbenzerstreuung in der Axe.

Die beiden folgenden mit s und U multiplicirten Glieder enthalten kleine Correctionen, welche an den Seitenabweichungen wegen der Farbenzerstreuung in der Axe angebracht werden müssen, um das Quadrat von $\delta\nu$ und den Einfluss, welchen die Abweichung wegen der Gestalt darauf äussert, zu berücksichtigen.

Das achte von T abhängige Glied in dem Ausdrucke von y' ist der bedeutenste Theil der Seitenabweichung wegen der Farbenzerstreuung ausser der Axe, wodurch der farbige Rand an den Umrissen der Gegenstände hervorgebracht wird.

Die beiden folgenden mit t und W multiplicirten Glieder enthalten kleine Correctionen, um bei der Berechnung des farbigen Randes das Quadrat von $\delta\nu$ und die Abweichung wegen der Gestalt zu berücksichtigen.

Die beiden letzten Glieder in den Ausdrücken von y' und x' endlich, in denen der Factor $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ vorkommt, geben die Aenderungen an, welche y' und x' ohne Rücksicht auf die Abweichungen

dadurch erleiden, dass die Strahlen nicht gerade in der Entfernung g_i von der i^{ten} brechenden Fläche betrachtet werden, in welcher das Bild stattfinden würde, wenn keine Abweichungen vorhanden wären, sondern in einer Entfernung z_i, die jedoch so beschaffen seyn muss, dass $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist. Diese Glieder sind diejenigen der ersten Ordnung, welche in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen vorkommen und gehören daher eigentlich nicht zu den Abweichungen; wir müssen sie jedoch um deswillen unter denselben begreifen, weil es erforderlich ist, die Entfernung der Strahlen von dem Hauptstrahle in der Nähe des letzten Bildes zu berechnen, diese aber ebenso von jenen Gliedern wie von den eigentlichen Abweichungen abhängt, mit denen sie nach der gemachten Voraussetzung von einerlei Ordnung sind.

Die Formeln (e) geben uns ein Mittel an die Hand, die Seitenabweichungen durch eine geometrische Construction zu versinnlichen.

Der Ausdruck von $\acute{y}$ besteht nämlich theils aus Gliedern, die von Ψ unabhängig sind, theils aus solchen, welche die Cosinus dieser Grösse und ihrer Vielfachen enthalten. Dagegen kommen in dem Ausdrucke von $\acute{x}$ nur Glieder vor, welche den letzteren correspondiren und aus den Sinus derselben Winkel mit anderen Coefficienten bestehen. Hiernach haben zwei dieser correspondirenden Glieder die Form:

$$\left.\begin{aligned}\acute{y} &= B\cos m\Psi\\ \acute{x} &= A\sin m\Psi\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (a)$$

Denken wir uns nun mit den Halbmessern B und A zwei concentrische Kreise construirt und durch den Mittelpunkt derselben zwei Axen parallel mit den Axen der $\acute{y}$ und der $\acute{x}$, nehmen wir ferner an, dass durch den Mittelpunkt eine Linie gezogen wird, welche mit der Axe der $\acute{y}$ den Winkel $m\Psi$ einschliesst, und dass von den Durchschnittspunkten derselben mit den beiden Kreisen zwei Perpendikel respective auf die Axen der $\acute{y}$ und der $\acute{x}$ gefällt werden, so sind diese Perpendikel die von den betreffenden Gliedern herrührenden Theile von $\acute{y}$ und $\acute{x}$. Je zwei correspondirende Glieder in den Ausdrücken von $\acute{y}$ und $\acute{x}$ können auf diese Weise construirt gedacht werden.

Der ganze Werth von $\acute{y}$ besteht sodann aus der Summe der von Ψ unabhängigen Glieder und der durch die vorhergehende Construction erhaltenen einzelnen Theile, der ganze Werth von $\acute{x}$ dagegen bloss aus der Summe der einzelnen Theile, welche die vorhergehende Construction giebt.

Bestände jeder der Ausdrücke von $\acute{y}$ und $\acute{x}$ bloss aus einem Gliede von der in (a) angenommenen Form, dächten wir uns ferner die gebrochenen Strahlen in der Entfernung z_i von der letzten

brechenden Fläche durch eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene geschnitten, so würden die Durchschnittspunkte aller Strahlen, welche auf die erste brechende Fläche in der Entfernung *R* vom Hauptstrahle fallen, im Umfange einer Ellipse liegen, deren halbe Axen *B* und *A* sind. Die Gleichungen (a) geben nämlich

$$\frac{y'}{B} = \cos m\,\Psi$$

$$\frac{x'}{A} = \sin m\,\Psi$$

folglich, wenn man die Quadrate beider Gleichungen addirt,

$$\frac{y'^2}{B^2} + \frac{x'^2}{A^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

welches die Gleichung der erwähnten Ellipse ist.

Jedes Paar von Gliedern in den Ausdrücken von y' und x' würde eine solche Ellipse geben. Wir können uns daher die Werthe von y' und x' auch aus den von Ψ unabhängigen Gliedern und aus den Coordinaten der den einzelnen Gliedern zugehörigen Ellipsen zusammengesetzt denken.

Bei einigen Gliedern werden *A* und *B* einander gleich, wodurch sich die Ellipsen in Kreise verwandeln.

Abweichungen des Hauptstrahles.

70) Es bleibt jetzt noch übrig, auf ähnliche Weise die Abweichungen des Hauptstrahles zu bestimmen, da wir denselben als eine Axe angenommen haben, worauf wir die Lage der übrigen Strahlen beziehen.

Mit Vernachlässigung der zu den höheren Ordnungen gehörigen Glieder reduciren sich die in (a) von Nro. 68 gegebenen Gleichungen des Hauptstrahles auf folgende, welche ohne Rücksicht auf die Abweichungen stattfinden:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i z_i \phi_1}{\nu_i}\left[1 - \frac{\nu_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i\right] \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Die übrigen Glieder in der ersten der allegirten Formeln geben die Aenderungen an, welche die Ordinate des Hauptstrahles in der Nähe des Bildes durch die Grössen der höheren Ordnungen erleidet, und drücken daher die *Abweichungen des Hauptstrahles* aus. Sie bestehen, ebenso wie die Seitenabweichungen, aus verschiedenen Theilen.

Diejenigen Glieder nämlich, welche Potenzen von ϕ_1 enthalten, bestimmen die Abweichung des Hauptstrahles wegen der Gestalt.

Die von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängigen Glieder geben die Aenderung an, welche in der Lage des Hauptstrahles durch eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes hervorgebracht wird.

Aus dem bei den Seitenabweichungen angegebenen Grunde könnte das mit $\left(\frac{z-g}{g\,z}\right)$ multiplicirte Glied, welches in (a) vorkommt, ebenfalls den Abweichungen beigezählt werden; da jedoch hier die Glieder aller Ordnungen in einer Formel enthalten sind, so ist diese Distinction zwecklos.

Uebrigens müssen wir in Bezug auf die Farbenzerstreuung noch eine Bemerkung machen. In Nro. 34 wurde nämlich der Hauptstrahl von mittlerer Brechbarkeit angenommen, daher unter den Abweichungen desselben keine vorkommen, die sich auf die verschiedene Brechbarkeit der farbigen Strahlen beziehen. Hieraus folgt jedoch nicht, dass jene Abweichungen nicht existiren; sie sind vielmehr wirklich vorhanden, da der Hauptstrahl, ebenso wie alle übrige Strahlen, in der Natur aus unzählig vielen farbigen Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zusammengesetzt ist. Die Folge wird jedoch zeigen, dass es bequemer ist, die hierdurch entstehenden Abweichungen mit denen der übrigen Strahlen in einer Formel zu begreifen und daher unter jenen verschiedenen farbigen Strahlen den von mittlerer Brechbarkeit als Hauptstrahl auszuwählen. Die Abweichung des Hauptstrahles wegen der Farbenzerstreuung ist demnach unter den Seitenabweichungen enthalten und bildet darin die von T, t und W abhängigen Glieder, welche sich auf den farbigen Rand beziehen.

Wollte man den Hauptstrahl nicht von mittlerer Brechbarkeit annehmen, so müsste man jene Glieder dem Ausdrucke von $y''_{,}$ zusetzen, dieselben dagegen bei $y'_{,}$ weglassen.

Längenabweichungen.

71) Wir haben in Nro. 2 durch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ diejenigen Werthe von y und z bezeichnet, welche dem Durchschnittspunkte des gebrochenen Strahles mit der Ebene der $y\,z$ entsprechen, für welche mithin $x = 0$ ist.

Zählen wir nun, wie in Nro. 68, die Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles von dem dazu gehörigen Hauptstrahle an, und bezeichnen der Analogie nach durch

$\mathfrak{f}'$ den jenem Durchschnittspunkte zugehörigen Werth von y',

so erhalten wir $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{f}'$ sehr leicht aus den dortigen Gleichungen (d), wenn wir bemerken, dass

$$\frac{z-g}{g\,z} = \frac{1}{g} - \frac{1}{z}$$

ist, wenn wir sodann in jenen Gleichungen

$$x' = 0$$
$$y' = \mathfrak{f}'$$
$$z = \mathfrak{g}$$

setzen, aus der zweiten derselben den Werth von $\left(\frac{1}{\mathrm{g}} - \frac{1}{g}\right)$ suchen und diesen in der ersten Gleichung substituiren.

Hierdurch wird

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{g}} - \frac{1}{g} &= \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned}
&L\mathrm{R}^2 + M\mathrm{R}\varphi \cos\Psi + N\varphi^2 \\
&+ Q\left[\begin{aligned}&(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)^2 + 4(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi \\ &+ 4\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 \cos^2\Psi\end{aligned}\right] \\
&+ S\delta v + s\delta v^2 + U\delta v\left[\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2 + 2\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi\right]
\end{aligned}\right. \\
\mathfrak{f}' &= \frac{V\mathrm{g}}{v}\left\{\begin{aligned}
&\frac{M}{2}\mathrm{R}^2\varphi + (O - N)\mathrm{R}\varphi^2 \cos\Psi \\
&+ Q\mathrm{K}\varphi\left[\begin{aligned}&\mathrm{R}^4 + 2\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 + 4(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi \\ &+ 4\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 \cos^2\Psi\end{aligned}\right] \\
&+ U\mathrm{K}\varphi\delta v\left[\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi\right] \\
&+ T\varphi\delta v + t\varphi\delta v^2 + W\varphi^3\delta v
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Wären keine Abweichungen vorhanden, so würden alle Strahlen die Ebene der yz in der Entfernung g durchschneiden; die erste der vorhergehenden Formeln giebt daher die Aenderung an, welche $\frac{1}{g}$ durch die Abweichungen erleidet, oder diejenige Grösse, welche wir bei der früheren Entwickelung mit $\Delta\frac{1}{g} + \Delta^2\frac{1}{g} + \delta\frac{1}{g} + \delta^2\frac{1}{g} + \delta\Delta\frac{1}{g}$ bezeichnet haben.

Ist g nicht sehr gross, so ist nicht allein $\left(\frac{1}{\mathrm{g}} - \frac{1}{g}\right)$, sondern auch $(\mathrm{g} - g)$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g}$, deren Potenzen und Producte in andere Abweichungen nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung ist es daher erlaubt, in der ersten Formel (a) $\left(\frac{1}{\mathrm{g}} - \frac{1}{g}\right)$ mit $-\left(\frac{\mathrm{g} - g}{g^2}\right)$ und in der zweiten g mit g zu verwechseln, wodurch sich dieselben in die folgenden verwandeln:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{g} - g &= -\frac{g^2}{J}\left\{\begin{aligned}
&L\mathrm{R}^2 + M\mathrm{R}\varphi \cos\Psi + N\varphi^2 \\
&+ Q\left[\begin{aligned}&(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)^2 + 4(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi \\ &+ 4\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 \cos^2\Psi\end{aligned}\right] \\
&+ S\delta v + s\delta v^2 + U\delta v\left[\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2 + 2\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi\right]
\end{aligned}\right. \\
\mathfrak{f}' &= \frac{Vg}{v}\left\{\begin{aligned}
&\frac{M}{2}\mathrm{R}^2\varphi + (O - N)\mathrm{R}\varphi^2 \cos\Psi \\
&+ Q\mathrm{K}\varphi\left[\begin{aligned}&\mathrm{R}^4 + 2\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 + 4(\mathrm{R}^2 + \mathrm{K}^2\varphi^2)\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi \\ &+ 4\mathrm{R}^2\mathrm{K}^2\varphi^2 \cos^2\Psi\end{aligned}\right] \\
&+ U\mathrm{K}\varphi\delta v\left[\mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\mathrm{K}\varphi \cos\Psi\right] \\
&+ T\varphi\delta v + t\varphi\delta v^2 + W\varphi^3\delta v
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Diese Formeln sind einfacher, als die Formeln (a), weil sie unmittelbar die Aenderung angeben, welche g durch die Abweichungen erleidet, und weil der Ausdruck von $\mathfrak{f}'$ nur Grössen enthält, welche

als gegeben betrachtet werden, statt dass in der zweiten Formel (a) statt $\mathfrak{g}$ zuerst derjenige Werth substituirt werden muss, welcher aus der ersten folgt. Dagegen ist der Gebrauch der Formeln (b) auf diejenigen Fälle beschränkt, in welchen g nicht sehr gross wird, statt dass die in (a) erhaltenen selbst für $g = \infty$ noch brauchbar bleiben.

Die vorhergehenden Ausdrücke von $\mathfrak{f}'$ zeigen, dass die Strahlen, welche von demselben leuchtenden Punkte ausgehen, im Allgemeinen den dazu gehörigen Hauptstrahl nicht durchschneiden, wie es der Fall seyn würde, wenn keine Abweichungen existirten. Da sich nämlich der Hauptstrahl ganz in der Ebene der yz befindet, so müsste $\mathfrak{f}' = 0$ seyn, wenn jener von dem allgemeinen farbigen Strahle durchschnitten werden sollte, welches im Allgemeinen keineswegs stattfindet. Hiervon sind nur die speciellen Fälle ausgenommen, in welchen einmal $\varphi = 0$ und dann $\Psi = 0$ oder $\Psi = \pi$ ist, d. h. in welchen entweder der leuchtende Punkt in der Axe des Instrumentes oder der einfallende Strahl in der Ebene der yz liegt.

Befindet sich der leuchtende Punkt in der Axe des Instrumentes, so reduciren sich die Formeln (a) auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{g}} - \frac{1}{g} &= \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned} &L R^2 + Q R^4 \\ &+ S\,\delta v + s\,\delta v^2 + U R^2\,\delta v \end{aligned}\right. \\ \mathfrak{f}' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (c)$$

Dagegen werden die Formeln (b) in diesem Falle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{g} - g &= -\frac{g^2}{J}\left\{\begin{aligned} &L R^2 + Q R^4 \\ &+ S\,\delta v + s\,\delta v^2 + U R^2\,\delta v \end{aligned}\right. \\ \mathfrak{f}' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (d)$$

wegen deren Anwendbarkeit die oben gemachten Bemerkungen ebenfalls gelten.

Es ist hieraus ersichtlich, dass alle Strahlen von einerlei Farbe, welche von einem in der Axe des Instrumentes liegenden Punkte ausgehen und in derselben Entfernung von jener Axe auf die erste brechende Fläche fallen, für welche mithin R und δv gleiche Werthe haben, die Axe des Instrumentes in einem und demselben Punkte durchschneiden. Die Grösse $(\mathfrak{g} - g)$ drückt die Aenderung aus, welche die Entfernung dieses Durchschnittspunktes durch die Abweichungen erleidet und wird die *Längenabweichung* genannt. Da sie sich jedoch bloss auf einen in der Axe befindlichen Punkt bezieht, so werde ich sie die *Längenabweichung in der Axe* nennen. Sie besteht nach den vorhergehenden Ausdrücken aus mehreren Gliedern, welche sich theils auf die Abweichung wegen der Gestalt, theils auf die Farbenzerstreuung beziehen.

Das von L abhängige Glied ist nämlich der bedeutendste Theil der Längenabweichung wegen der Gestalt.

Das mit Q multiplicirte Glied enthält eine kleine Correction, welche an der Längenabweichung wegen der Gestalt angebracht werden muss, um sie genauer berechnen zu können.

Das mit dem Coefficienten S versehene Glied ist der bedeutendste Theil der Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung.

Die von s und U abhängigen Glieder endlich enthalten kleine Correctionen, welche an der Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung angebracht werden müssen, um das Quadrat von δv und den Einfluss, welchen die Abweichung wegen der Gestalt darauf äussert, zu berücksichtigen.

Es ist daraus ersichtlich, dass sehr nahe die Längenabweichung wegen der Gestalt dem Quadrate von R proportional, die Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung dagegen von R unabhängig ist.

Nach demjenigen, was wir oben entwickelt haben, können wir die Benennung *Längenabweichung* in dem Sinne, dass darunter der Unterschied zwischen den Vereinigungsweiten der Strahlen mit und ohne Rücksicht auf die Abweichungen verstanden wird, nicht auf den allgemeinen Fall ausdehnen, in welchem sich der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe des Instrumentes befindet, weil alsdann der Hauptstrahl an die Stelle der Axe gesetzt werden müsste, dieser aber nicht von allen dazu gehörigen Strahlen durchschnitten wird. Will man daher die Benennung *Längenabweichung* allgemein gebrauchen, so kann man darunter den durch die Formeln (a) und (b) gegebenen Werth von $(\mathfrak{g} - g)$ verstehen. Um jedoch die Lage des Strahles vollständig zu bestimmen, ist ausser jener Grösse die Kenntniss von $\mathfrak{f}'$ erforderlich, dessen Werth durch die allegirten Formeln ebenfalls gegeben ist.

So wenig die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen im Allgemeinen den dazu gehörigen Hauptstrahl durchschneiden, wenn jener Punkt ausserhalb der Axe liegt, eben so wenig findet dieses bei den übrigen Strahlen unter sich statt. Wir werden uns in der Folge mit ihren Duschschnitten noch näher beschäftigen, gegenwärtig wollen wir dieselben nur bei denjenigen Strahlen suchen, bei welchen R unveränderlich ist und Ψ der Reihe nach die Werthe 0, $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3}{2}\pi$ erhält. Zu diesem Ende bringe ich die Gleichungen (d) von Nro. 68 unter die Form:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{Vz}{v}\left\{\begin{aligned} &A + B\cos\Psi + C\cos^2\Psi + D\cos^3\Psi \\ &+ J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right) R\cos\Psi \end{aligned}\right. \\ x' &= \frac{Vz}{v}\sin\Psi\left\{\begin{aligned} &E + F\cos\Psi + G\cos^2\Psi \\ &+ J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right) R \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (e)$$

Setzt man hierin zuerst $\Psi = 0$, dann $\Psi = \pi$, so wird für den ersten Werth

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{Vz}{v}\left[A + B + C + D + J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right) R\right] \\ x' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (f)$$

und für den zweiten Werth

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= \frac{Vz}{v}\left[A - B + C - D - J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)R\right] \\ \acute{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (g)$$

Die beiden Strahlen, welchen die Gleichungen (f) und (g) zugehören, liegen in der Ebene der $\acute{y}z$ und durchschneiden sich daher nothwendig. Um ihren Durchschnitt zu finden, müssen wir die beiden Ausdrücke von $\acute{y}$ einander gleich setzen. Diess giebt, wenn

$z_{,}$ die Abscisse des Durchschnittspunktes bezeichnet,

$$\frac{1}{z_{,}} - \frac{1}{g} = \frac{B + D}{JR} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

Setzen wir ferner in (e) zuerst $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und dann $\Psi = \frac{3\pi}{2}$, so giebt der erste Werth

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= \frac{Vz}{v} A \\ \acute{x} &= \frac{Vz}{v}\left[E + J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)R\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (i)$$

der zweite Werth dagegen giebt

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= \frac{Vz}{v} A \\ \acute{x} &= -\frac{Vz}{v}\left[E + J\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)R\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (k)$$

Die beiden Strahlen, welchen die Gleichungen (i) und (k) zugehören, schneiden sich in einem Punkte, der in der Ebene der $\acute{y}z$ liegt. Setzt man nämlich $\acute{x} = 0$ und bezeichnet durch

$z_{,,}$ die Abscisse, welche diesem Werthe von $\acute{x}$ entspricht,

so erhält man aus jedem Paare jener Gleichungen dieselben Werthe von $\acute{y}$ und $z_{,,}$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \acute{y} &= \frac{Vz_{,,}}{v} A \\ \frac{1}{z_{,,}} - \frac{1}{g} &= \frac{E}{JR} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (l)$$

woraus folgt, dass $z_{,,}$ die Abscisse des Durchschnittspunktes beider Strahlen ist.

Die durch die Gleichungen (h) und (l) erhaltenen Werthe von $z_{,}$ und $z_{,,}$ sind die Vereinigungsweiten beider Paare von Strahlen mit Rücksicht auf die Abweichungen. Um sie durch bekannte Grössen auszudrücken, ist weiter nichts mehr erforderlich, als die Werthe von B, D und E zu substituiren. Wir müssen hierbei bemerken, dass nach der in (e) angenommenen Form B und D die Coefficienten von $\cos\Psi$ und $\cos^3\Psi$ in dem inclavirten Factor des Ausdruckes von $\acute{y}$, E dagegen den Coefficienten von $\sin\Psi$ in dem inclavirten Factor

des correspondirenden Ausdruckes von x' bezeichnet, wobei jedoch die von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ abhängigen Glieder unberücksichtigt bleiben.

Hierdurch geben die Gleichungen (h) und (l) in Verbindung mit (d) von Nro. 68:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{z_{,}} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned}&L R^2 + O\phi^2\\&+Q(R^4+10R^2K^2\phi^2+5K^4\phi^4)\\&+S\delta\nu+s\delta\nu^2\\&+U\delta\nu(R^2+3K^2\phi^2)\end{aligned}\right.\\ \frac{1}{z_{,,}} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned}&L R^2 + N\phi^2\\&+Q(R^4+2R^2K^2\phi^2+K^4\phi^4)\\&+S\delta\nu+s\delta\nu^2\\&+U\delta\nu(R^2+K^2\phi^2)\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} . \quad (m)$$

Nehmen wir das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe von $\frac{1}{z_{,}}$ und $\frac{1}{z_{,,}}$ und bezeichnen dasselbe durch $\frac{1}{z_{,,,}}$, so ist

$$\frac{1}{z_{,,,}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned}&L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\phi^2\\&+Q(R^4+6R^2K^2\phi^2+3K^4\phi^4)\\&+S\delta\nu+s\delta\nu^2\\&+U\delta\nu(R^2+2K^2\phi^2)\end{aligned}\right\} . \quad (n)$$

Diese Formel drückt daher den mittleren Werth von $\frac{1}{z}$ für die Vereinigungspunkte der beiden Paare von Strahlen aus, für welche bei unverändertem Werthe von R einmal $\Psi = 0$ und $\Psi = \pi$, und dann $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \frac{3\pi}{2}$ ist.

Abweichungen bei den Instrumenten der ersten Art.

72) Wir haben in Nro. 60 die optischen Werkzeuge in zwei Classen getheilt und zu der ersten derselben diejenigen gerechnet, bei welchen ein Bild des Gegenstandes auf einer Projectionsebene entworfen wird, die senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht.

Bei diesen Instrumenten finden die Formeln von Nro. 68 unmittelbar ihre Anwendung. Nennen wir nämlich

> z_i, oder z nach der in jener Nummer gebrauchten Bezeichnung, die Entfernung der Projectionsebene von der letzten brechenden Fläche, *vor* derselben angenommen,

so ist z_i die gemeinschaftliche Abscisse der Durchschnittspunkte aller Strahlen mit der Projectionsebene, welche von g_i nur um eine solche Grösse verschieden seyn kann, dass entweder $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ oder $(z-g)_i$ von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist, da das Bild des Gegenstandes auf die Projectionsebene fallen soll. Die allegirten Formeln geben

daher die Coordinaten des Durchschnittes des Hauptstrahles mit der Projectionsebene und die Seitenabweichungen der übrigen dazu gehörigen Strahlen, welche auf der Projectionsebene parallel mit den Axen der y' und x' stattfinden.

Abweichungen bei den Instrumenten der zweiten Art, wenn sich das Auge unveränderlich in der Axe derselben befindet.

73) Zu den Instrumenten der zweiten Art haben wir in Nro. 60 diejenigen gerechnet, bei denen die Lichtstrahlen nach der letzten Brechung unmittelbar in das hinter denselben befindliche Auge fallen. Soll das Auge durch ein solches Instrument deutlich sehen, so müssen beide so eingerichtet seyn, dass das letzte Bild, welches nach den verschiedenen Brechungen im Auge entsteht, auf die Netzhaut fällt. Es ist daher nothwendig, die Durchschnittspunkte der Strahlen mit der Netzhaut zu suchen, um die Abweichungen, welche auf derselben stattfinden, auf eine ähnliche Weise zu bestimmen, wie es bei den Instrumenten der ersten Art in Bezug auf die Projectionsebene geschehen ist.

Obgleich die brechenden Flächen im Auge und die Netzhaut, strenge genommen, nicht alle sphärisch sind, so können sie doch bei dieser Untersuchung um deswillen als Kugelflächen vorausgesetzt werden, weil die im Auge entstehenden Abweichungen nur klein und mit denjenigen von einerlei Ordnung sind, welche durch die Oculare hervorgebracht werden. Aus demselben Grunde ist es auch erlaubt, hierbei den Umstand unberücksichtigt zu lassen, dass die Crystall-Linse aus unzählig vielen Schichten von veränderlicher Gestalt und Dichtigkeit besteht, welcher Umstand nur dann der Rechnung unterworfen werden könnte, wenn das Gesetz bekannt wäre, wonach beide sich abändern, wenn man von einer Schichte zur folgenden übergeht. Ich betrachte daher die Crystall-Linse als eine homogene, von sphärischen Flächen begrenzte Masse.

Nimmt man nun zuerst wie in Nro. 62 an, dass sich das Auge, ohne seinen Ort zu verändern, in der Axe des Instrumentes befindet, so können beide zusammengenommen als ein System von sphärischen brechenden Flächen angesehen werden, auf welches daher die Formeln von Nro. 68 anwendbar sind, wenn man sie auf sämmtliche Flächen im Instrumente und Auge ausdehnt.

Bezeichnen wir durch

z_i die auf der Axe gemessene Entfernung der Netzhaut von der letzten brechenden Fläche im Auge, *vor* derselben angenommen;

verlegen wir ferner den Ursprung der Coordinaten in den Scheitel der Netzhaut, d. h. in denjenigen Punkt, in welchem die Axe die Netzhaut durchschneidet, und nennen

z_i' die von diesem Ursprunge an gezählte Abscisse,

so muss in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen z_i mit $(z+z')_i$ verwechselt werden, um sie auf den neuen Ursprung zu reduciren. Ausserdem können wir bemerken, dass jene Gleichungen nur gebraucht werden, um die Durchschnitte der Strahlen mit der Netzhaut zu bestimmen. Unter dieser Voraussetzung ist wegen der Kleinheit des Gesichtsfeldes, welches das Instrument gestattet, z_i' eine kleine Grösse, die von der Krümmung der Netzhaut innerhalb des auf derselben entstehenden Bildes abhängt und mit den Abweichungen im Auge und den nicht aufgehobenen Abweichungen des Instrumentes von einerlei Ordnung ist. Vernachlässigt man daher, so wie es bisher geschehen ist, die Potenzen und Producte jener Abweichungen, so kann ein Gleiches auch in Bezug auf z_i' stattfinden. Dieses vorausgesetzt, bringe ich die in (b) von Nro. 34 und (c) von Nro. 35 gegebenen Gleichungen des Hauptstrahles und des allgemeinen farbigen Strahles unter die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= z_i\left[\frac{V_i}{v_i}\,\phi_1 + (y'') - \frac{v_i K_i \phi_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\right] \\ x''_i &= 0 \\ y'_i &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\right] \\ x'_i &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(a)}$$

wobei (y''), (y), (x) und die mit $\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i$ multiplicirten Glieder von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen sind, so dass die Producte derselben in z_i' vernachlässigt werden. Hiernach verwandeln sich die Gleichungen (a) durch die Verwechselung von z_i mit $(z+z')_i$ in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= z_i\left\{\begin{aligned} &\frac{V_i\phi_1}{v_i} + (y'') - \frac{v_i K_i \phi_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{V_i z_i' \phi_1}{v_i z_i}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 z_i}\right] \end{aligned}\right. \\ x''_i &= 0 \\ y'_i &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - \frac{Y'_1 z_i'}{V_i z_i^2}\right] \\ x'_i &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - \frac{X'_1 z_i'}{V_i z_i^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(b)}$$

Der Ursprung der Coordinaten y'_i und x'_i ist in dem Hauptstrahle angenommen; legen wir ihn in die Axe des Instrumentes und bezeichnen, so wie es früher geschehen ist, die Coordinaten in Bezug auf den letzteren Ursprung mit y_i und x_i, so ist

$$\left.\begin{aligned} y_i &= y''_i + y'_i \\ x_i &= x''_i + x'_i = x'_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Die Gleichungen (c) bestimmen die Lage des allgemeinen farbigen Strahles in der Nähe des auf der Netzhaut entstehenden Bildes, wenn man darin die in (b) gefundenen Werthe substituirt.

Wir müssen jetzt die Gleichung der Netzhaut suchen. Da dieselbe als eine sphärische Fläche betrachtet wird, deren Mittelpunkt in der Axe des Instrumentes liegt und deren Scheitel mit dem Ursprunge der z_i' zusammenfällt, so ist, wenn

$\varkappa$ den als constant vorausgesetzten Krümmungshalbmesser der Netzhaut bezeichnet, und ihre Concavität, ebenso wie bei den brechenden Flächen, nach der Richtung der positiven Abscissen angenommen wird,

die Gleichung der Netzhaut

$$x_i^2 + y_i^2 = 2\varkappa\, z_i' - z_i'^2$$

Nach dem oben Gesagten werden aber die Potenzen von z_i' vernachlässigt, die vorhergehende Gleichung giebt daher

$$z_i' = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Der Durhschnittspunkt des allgemeinen farbigen Strahles mit der Netzhaut liegt in beiden zugleich; die Gleichungen (c) und (d) finden daher in Bezug auf denselben zu gleicher Zeit statt, und es ist nur erforderlich, aus ihnen die Abscisse z_i' zu eliminiren, um die Coordinaten y_i und x_i jenes Durchschnittspunktes zu erhalten.

Zuerst giebt die Gleichung (d), wenn man darin statt der Coordinaten die in (c) gegebenen Werthe substituirt,

$$z_i' = \frac{y_i''^2 + 2 y_i'' y_i' + y_i'^2 + x_i'^2}{2\varkappa}$$

Die Gleichungen (b) zeigen aber, dass nur in y_i'' ein Glied der ersten Ordnung vorkommt, nämlich

$$y_i'' = \frac{V_i\, z_i\, \varphi_1}{v_i}$$

Die übrigen Glieder von y_i'' sind ebenso wie y_i' und x_i' von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen. Da nun nach den angenommenen Grundsätzen die Potenzen der letzteren und ihre Producte in φ_1 vernachlässigt werden, so reducirt sich der vorhergehende Ausdruck von z_i' auf den folgenden:

$$z' = \frac{y_i''^2}{2\varkappa} = \frac{V_i^2\, z_i^2\, \varphi_1^2}{2\, v_i^2\, \varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Diese Gleichung bestimmt die Abscisse des Durchschnittspunktes zwischen dem allgemeinen farbigen Strahle und der Netzhaut. Es ist daraus ersichtlich, dass jene Abscisse von Y_1' und X_1' unabhängig und daher für sämmtliche, von demselben leuchtenden Punkte ausgehende Strahlen einerlei ist, wenn nur diejenigen Glieder berücksichtigt werden, welche wir nach den angenommenen Grundsätzen beibehalten.

Durch Substitution des in (e) erhaltenen Werthes von z_i' entstehen aus den Gleichungen (b) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
y_i'' &= z_i \left\{ \begin{aligned} &\frac{V_i \phi_1}{v_i} + (y'') - \frac{v_i K_i \phi_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{V_i}{v_i} \cdot \frac{V_i^2 z_i \phi_1^3}{2 v_i^2 \varkappa}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 z_i}\right] \end{aligned} \right. \\
x_i'' &= 0 \\
y_i' &= z_i \left[(y) - \frac{Y_1'}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i - \frac{V_i}{v_i} \cdot \frac{Y_1' \phi_1^2}{2 v_i \varkappa} \right] \\
x_i' &= z_i \left[(x) - \frac{X_1'}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i - \frac{V_i}{v_i} \cdot \frac{X_1' \phi_1^2}{2 v_i \varkappa} \right]
\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Vermöge der Gleichungen (c) geben die in (f) gefundenen Werthe die Coordinaten $(y_i'' + y_i')$ und $(x_i'' + x_i')$, welche dem Durchschnittspunkte des allgemeinen farbigen Strahles mit der Netzhaut zugehören. Dagegen entsprechen die in (f) erhaltenen Werthe von y_i'' und x_i'' dem Durchschnittspunkte des Hauptstrahles, weil die Abscisse z_i' für sämmtliche von demselben leuchtenden Punkte ausgehende Strahlen einerlei ist. Da hiernach die Durchschnittspunkte des allgemeinen farbigen Strahles und des Hauptstrahles mit der Netzhaut nunmehr bestimmt sind, so können daraus die Seitenabweichungen des ersteren leicht gefunden werden. Schätzen wir ihre Grösse nach dem Unterschiede der Coordinaten jener Durchschnittspunkte, so sind ihre Werthe

$$(y_i'' + y_i') - y_i'' = y_i'$$
$$(x_i'' + x_i') - x_i'' = x_i'$$

woraus folgt, dass die beiden letzten Formeln (f) unmittelbar die Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles auf der Netzhaut ausdrücken.

Wir können jedoch die Seitenabweichungen noch auf eine andere Weise bestimmen. Denken wir uns nämlich in der Ebene der $y z$, in welcher der Hauptstrahl liegt, einen grössten Kreis auf der Netzhaut gezogen und auf denselben ein Perpendikel aus dem Durchschnittspunkte des allgemeinen farbigen Strahles gefällt, welches ebenfalls der Bogen eines grössten Kreises ist, so können wir dieses Perpendikel und den zwischen seinem Fusspunkte und dem Durchschnitte des Hauptstrahles liegenden Bogen des in der Ebene der $y z$ gezogenen grössten Kreises als rechtwinkelige sphärische Coordinaten $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{y}_i$ betrachten, durch welche die Lage der beiden Durchschnittspunkte gegen einander bestimmt wird und welche daher die auf der Oberfläche der Netzhaut gemessenen Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles angeben.

Da die Ebene der $y z$ die Oberfläche der Netzhaut senkrecht durchschneidet und die Coordinaten $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{y}_i$ sehr klein sind, so ist

leicht einzusehen, dass das sphärische Perpendikel $\mathfrak{x}_i$ von dem durch die letzte Formel (f) gegebenen geradlinigen Perpendikel x'_i nur um eine Grösse verschieden ist, welche nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt wird, und dass die Fusspunkte von beiden nur um eine solche Grösse von einander entfernt sind; $\mathfrak{y}_i$ kann daher mit der geraden Linie verwechselt werden, welche zwischen dem Durchschnitte des Hauptstrahles und dem Fusspunkte des Perpendikels x'_i liegt.

Die rechtwinkeligen Coordinaten dieses Fusspunktes in der Ebene der $y\,z$ sind nach dem Vorhergehenden

$$y_i = y'_i + y''_i \text{ und } z'_i$$

die des Durchschnittes des Hauptstrahls dagegen

$$y''_i \text{ und } z'_i$$

Hierdurch wird die zwischen beiden Punkten gezogene gerade Linie:

$$\mathfrak{y}_i = \sqrt{(y_i - y''_i)^2 + (z'_i - z'_i)^2} = y'_i$$

Folglich sind die sphärischen Coordinaten:

$$\mathfrak{y}_i = y'_i$$
$$\mathfrak{x}_i = x'_i$$

so dass die Seitenabweichungen, wenn sie auf die letztere Weise geschätzt werden, mit den durch die erste Methode bestimmten zusammenfallen.

Vergleichen wir nun die Formeln (f) mit denen, welche wir in (a) angenommen haben, um die Formeln (b) von Nro. 34 und (c) von Nro. 35 abgekürzt schreiben zu können, so sehen wir, dass zu diesen noch die folgenden Glieder hinzukommen:

$$y''_i = + \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot \frac{V_i^2 z_i \phi_1^3}{2 v_i^2 \varkappa}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 z_i}\right]$$

$$y'_i = - \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot \frac{Y'_1 \phi_1^2}{2 v_i \varkappa}$$

$$x'_i = - \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot \frac{X'_1 \phi_1^2}{2 v_i \varkappa}$$

Diese Glieder vereinigen sich mit denjenigen, welche in (y''), (y') und (x') enthalten sind und dieselben Argumente haben. In den allegirten Formeln kommen nämlich folgende Glieder vor:

$$y''_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot P_i \phi_1^3$$

$$y'_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot O_i Y'_1 \phi_1^2$$

$$x'_i = \frac{V_i z_i}{v_i} \cdot N_i X'_1 \phi_1^2$$

Wir können also hieraus den Schluss machen, dass die Coordinaten, welche dem Durchschnittspunkte des Hauptstrahles mit der Netzhaut zugehören und die auf der letzteren entstehenden Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles im vorliegenden Falle ebenso wie bei den Instrumenten der ersten Art durch die erwähnten Formeln und diejenigen, welche wir in Nro. 68 daraus abgeleitet haben, berechnet werden können, wenn man das Instrument und das Auge als ein zusammengehöriges System von brechenden Flächen betrachtet, unter z_i den Abstand des Scheitels der Netzhaut von der letzten brechenden Fläche des Auges versteht, und

$$P_i \text{ mit } P_i + \frac{V_i^2 z_i}{2 v_i^2 x}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 z_i}\right]$$

$$O_i \text{ mit } O_i - \frac{1}{2 v_i x}$$

$$N_i \text{ mit } N_i - \frac{1}{2 v_i x}$$

verwechselt.

Abweichungen bei den Instrumenten der zweiten Art, wenn die Axe des Auges jedesmal nach dem Hauptstrahle gerichtet ist.

74) Nach der bereits in Nro. 63 gemachten Bemerkung ist die in der vorhergehenden Nummer zu Grund gelegte Voraussetzung, dass sich das Auge bei dem Gebrauche optischer Instrumente unveränderlich in der Axe derselben befindet, strenge genommen, nicht diejenige, welche der Natur entspricht, und man wird richtigere Resultate erhalten, wenn man annimmt, dass das Auge bei dem Gebrauche optischer Werkzeuge zwar in einerlei Entfernung von der letzten brechenden Fläche bleibt, dagegen bei Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes seine Axe so richtet, dass sie mit dem, jenem Punkte entsprechenden, Hauptstrahle zusammenfällt.

Um diese Hypothese mit Rücksicht auf die Abweichungen der Rechnung zu unterwerfen, müssen wir zuerst die Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles nach der letzten Brechung durch das Instrument in andere Coordinaten verwandeln, deren Ursprung und Axen in Bezug auf die erste brechende Fläche des Auges dieselbe Lage haben, die bei den allgemeinen Formeln angenommen wurde. Die so verwandelten Coordinaten dienen sodann, um für das Auge, wenn man es als ein abgesondertes System von brechenden Flächen betrachtet, die mit dem Index 1 versehenen Constanten zu bestimmen, deren Kenntniss zur Berechnung der Lage der gebrochenen Strahlen im Auge nothwendig ist. Hierdurch sind alle Grössen gegeben, welche bei der Anwendung der allgemeinen Formeln als bekannt vorausgesetzt werden, und es ist nunmehr leicht, die Abweichungen der Strahlen auf der Netzhaut durch eine ähnliche Methode wie in den beiden vorhergehenden Fällen zu bestimmen. Fangen wir daher mit der erwähnten Verwandlung der Coordinaten an. Es seyen

x, y, z die Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles nach der letzten Brechung durch das Instrument, wobei der Ursprung und die Axen wie bisher angenommen sind,

y'' die der Abscisse z entsprechende Ordinate des dazu gehörigen Hauptstrahles,

ω der Winkel, welchen der Hauptstrahl mit der Axe des Instrumentes macht, ebenso gezählt wie der Winkel, dessen Tangente durch φ_1 bezeichnet wurde,

$-e$ und $-(d)$ die Coordinaten des Scheitels der Hornhaut oder desjenigen Punktes, in welchem sie von der Axe des Auges und mithin auch von dem Hauptstrahle durchschnitten wird, parallel mit den Axen der y und z genommen,

$x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die verwandelten Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles, bei welchen der Ursprung im Scheitel der Hornhaut liegt, die Axe der $z_{,}$ mit dem Hauptstrahle, und die Ebene der $y_{,}$ $z_{,}$ mit der Ebene der yz zusammenfällt.

Werden nun die Coordinaten xyz ohne die Lage der Axen zu ändern, zuerst auf den neuen Ursprung reducirt, dessen Coordinaten 0, $-e$ und $-(d)$ sind, da er sich in dem Hauptstrahle und folglich in der Ebene der yz befindet, so sind die auf diese Art reducirten Coordinaten x, $(y+e)$ und $(z+(d))$. Um hierauf diese letzteren in die neuen Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$ und $z_{,}$ zu verwandeln, müssen wir bemerken, dass die Ebene der $y_{,}z_{,}$ mit der Ebene der yz zusammenfällt, daher die Ordinate x ungeändert bleibt, dass ferner die Axe der $z_{,}$ (der Hauptstrahl) mit der Axe der z (der Axe des Instrumentes) den Winkel ω bildet, welcher von der letzteren nach der ersteren zu gezählt wird. Nach den bekannten Formeln zur Verwandlung der rechtwinkeligen Coordinaten erhalten wir daher

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= x \\ y_{,} &= (y+e)\cos\omega - (z+(d))\sin\omega \\ z_{,} &= (y+e)\sin\omega + (z+(d))\cos\omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Diese Ausdrücke enthalten die Coordinaten des neuen Ursprungs, von welchen nur (d), oder die parallel mit der Axe des Instrumentes gemessene Entfernung der Hornhaut von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes, als bekannt vorausgesetzt wird. Es ist daher noch eine Gleichung erforderlich, um e eliminiren zu können. Diese Gleichung liefert der Hauptstrahl, wenn man bemerkt, dass er mit der Axe der $z_{,}$ zusammenfällt, daher $y_{,}$ für ihn $= 0$ ist. Hierdurch giebt der zweite der vorhergehenden Ausdrücke, wenn wir darin y mit y'' verwechseln,

$$0 = (y''+e)\cos\omega - (z+(d))\sin\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Zieht man jetzt zuerst von der zweiten Gleichung (a) die Gleichung (b) ab, sodann von der dritten Gleichung (a) die Glei-

chung (b), nachdem man sie vorher mit $\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$ multiplicirt hat, so erhält man folgende Ausdrücke für die neuen Coordinaten, aus welchen e eliminirt ist:

$$x_{,} = x$$
$$y_{,} = (y - y'') \cos\omega$$
$$z_{,} = (y - y'') \sin\omega + \frac{z + (d)}{\cos\omega}$$

x und $(y - y'')$ sind die ursprünglichen, vom Hauptstrahle an gezählten Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles, welche bisher mit x' und y' bezeichnet wurden. Substituiren wir daher die letzteren statt der ersteren, so nehmen die vorhergehenden Ausdrücke der neuen Coordinaten die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} x_{,} &= x' \\ y_{,} &= y' \cos\omega \\ z_{,} &= y' \sin\omega + \frac{z + (d)}{\cos\omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Nachdem auf diese Weise die Formeln (c) gefunden worden sind, welche dazu dienen, die ursprünglichen Coordinaten in andere zu verwandeln, die in Bezug auf das Auge dieselbe Lage haben, wie die ursprünglichen in Bezug auf das Instrument, so können wir jene Formeln auf die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles nach seiner letzten Brechung durch das Instrument anwenden. Da dieser Strahl für das Auge der einfallende ist, so bestimmen sich hierdurch für letzteres die mit dem Index 1 versehenen Constanten, welche bei der ferneren Rechnung als bekannt angenommen werden. Hierbei bezeichne ich die Grössen, welche sich auf das Auge, als ein abgesondertes System von brechenden Flächen betrachtet, beziehen, mit denselben Buchstaben, wie bei dem Instrumente, und unterscheide sie wie in Nro. 62 nur dadurch, dass ich für die erste und letzte Fläche des Auges den Index I und $\mathfrak{i}$ gebrauche, bei dem Instrumente dagegen den bisherigen Index 1 und i beibehalte. Ferner bediene ich mich der Characteristik D, um die Summe der sämmtlichen Veränderungen zu bezeichnen, welche die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung bei einer Grösse hervorbringen, so dass z. B.

$$D\phi = \Delta\phi + \delta\phi + \Delta^2\phi + \delta^2\phi + \delta\Delta\phi$$

ist. Endlich setze ich, wie bei den früheren Untersuchungen, voraus, dass bei dem Instrumente, so oft die Glieder der dritten Ordnung gebraucht werden, die sonst zu der zweiten Ordnung gehörigen Grössen $\Delta\frac{1}{g_{\mathfrak{i}}}$, $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{\mathfrak{i}}$, $\delta\frac{1}{g_{\mathfrak{i}}}$ und $\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{\mathfrak{i}}$ durch die Wirkung des Instrumentes so klein geworden sind, dass sie als Glieder der dritten Ordnung angesehen, mithin ihre Potenzen und Producte in andere Abweichungen vernachlässigt werden können.

Nur diejenigen mit $\delta\frac{1}{g_i}$ multiplicirten Glieder, welche sich auf den farbigen Rand beziehen, werden ausnahmsweise beibehalten, um denselben auch bei Instrumenten ohne achromatische Objective aufheben zu können.

Dieses vorausgesetzt, nehme ich die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles nach seiner letzten Brechung durch das Instrument, so wie sie in (a) und (b) von Nro. 5 und 15 gegeben sind, und behalte darin die mit $(g-z)$ multiplicirten Grössen der zweiten Ordnung bei. Dividiren wir diese Gleichungen durch z, so erhalten sie, auf die i^{te} Fläche bezogen, die folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y_i}{z_i} = {} & \left(\frac{f}{g}\right)_i - Y_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - \left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
& - \left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)_i - \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i \\
& - \left(Y\delta^2\frac{1}{g}-\delta^2\frac{f}{g}\right)_i - \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
& - \left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1}{g}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& - \delta Y_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
\frac{x_i}{z_i} = {} & -X_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} - X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i} \\
& - X_i\,\delta\frac{1}{g_i} - X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i} - \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& - \left(\Delta X+\frac{XZ}{g}\right)_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1}{g}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& - \delta X_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\delta\frac{1}{g}\right)_i
\end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

Bezeichnen wir, wie bisher, diejenigen Theile der auf den allgemeinen farbigen Strahl sich beziehenden Grössen, welche φ_1 allein enthalten, mit zwei Accenten, die übrigen Theile, welche von X_1 und Y_1 abhängen, mit einem Accente, so ist für den Hauptstrahl, da derselbe von mittlerer Brechbarkeit ist,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y''_i}{z_i} = {} & \left(\frac{f}{g}\right)_i - Y'_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - \left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)''_i \\
& - \left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)''_i \\
& - \left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1''}{g}\right)_i \\
\frac{x''_i}{z_i} = {} & 0
\end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

Durch Subtraction der Gleichungen (d) und (e) erhält man die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles unter der Voraus-

setzung, dass die Coordinaten y'_i und x'_i vom Hauptstrahle an gezählt werden, nämlich

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{y'_i}{z_i} = & - Y'_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - \left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_i - \left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)'_i \\
& - \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i - \left(Y\delta^2\frac{1}{g}-\delta^2\frac{f}{g}\right)_i - \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
& - \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1}{g}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1''}{g}\right)_i \\
& - \delta Y_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
\frac{x'_i}{z_i} = & - X_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i - X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} - X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i} \\
& - X_i\,\delta\frac{1}{g_i} - X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i} - \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& - \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\Delta\frac{1}{g}+\delta\frac{1}{g}\right)_i \\
& - \delta X_i\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}+\delta\frac{1}{g}\right)_i
\end{aligned}\right\} \quad (f)
$$

In Nro. 2 wurde die Lage des einfallenden Strahles durch die Coordinaten seines Durchschnittes mit der Ebene der yz und seines Einfallspunktes auf der ersten brechenden Fläche bestimmt. Da nun der Strahl, welchem die Gleichungen (f) zugehören, in Bezug auf das Auge der einfallende ist, so müssen wir die Coordinaten seines Durchschnittes mit jener Ebene suchen, welche für das Instrument und Auge einerlei ist. Nach der allegirten Nummer sind aber die Coordinaten des Durchschnittes des gebrochenen Strahles mit der Ebene der yz nach der i^{ten} Brechung

$$
\left.\begin{aligned}
x_i &= 0 \\
y_i &= \mathfrak{f}_i \\
z_i &= \mathfrak{g}_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)
$$

folglich

$$
\frac{1}{z_i} = \frac{1}{\mathfrak{g}_i} = \frac{1}{g_i} + D\frac{1}{g_i}
$$

Dieser letzte Werth thut, wie gehörig, der zweiten Gleichung (f) Genüge, wenn darin $x'_i = x_i = 0$ gesetzt wird. Durch Substitution desselben in der ersten Gleichung (f) erhalten wir für den Durchschnitt des Strahles mit der Ebene der yz:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{y'_i}{\mathfrak{g}_i} = & \; Y'_i\, D\frac{1}{g_i} - \left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_i - \left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)'_i \\
& - \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i - \left(Y\delta^2\frac{1}{g}-\delta^2\frac{f}{g}\right)_i - \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
& - \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i \left(\Delta\frac{1'}{g}+\delta\frac{1}{g}\right) + \delta Y_i\,\Delta\frac{1}{g_i}
\end{aligned}\right\} \quad (h)
$$

in welchem Ausdrucke das Glied $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_{i}'' \Delta \frac{1'}{g_i}$ nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden kann.

Verwandeln wir nun die Coordinaten y_i' und z_i, welche durch die Ausdrücke (g) und (h) gegeben sind, vermittelst der Formeln (c), so erhalten wir die Grössen $y_,$ und $z_,$, welche in Bezug auf das Auge die Coordinaten des Durchschnittes des einfallenden Strahles mit der Ebene der $y, z,$ sind, und in Nro. 2 mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ bezeichnet wurden. Es ist folglich

$$\left.\begin{aligned} y_, &= \mathfrak{b}_I \\ z_, &= \mathfrak{c}_I \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

Durch Substitution der in (g) und (i) gefundenen Werthe geben die beiden letzten Formeln (c), wenn man den Buchstaben y_i' zur Abkürzung statt seines durch den Ausdruck (h) gegebenen Werthes beibehält:

$$\mathfrak{b}_I = y_i' \cos \omega$$

$$\mathfrak{c}_I = y_i' \sin \omega + \frac{\mathfrak{g}_i + (d)}{\cos \omega}$$

Der Winkel ω, welchen der Hauptstrahl mit der Axe des Instrumentes macht, ist derselbe, welcher im vorhergehenden Kapitel mit ω_i'' bezeichnet wurde. Wir erhalten daher, wenn wir nur die erste Potenz von φ_1 berücksichtigen, aus (k) von Nro. 53

$$tg\, \omega = \frac{V_i}{v_i}\left(1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\right)\varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

Da nun y_i', wie der Ausdruck (h) zeigt, bloss aus Gliedern besteht, welche nach den angenommenen Grundsätzen als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet werden, so fallen die Producte von y_i' in alle Grössen von der Ordnung Y_1', X_1 und φ_1 als zu einer höheren Ordnung gehörig weg, und hierdurch reduciren sich die vorhergehenden Ausdrücke auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_I &= y_i' \\ \mathfrak{c}_I &= \frac{\mathfrak{g}_i + (d)}{\cos \omega} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

Der letzte derselben giebt, wenn man $\cos \omega$ in eine nach Potenzen von $tg\, \omega$ geordnete Reihe entwickelt und nur $tg^2 \omega$ beibehält,

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_I} = \frac{\cos \omega}{\mathfrak{g}_i + (d)} = \frac{1}{\mathfrak{g}_i + (d)} - \frac{tg^2 \omega}{2(\mathfrak{g}_i + (d))}$$

Nach der oben angenommenen Bezeichnung ist (d) die Entfernung des Scheitels der Hornhaut von der letzten brechenden Fläche, nachdem sich das Auge nach dem Hauptstrahle gerichtet hat, parallel mit der Axe des Instrumentes gemessen. Nennen wir d dieselbe Entfernung, wenn die Axe des Auges mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt,

o die Entfernung des Umdrehungspunktes des Auges von der Hornhaut, vor derselben angenommen,

so ist vermöge (a) von Nro. 63 in dem Falle, wo das Auge nicht eine kleine Bewegung parallel mit der Axe des Instrumentes macht, um bei der Umdrehung *d* unverändert zu erhalten,

$$(d) = d - \frac{o\, tg^2\, \omega}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

Ich nehme diesen Fall als den allgemeinen an, indem der entgegengesetzte darin enthalten ist, wenn man das letzte Glied weglässt. Hiernach ist

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_i + (d)} = \frac{1}{\mathfrak{g}_i + d - \frac{o\, tg^2 \omega}{2}} = \frac{1}{\mathfrak{g}_i}\left(1 + \frac{d}{\mathfrak{g}_i} - \frac{o\, tg^2 \omega}{2\,\mathfrak{g}_i}\right)^{-1}$$

Substituirt man hierin statt $\frac{1}{\mathfrak{g}_i}$ seinen Werth

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_i} = \frac{1}{g_i} + D\frac{1}{g_i}$$

und bemerkt, dass die Potenzen und Producte von $D\frac{1}{g_i}$ und $\frac{o\, tg^2 \omega}{2\,\mathfrak{g}_i}$ vernachlässigt werden, da die letztere Grösse zu derselben Ordnung wie die nicht aufgehobenen Abweichungen gehört, so erhält man

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_i + (d)} = \left(\frac{1}{g_i} + D\frac{1}{g_i}\right)\left[1 + \frac{d}{g_i} + d\, D\frac{1}{g_i} - \frac{o\, tg^2 \omega}{2 g_i}\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{g_i + d} + \left(\frac{g_i}{g_i + d}\right)^2 D\frac{1}{g_i} + \frac{o\, tg^2 \omega}{2\,(g_i + d)^2}$$

Befände sich das Auge in der Axe des Instrumentes und wären keine Abweichungen vorhanden, so würde sich c_I in $(g_i + d)$ verwandeln. Setzen wir daher

$$g_i + d = c_I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{g}_i + (d)} = \frac{1}{c_I} + \left(\frac{g_i}{c_I}\right)^2 D\frac{1}{g_i} + \frac{o\, tg^2 \omega}{2 c_I^2}$$

und

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_I} = \frac{1}{c_I} + \left(\frac{g_i}{c_I}\right)^2 D\frac{1}{g_i} - \frac{(c_I - o)\, tg^2 \omega}{2 c_I^2}$$

Nach der angenommenen Bezeichnungsart ist aber

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_I} = \frac{1}{c_I} + D\frac{1}{c_I}$$

Die Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke giebt daher

$$D\frac{1}{c_I} = \left(\frac{g_i}{c_I}\right)^2 D\frac{1}{g_i} - \frac{(c_I - o)\, tg^2 \omega}{2 c_I^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

Multipliciren wir den ersten Ausdruck (l) mit dem vorhergehenden Werthe von $\frac{1}{\mathfrak{c}_I}$, so wird

$$\frac{\mathfrak{b}_I}{\mathfrak{c}_I} = \frac{\mathfrak{y}_i}{\mathfrak{c}_I}$$

Wenn wir daher diesen Werth mit dem für $\frac{\mathfrak{b}_I}{\mathfrak{c}_I}$ angenommenen Werthe

$$\frac{\mathfrak{b}_I}{\mathfrak{c}_I} = \varphi_I + D\varphi_I$$

vergleichen und bemerken, dass φ_I die von den Abweichungen unabhängigen Glieder bezeichnet, welche im vorliegenden Falle nicht vorhanden sind, so ergiebt sich

$$\varphi_I = 0$$
$$D\varphi_I = \frac{y'_i}{c_I}$$

Da die Producte von y'_i in Grössen von der Ordnung Y'_1 nicht beibehalten werden, so kann man in der letzten der vorhergehenden Gleichungen $\frac{y'_i}{c_I}$ mit $\frac{g_i}{c_I}\frac{y'_i}{\mathfrak{g}_i}$ verwechseln. Substituirt man sodann statt $\frac{y'_i}{\mathfrak{g}_i}$ seinen Werth aus (h), so verwandeln sich jene Gleichungen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_I = 0 \\
&D\varphi_I = \frac{g_i\,Y'_1}{V_i\,c_I}\,D\frac{1}{g_i} \\
&\qquad -\frac{g_i}{c_I}\left\{\begin{aligned}
&\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)'_i \\
&+\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\
&+\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
&+\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i \delta\frac{1}{g_i} - \delta Y_i\,\Delta\frac{1}{g_i}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \text{(p)}$$

Aus den Formeln (o) und (p) folgen die analogen in Bezug auf die Characteristiken Δ, Δ^2, δ, δ^2 und $\delta\Delta$, wenn man D mit einer der letzteren verwechselt und nur die ihr entsprechenden Glieder beibehält.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Coordinaten des Einfallspunktes des Strahles (f) auf der ersten brechenden Fläche des Auges und die Abweichungen derselben zu bestimmen. Die letzteren werden bei der weiteren Rechnung noch mit Grössen der zweiten Ordnung multiplicirt; es ist daher hinreichend, ihre Entwickelung nur bis zu dieser Ordnung fortzusetzen. Hiernach geben die Gleichungen (f)

$$\left.\begin{aligned}
y'_i &= Y'_i\left(\frac{g-z}{g}\right)_i - z_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i - z_i\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\
&\quad + \left(\frac{g-z}{g}\right)_i\left[\left(\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right)' + \delta Y\right]_i \\
x'_i &= X_i\left(\frac{g-z}{g}\right)_i - z_i\,X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} - z_i\,X_i\,\delta\frac{1}{g_i} \\
&\quad + \left(\frac{g-z}{g}\right)_i\left[\Delta X + \frac{XZ}{g} + \delta X\right]_i
\end{aligned}\right\} \text{(q)}$$

Verwandeln wir in diesen Gleichungen die Coordinaten x'_i, y'_i und z_i vermittelst der Formeln (c) in die Coordinaten $x_\prime$, $y_\prime$ und $z_\prime$, so erhalten wir die Gleichungen des einfallenden Strahles in Bezug auf das Auge, so ausgedrückt, dass der Ursprung und die Axen der Coordinaten ebenso angenommen sind, wie sie bei der ersten brechenden Fläche des Auges vorausgesetzt werden müssen, wenn die allgemeinen Formeln darauf angewandt werden sollen. Es muss nunmehr der Durchschnitt des Strahles (q) mit der ersten brechenden Fläche des Auges gesucht werden. Da der Ursprung der Coordinaten in dem Scheitel derselben liegt und ihr Halbmesser $= a_I$ ist, so ist ihre Gleichung

$$x_\prime^2 + y_\prime^2 = 2 a_I \, z_\prime - z_\prime^2$$

$z_\prime$ ist eine sehr kleine Grösse von der Ordnung der Abweichungen im Auge; vernachlässigt man daher das Quadrat derselben, so ist

$$z_\prime = \frac{x_\prime^2 + y_\prime^2}{2 a_I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(r)}$$

Da der Durchschnitt des Strahles (q) mit der Fläche (r) in beiden zugleich liegt, so gelten für ihn die Gleichungen (q) und (r) in Verbindung mit denen (c) zugleich und dienen, um die Coordinaten $y_\prime$ und $x_\prime$ jenes Durchschnittes zu bestimmen.

Die dritte Gleichung (c) giebt, wenn daraus der Werth von z_i gesucht wird,

$$z_i = -(d) + z_\prime \cos\omega - y'_i \sin\omega \cos\omega \quad \ldots\ldots \quad \text{(s)}$$

Da $z_\prime$ und $y'_i \sin\omega$ sehr klein sind, so ist der als erste Näherung zu betrachtende Werth von z_i

$$z_i = -d$$

folglich vermöge (n)

$$(g - z)_i = g_i + d = c_I$$

Hierdurch erhält man aus (q) die folgenden genäherten Werthe von y'_i und x'_i:

$$y'_i = \frac{c_I}{g_i} Y'_i$$

$$x'_i = \frac{c_I}{g_i} X_i$$

Nach den beiden ersten Formeln (c), verbunden mit den vorhergehenden Ausdrücken von y'_i und x'_i, ist aber näherungsweise

$$y_\prime = y'_i = \frac{c_I}{g_i} Y'_i$$

$$x_\prime = x_i = x'_i = \frac{c_I}{g_i} X_i$$

folglich, wenn diese Werthe in (r) substituirt werden,

$$z_\prime = \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2 \left(\frac{X_i^2 + Y_i'^2}{2 a_I}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(t)}$$

Vermittelst der vorhergehenden genäherten Werthe von y'_i und z, giebt der Ausdruck (s), wenn man statt (d) seinen Werth aus (m) substituirt und bemerkt, dass die beiden letzten Glieder von der zweiten Ordnung sind, mithin $\cos\omega = 1$ gesetzt werden kann,

$$z_i = -d + \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2 \left(\frac{X_i^2 + Y_i'^2}{2a_I}\right) - \frac{c_I}{g_i} Y'_i \sin\omega + \frac{o\, tg^2\omega}{2}$$

und

$$(g-z)_i = c_I - \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2 \left(\frac{X_i^2 + Y_i'^2}{2a_I}\right) + \frac{c_I}{g_i} Y'_i \sin\omega - \frac{o\, tg^2\omega}{2}$$

Substituiren wir nun diese Werthe in den Formeln (q), nachdem wir die erste derselben zuvor mit $\cos\omega$ multiplicirt haben, so erhalten wir mit Rücksicht auf die beiden ersten Ausdrücke (c)

$$\left.\begin{aligned}
y_, &= \cos\omega \left\{\begin{aligned} & Y'_i\left[\frac{c_I}{g_i} - \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2\left(\frac{X_i^2+Y_i'^2}{2a_I g_i}\right) + \frac{c_I Y'_i \sin\omega}{g_i^2} - \frac{o\, tg^2\omega}{2g_i}\right] \\ & + d\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i + d\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\ & + \frac{c_I}{g_i}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]'_i + \frac{c_I}{g_i}\delta Y_i \end{aligned}\right. \\
x_, &= X_i\left[\frac{c_I}{g_i} - \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2\left(\frac{X_i^2+Y_i'^2}{2a_I g_i}\right) + \frac{c_I Y'_i \sin\omega}{g_i^2} - \frac{o\, tg^2\omega}{2g_i}\right] \\
&\quad + d X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} + d X_i\, \delta\frac{1}{g_i} \\
&\quad + \frac{c_I}{g_i}\left[\Delta X + \frac{Xz}{g}\right]_i + \frac{c_I}{g_i}\delta X_i
\end{aligned}\right\} \text{(u)}$$

In allen Gliedern des Ausdruckes von $y_,$ mit Ausnahme des ersten kann man

$$\cos\omega = 1$$

setzen, in dem ersten Gliede dagegen muss $\cos\omega$ mit $1 - \frac{tg^2\omega}{2}$ verwechselt werden. Hierdurch erhält man

$$Y'_i \frac{c_I}{g_i} \cos\omega = \frac{Y'_i c_I}{g_i} - \frac{Y'_i c_I}{g_i}\, \frac{tg^2\omega}{2}$$

Das letzte dieser Glieder vereinigt sich mit dem in dem Ausdrucke von y' bereits enthaltenen Gliede $-\frac{Y'_i o\, tg^2\omega}{2g_i}$, wodurch die Summe von beiden $= -\frac{Y'_i (c_I + o)\, tg^2\omega}{2g_i}$ wird.

Man kann daher in dem Ausdrucke von $y_,$ den gemeinschaftlichen Factor $\cos\omega$ weglassen und dagegen in dem inclavirten Factor von Y'_i das Glied $-\frac{o\, tg^2\omega}{2g_i}$ mit $-\frac{(c_I + o)\, tg^2\omega}{2g_i}$ verwechseln.

Die so gefundenen Werthe von $y_,$ und $x_,$ sind die Coordinaten des Durchschnitts des einfallenden Strahles mit der ersten brechenden

Fläche des Auges oder die Coordinaten des Einfallspunktes, mit Rücksicht auf die durch die Abweichungen hervorgebrachten Aenderungen derselben. Nach der angenommenen Bezeichnung ist daher

$$y_{,} = Y_{I} + \Delta Y_{I} + \delta Y_{I}$$
$$x_{,} = X_{I} + \Delta X_{I} + \delta X_{I}$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den vorhergehenden giebt folglich

$$\left.\begin{aligned}
Y_{I} &= \frac{c_{I}}{g_{i}} \acute{Y}_{i} \\
\Delta Y_{I} &= -\acute{Y}_{i}\left[\left(\frac{c_{I}}{g_{i}}\right)^{2}\left(\frac{X_{i}^{2}+\acute{Y}_{i}^{2}}{2a_{I}g_{i}}\right)-\frac{c_{I}\acute{Y}_{i}\sin\omega}{g_{i}^{2}}+\frac{(c_{I}+o)\,tg^{2}\omega}{2g_{i}}\right] \\
&\quad + d\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_{i}+\frac{c_{I}}{g_{i}}\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]'_{i} \\
\delta Y_{I} &= d\left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_{i}+\frac{c_{I}}{g_{i}}\,\delta Y_{i} \\
X_{I} &= \frac{c_{I}}{g_{i}} X_{i} \\
\Delta X_{I} &= -X_{i}\left[\left(\frac{c_{I}}{g_{i}}\right)^{2}\left(\frac{X_{i}^{2}+\acute{Y}_{i}^{2}}{2a_{I}g_{i}}\right)-\frac{c_{I}\acute{Y}_{i}\sin\omega}{g_{i}^{2}}+\frac{o\,tg^{2}\omega}{2g_{i}}\right] \\
&\quad + d\,X_{i}\,\Delta\frac{1}{g_{i}}+\frac{c_{I}}{g_{i}}\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right]_{i} \\
\delta X_{I} &= d\,X_{i}\,\delta\frac{1}{g_{i}}+\frac{c_{I}}{g_{i}}\,\delta X_{i}
\end{aligned}\right\}(v)$$

Bei der ferneren Anwendung der in (o) und (v) gefundenen Werthe ist noch eine Bemerkung nothwendig. Die Grösse c_{I} nämlich, welche in denselben enthalten ist, bezeichnet die Entfernung des letzten durch das Instrument hervorgebrachten Bildes von der Hornhaut. Diese Entfernung ist stets gross und wird sogar bei gut organisirten Augen gewöhnlich unendlich angenommen, weil dieselben bei Parallelstrahlen deutlich sehen. Da nun die Entfernung des Auges von dem Instrumente immer klein ist, so sind c_{I} und g_{i} sehr wenig von einander verschieden. Hieraus folgt, dass alle Glieder, welche mit Abweichungen multiplicirt sind und im Nenner eine höhere Dimension in Bezug auf c_{I} und g_{i} haben, als im Zähler, als sehr kleine Grössen zu betrachten sind, deren Producte in andere Abweichungen vernachlässigt werden können. Das letztere gilt daher auch von $D\frac{1}{c_{I}}$ und $D\varphi_{I}$, da die übrigen darin enthaltenen Grössen nach den angenommenen Grundsätzen als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet werden.

75) Wir können jetzt zur Berechnung der Lage der gebrochenen Strahlen im Auge übergehen. Betrachten wir dieselbe nur in der Nähe des auf der Netzhaut entstehenden Bildes, welches als das i^te^ angenommen wird, so können wir die Producte von $\left(\frac{g-z}{gz}\right)_{i}$ in

Grössen von der Ordnung der Abweichungen vernachlässigen. Ausserdem ist nach (p) der vorhergehenden Nummer

$$\varphi_I = 0$$

woraus auch

$$f_I = 0$$

folgt. Wir erhalten daher aus (c) von Nro. 5 und (d) von Nro. 15 die Gleichungen des allgemeinen farbigen Strahles nach seiner letzten Brechung im Auge, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y_I &= -z_I \left\{ \begin{aligned} &\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_I + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_I \\ &+ \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_I + \left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_I \\ &+ \delta Y_I\, \delta\frac{1}{g_I} + \delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_I \\ &+ \left(\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right)_I \delta\frac{1}{g_I} \\ &+ \left(\frac{z-g}{gz}\right)_I Y_I \end{aligned}\right. \\ x_I &= -z_I \left\{ \begin{aligned} &X_I\, \Delta\frac{1}{g_I} + X_I\, \Delta^2\frac{1}{g_I} + X_I\, \delta\frac{1}{g_I} \\ &+ X_I\, \delta^2\frac{1}{g_I} + \delta X_I\, \delta\frac{1}{g_I} + \delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_I \\ &+ \left(\Delta X + \frac{XZ}{g}\right)_I \delta\frac{1}{g_I} \\ &+ \left(\frac{z-g}{gz}\right)_I X_I \end{aligned}\right. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Bei der weiteren Entwickelung dieser Gleichungen sind die Anfangs gefundenen Formeln anwendbar, welche die mit dem Index 1 und den Characteristiken Δ und δ versehenen Constanten enthalten. Wir hatten nämlich in Nro. 12 und 17 angenommen, dass die Strahlen successiv durch zwei Instrumente gehen, welche in so fern eine ähnliche Einrichtung mit einander haben, dass in beiden die Abweichung wegen der Gestalt und ausserdem entweder die Farbenzerstreuung in der Axe oder der farbige Rand bis auf Grössen der dritten Ordnung gehoben sind, so oft die darauf sich beziehenden Glieder gebraucht werden. Versteht man nun unter dem ersten jener Instrumente das hier betrachtete Instrument, unter dem zweiten dagegen das Auge, so findet die erwähnte Voraussetzung nicht nur bei dem Instrumente statt, sondern auch bei dem Auge, weil die darin entstehenden Abweichungen von derselben Ordnung sind, wie diejenigen, welche von den Ocularen herrühren und nach den angenommenen Grundsätzen zur dritten Ordnung gezählt werden.

Hiernach können wir zuerst alle ursprünglich zur dritten Ordnung gehörige Grössen, welche das Auge hervorbringt, sowie die

Producte der ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen in andere Abweichungen vernachlässigen, da beide als Grössen der vierten Ordnung zu betrachten sind. Dasselbe gilt auch von den Producten der in einigen der früheren Formeln enthaltenen Grösse Z_I in andere Abweichungen, da diese Grösse mit den im Auge entstehenden Abweichungen wegen der Gestalt von einerlei Ordnung ist.

Ferner müssen wir bemerken, dass alle von φ_I abhängige Glieder wegfallen und dass daher nach Nro. 4

$$Y'_I + K_I\,\varphi_I = Y'_I = Y_I$$

ist.

Endlich werden nach den angenommenen Grundsätzen die Potenzen und Producte der Grössen

$$\left(Y_I\Delta\frac{1}{c_I} - \Delta\,\varphi_I\right),\ \Delta\frac{1}{c_I},\ \left(Y_I\delta\frac{1}{c_I} - \delta\,\varphi_I\right) \text{ und } \delta\frac{1}{c_I}$$

vernachlässigt, weil sie die im Instrumente entstehenden Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung ausdrücken, welche nach der Voraussetzung auf Grössen der dritten Ordnung reducirt sind. Nur werden ausnahmsweise die auf den farbigen Rand sich beziehenden Producte von $\delta\frac{1}{c_I}$ beibehalten, deren anderer Factor daher eine mit zwei Accenten versehene Grösse seyn muss, da der farbige Rand nur von diesen abhängt. Zu den letzteren gehört unter andern das Glied $\left(Y_I\Delta\frac{1}{c_I} - \Delta\,\varphi_I\right)''\delta\frac{1}{c_I}$; die Formeln (o) und (p) der vorhergehenden Nummer zeigen aber, dass in $\left(Y_I D\frac{1}{c_I} - D\varphi_I\right)$ keine, zur zweiten Ordnung gehörige, mit der Characteristik Δ und zwei Accenten versehene Glieder vorkommen, welche den ersten Factor jenes Productes bilden würden, daher dasselbe wegfällt. Ein Gleiches gilt von den Producten, welche den Factor $\left(K_I\varphi_I\Delta\frac{1}{c_I} - \Delta\,\varphi_I\right)''$ enthalten, da er mit $\left(Y_I\Delta\frac{1}{c_I} - \Delta\,\varphi_I\right)''$ einerlei ist.

Nach diesen Reductionen geben die früher gefundenen Formeln die folgenden Werthe der in den Gleichungen (a) enthaltenen Grössen, welchen ich die Nummern, in denen sie entwickelt wurden, und die den Formeln daselbst beigesetzten Buchstaben hinzufüge:

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{\rm i} = \frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left[Y_I\Delta\frac{1}{c_I} - \Delta\varphi_I - L_{\rm i}(X_I^2 + Y_I^2)\,Y_I\right]. \text{ Nro. 8 (g)}$$

$$\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_{\rm i} = \frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left(Y_I\Delta^2\frac{1}{c_I} - \Delta^2\varphi_I\right) \ .\ .\ .\ .\ . \text{ Nro. 14 (e)}$$

$$\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_{\rm i} = \frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left[Y_I\,\delta\frac{1}{c_I} - \delta\varphi_I - S_{\rm i}\,Y_I\,\delta v\right] \ .\ . \text{ Nro. 17 (h)}$$

$$\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_{\rm i} = \frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\left(Y_I\,\delta^2\frac{1}{c_I} - \delta^2\varphi_I\right) \ .\ .\ .\ .\ . \text{ Nro. 17 (k)}$$

$$\delta Y_{\rm i}\,\delta\frac{1}{g_{\rm i}} = \frac{V_{\rm i}}{v_{\rm i}}\,\delta Y_I\,\delta\frac{1}{c_I} \ .\ .\ .\ .\ . \text{ Nro. 17 (h), Nro. 18 (b) und (c)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{\nu_i}\,\delta\left(Y_I\Delta\frac{1}{c_I}-\Delta\varphi_I\right)=\\ =\frac{V_i}{\nu_i}\left(Y_I\,\delta\Delta\frac{1}{c_I}-\delta\Delta\varphi_I+\Delta\frac{1}{c_I}\,\delta Y_I\right)\end{array}\right\}\text{Nro. 19 (c) und 20 (i)}$$

$$\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\delta\frac{1}{g_i}=\frac{V_i}{\nu_i}\,\Delta Y_I\,\delta\frac{1}{c_I}\text{ . Nro. 9 (k), Nro. 17 (h)}$$

$$\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_i=\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i\frac{Y_I}{V_i}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{Nro. 4 (q)}$$

Hieraus folgen die correspondirenden Glieder in Bezug auf x_i unmittelbar, wenn man Y mit X verwechselt und die von φ_I abhängigen Glieder weglässt.

Vermittelst dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen (a) in folgende, wobei die Characteristik D in der, Nro. 74 angegebenen Bedeutung gebraucht ist:

$$\left.\begin{array}{l}y_i=-\frac{V_i z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\left(Y_I\,D\frac{1}{c_I}-D\varphi_I\right)-L_i\,(X_I^2+Y_I^2)\,Y_I\\ -S_i\,Y_I\,\delta\nu+\delta Y_I\,\delta\frac{1}{c_I}+\delta Y_I\,\Delta\frac{1}{c_I}+\Delta Y_I\,\delta\frac{1}{c_I}\\ +\frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_I\end{array}\right.\\ x_i=-\frac{V_i z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}X_I\,D\frac{1}{c_I}-L_i\,(X_I^2+Y_I^2)\,X_I\\ -S_i\,X_I\,\delta\nu+\delta X_I\,\delta\frac{1}{c_I}+\delta X_I\,\Delta\frac{1}{c_I}\\ +\Delta X_I\,\delta\frac{1}{c_I}+\frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_I\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{(b)}$$

Nach (q) von Nro. (4) ist

$$Y'_i=\frac{Y'_1}{V_i}$$

$$X'_i=\frac{X'_1}{V_i}$$

folglich vermöge (v) der vorhergehenden Nummer

$$Y_I=\frac{c_I}{g_i}\,Y'_i=\frac{c_I\,Y'_1}{g_i\,V_i}$$

$$X_I=\frac{c_I}{g_i}\,X'_i=\frac{c_I\,X'_1}{g_i\,V_i}$$

Durch diese und die in (o), (p) und (v) der vorhergehenden Nummer gefundenen Ausdrücke erhalten wir daher mit Rücksicht auf die daselbst gemachten Bemerkungen die folgenden Werthe für die in den Formeln (b) enthaltenen Grössen:

$$Y_I\,D\frac{1}{c_I}=\frac{g_i\,Y'_1}{V_i\,c_I}\,D\frac{1}{g_i}-\frac{Y'_1\,(c_I-o)\,tg^2\omega}{2\,V_i\,g_i\,c_I}$$

$$-D\varphi_I = -\frac{g_i \acute{Y}_1}{V_i c_I} D\frac{1}{g_i}$$

$$+\frac{g_i}{c_I}\left\{\begin{array}{l} \left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)'_i + \left(Y\Delta^2\frac{1}{g}-\Delta^2\frac{f}{g}\right)'_i \\ + \left(Y\delta\frac{1}{g}-\delta\frac{f}{g}\right)_i + \left(Y\delta^2\frac{1}{g}-\delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\ +\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ +\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i \delta\frac{1}{g_i} - \delta Y_i \Delta\frac{1}{g_i} \end{array}\right.$$

$$-L_i(X_I^2+Y_I^2)Y_I = -\frac{c_I^3 L_i}{V_i^3 g_i^3}(X_1^2+\acute{Y}_1^2)\acute{Y}_1$$

$$-S_i Y_I \delta\nu = -\frac{c_I S_i}{V_i g_i}\acute{Y}_1 \delta\nu$$

$$\delta Y_I \delta\frac{1}{c_I} = \frac{g_i}{c_I}\delta Y_i \delta\frac{1}{g_i}$$

$$\delta Y_I \Delta\frac{1}{c_I} = \frac{g_i}{c_I}\delta Y_i \Delta\frac{1}{g_i}$$

$$\Delta Y_I \delta\frac{1}{c_I} = 0$$

$$\frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i Y_I = \frac{\nu_i c_I}{V_i g_i V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \acute{Y}_1$$

$$X_I D\frac{1}{c_I} = \frac{g_i}{c_I}\left\{\begin{array}{l} X_i \Delta\frac{1}{g_i} + X_i \Delta^2\frac{1}{g_i} \\ + X_i \delta\frac{1}{g_i} + X_i \delta^2\frac{1}{g_i} \\ + X_i \delta\Delta\frac{1}{g_i} \end{array}\right.$$

$$-\frac{X_1 (c_I - o)\, tg^2\omega}{2V_i g_i c_I}$$

$$-L_i(X_I^2+Y_I^2)X_I = -\frac{c_I^3 L_i}{V_i^3 g_i^3}(X_1^2+\acute{Y}_1^2)X_1$$

$$-S_i X_I \delta\nu = -\frac{c_I S_i}{V_i g_i}X_1 \delta\nu$$

$$\delta X_I \delta\frac{1}{c_I} = \frac{g_i}{c_I}\delta X_i \delta\frac{1}{g_i}$$

$$\delta X_I \Delta\frac{1}{c_I} = \frac{g_i}{c_I}\delta X_i \Delta\frac{1}{g_i}$$

$$\Delta X_I \delta\frac{1}{c_I} = 0$$

$$\frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_I = \frac{\nu_i c_I}{V_i g_i V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_1$$

Vernachlässigen wir das Quadrat von $\frac{1}{g_i}$, so kann in den beiden von $tg^2\,\omega$ abhängigen Gliedern nach dem in (k) der vorhergehenden Nummer gegebenen Werthe

$$tg\,\omega = \frac{V_i}{\nu_i}\,\varphi_1$$
$$c_I - o = c = g_i$$

gesetzt werden, wodurch sich jene Glieder in folgende verwandeln:

$$\frac{Y'_1\,(c_I - o)\,tg^2\,\omega}{2\,V_i\,g_i\,c_I} = \frac{V_i\,Y'_1\,\varphi_1^2}{2\,\nu_i^2\,c_I}$$
$$\frac{X_1\,(c_I - o)\,tg^2\,\omega}{2\,V_i\,g_i\,c_I} = \frac{V_i\,X_1\,\varphi_1^2}{2\,\nu_i^2\,c_I}$$

Ferner ist aus der in Nro. 26 enthaltenen Zusammenstellung ersichtlich, dass die Grössen $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i$ u. s. w. sämmtlich den gemeinschaftlichen Factor $\frac{V_i}{\nu_i}$ enthalten, welcher daher herausgesetzt werden kann. Innerhalb der Parenthese muss man sodann alle jene Grössen mit $\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i$ u. s. w. verwechseln, wodurch ihre inclavirten Factoren bezeichnet werden.

Hiernach nehmen die Gleichungen (b) die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
y_i = -\frac{V_i\,g_i\,V_i\,z}{c_I\,\nu_i\,\nu_i^1}\Bigg(&\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i - \frac{\nu_i\,c_I^4}{V_i^4\,g_i^4}\,L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,Y'_1\\
&- \frac{Y'_1\,\varphi_1^2}{2\,\nu_i\,g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)'_i\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i - \frac{\nu_i\,c_I^2}{V_i^2\,g_i^2}\,S_i\,Y'_1\,\delta\nu\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i + \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta\,Y_i\,\delta\frac{1}{g_i}\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i + \frac{\nu_i}{V_i}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]''_i\delta\frac{1}{g_i}\\
&+ \frac{\nu_i\,\nu_i\,c_I^2}{V_i^2\,g_i^2\,V_i^2}\left(\frac{z-g}{g\,z}\right)_i\,Y'_1\Bigg)\\
x_i = -\frac{V_i\,g_i\,V_i\,z_i}{c_I\,\nu_i\,\nu_i}\Bigg(&\frac{\nu_i}{V_i}\,X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} - \frac{\nu_i\,c_I^4}{V_i^4\,g_i^4}\,L_i\,(X_1^2 + Y_1'^2)\,X_1\\
&- \frac{X_1\,\varphi_1^2}{2\,\nu_i\,g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\,X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i}\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\,X_i\,\delta\frac{1}{g_i} - \frac{\nu_i\,c_I^2}{V_i^2\,g_i^2}\,S_i\,X_1\,\delta\nu\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\,X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta X_i\,\delta\frac{1}{g_i}\\
&+ \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i\\
&+ \frac{\nu_i\,\nu_i\,c_I}{V_i^2\,g_i^2\,V_i^2}\left(\frac{z-g}{g\,z}\right)_i\,X_1\Bigg)
\end{aligned}\right\}\ (c)$$

Untersuchen wir nun, welche Bedeutung die verschiedenen Grössen haben, welche in diesen Ausdrücken vorkommen.

Nach (l) von Nro. 4 ist

$$\frac{V_i\, g_i\, V_{\mathfrak{i}}}{c_I} = \frac{g_1 \,.\,.\,.\,.\, g_i\, g_I \,.\,.\,.\,.\, g_{\mathfrak{i}-1}}{c_2 \,.\,.\,.\,.\, c_i\, c_I \,.\,.\,.\,.\, c_{\mathfrak{i}}}$$

$$\nu_i\, \nu_{\mathfrak{i}} = n_1 \,.\,.\,.\,.\, n_i\, n_I \,.\,.\,.\,.\, n_{\mathfrak{i}}$$

Diese Grössen sind folglich V_i und ν_i für das Instrument und Auge zusammengenommen berechnet, unter der Voraussetzung, dass beide ein einziges System von brechenden Flächen bilden und eine gemeinschaftliche Axe haben. Daher ist

$$\frac{V_i\, g_i\, V_{\mathfrak{i}}\, z_{\mathfrak{i}}}{c_I\, \nu_i\, \nu_{\mathfrak{i}}} = \frac{V_i\, z_i}{\nu_i}$$

$$\frac{\nu_i\, \nu_{\mathfrak{i}}\, c_I^2}{V_i^2\, g_i^2\, V_{\mathfrak{i}}^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_{\mathfrak{i}} = \frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i$$

auf dieselbe Weise für das Instrument und Auge zusammengenommen berechnet.

Durch Substitution der in (g) von Nro. 8 und (h) von Nro. 7 gefundenen Werthe erhalten wir

$$\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i' - \frac{\nu_i\, c_I^4}{V_i^4\, g_i^4}\, L_{\mathfrak{i}}\, (X_1^2 + Y_1'^2)\, Y_1' - \frac{Y_1'\, \varphi_1^2}{2\, \nu_i\, g_i} =$$

$$= -\left[L_i + \frac{\nu_i\, c_I^4}{V_i^4\, g_i^4} L_{\mathfrak{i}}\right](X_1^2 + Y_1'^2)\, Y_1' - M_i\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1$$

$$-\left[O_i + \frac{1}{2\nu_i\, g_i}\right] Y_1'\, \varphi_1^2$$

$$\frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} - \frac{\nu_i\, c_I^4}{V_i^4\, g_i^4}\, L_{\mathfrak{i}}\, (X_1^2 + Y_1'^2)\, X_1 - \frac{X_1\, \varphi_1^2}{2\, \nu_i\, g_i} =$$

$$= -\left[L_i + \frac{\nu_i\, c_I^4}{V_i^4\, g_i^4}\, L_{\mathfrak{i}}\right](X_1^2 + Y_1'^2)\, X_1 - M_i\, X_1\, Y_1'\, \varphi_1$$

$$-\left[N_i + \frac{1}{2\, \nu_i\, g_i}\right] X_1\, \varphi_1^2$$

Aus dem in (g) von Nro. 7 gegebenen Werthe ist aber ersichtlich, dass $\left[L_i + \frac{\nu_i\, c_I^4}{V_i^4\, g_i^4}\, L_{\mathfrak{i}}\right]$ der auf die angegebene Weise für das Instrument und Auge zusammen genommen berechnete Werth von L_i ist.

Die vorhergehenden Glieder sind daher

$$= \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i' \text{ und } \frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\, \Delta\frac{1}{g_i}$$

unter der Voraussetzung, dass L_i oder die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe für das Instrument und Auge zusammengenommen, die übrigen Coefficienten dagegen für das Instrument allein berechnet, und

$$O_i \text{ mit } O_i + \frac{1}{2\nu_i\, g_i}$$

$$N_i \text{ mit } N_i + \frac{1}{2\nu_i\, g_i},$$

verwechselt werden.

Ebenso erhalten wir aus (h) von Nro. 17

$$\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i - \frac{\nu_i\, c_1^2}{V_i^2\, g_i^2}\, S_i\, \acute{Y}_1\, \delta\nu =$$

$$= -\left[S_i + \frac{\nu_i\, c_1^2}{V_i^2\, g_i^2}\, S_i\right] \acute{Y}_1\, \delta\nu - T_i\, \varphi_1\, \delta\nu$$

$$\frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\, \delta\frac{1}{g_i} - \frac{\nu_i\, c_1^2}{V_i^2\, g_i^2}\, S_i\, X_1\, \delta\nu =$$

$$= -\left[S_i + \frac{\nu_i\, c_1^2}{V_i^2\, g_i^2}\, S_i\right] X_1\, \delta\nu$$

und es folgt aus dem in (g) derselben Nummer gegebenen Werthe von $S^{(m)}$, dass jene Glieder weiter nichts sind, als

$$\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} + \delta\frac{f}{g}\right)_i \text{ und } \frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\, \delta\frac{1}{g_i},$$

in welchen S_i oder die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung in der Axe für das Instrument und Auge zusammen genommen, T_i dagegen für das Instrument allein berechnet ist.

Die übrigen Grössen, welche in (c) vorkommen, sind sämmtlich für das Instrument allein berechnet. Unter diesen Bedingungen können wir die Formeln (c) auch auf folgende Weise schreiben.

$$y_i = -\frac{V_i\, z_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i' + \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\Delta^2\frac{1}{g} - \Delta^2\frac{f}{g}\right)_i' \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i + \frac{\nu_i}{V_i}\left(Y\delta^2\frac{1}{g} - \delta^2\frac{f}{g}\right)_i \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta Y_i\,\delta\frac{1}{g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i''\delta\frac{1}{g_i} \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \acute{Y}_1 \end{aligned}\right.$$

$$x_i = -\frac{V_i\, z_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\,\Delta^2\frac{1}{g_i} \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\,\delta\frac{1}{g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\, X_i\,\delta^2\frac{1}{g_i} \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta X_i\,\delta\frac{1}{g_i} + \frac{\nu_i}{V_i}\,\delta\left(X\Delta\frac{1}{g}\right)_i \\ &+ \frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i X_1 \end{aligned}\right.$$

Dieselben Ausdrücke erhält man, wenn man aus (c) von Nro. 5 und (d) von Nro. 15 nach der in Nro. 35 gebrauchten Methode die vom Hauptstrahle an gezählten Coordinaten y_i und x_i des allgemeinen

farbigen Strahles sucht. Da nun hieraus durch weitere Entwickelung die Ausdrücke von Nro. 68 hergeleitet worden sind, so folgt, dass diese Ausdrücke unter den angegebenen Bedingungen anwendbar sind, um die Coordinaten y_i und x_i des allgemeinen farbigen Strahles nach seiner letzten Brechung im Auge zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Axe des letzteren stets mit dem dazu gehörigen Hauptstrahle zusammenfällt.

Auch geben jene Ausdrücke unter denselben Bedingungen unmittelbar die Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles auf der Netzhaut, wenn man unter z_i die Entfernung derselben von der letzten brechenden Fläche des Auges versteht. Da nämlich der Hauptstrahl mit der Axe des Auges zusammenfällt, so sind die Coordinaten y_i und x_i vom Hauptstrahle an gezählt und drücken daher die Seitenabweichungen in der Entfernung z_i aus. Ferner steht die Axe des Auges senkrecht auf der Oberfläche der Netzhaut, und die letztere kann innerhalb der kleinen Entfernung von der Axe, in welcher der allgemeine farbige Strahl sie durchschneidet, als eben betrachtet werden, so dass die bei den Instrumenten der ersten Art gebrauchten Schlüsse hier ebenfalls ihre Anwendung finden.

Winkel zwischen dem Hauptstrahle und der Axe des Instrumentes mit Rücksicht auf die Abweichungen, Winkelabweichungen.

76) Wir haben in den vorhergehenden Nummern die Abweichungen, welche bei den Instrumenten der zweiten Art entstehen, auf die Netzhaut des hinter denselben befindlichen Auges reducirt; es kann jedoch auch von Interesse seyn, dieselben unmittelbar kennen zu lernen. Zu diesem Ende ist weiter nichts erforderlich, als dass wir die Formeln von Nro. 68 auf die letzte Fläche des Instrumentes beziehen, wodurch sie die Lage des Hauptstrahles nach der letzten Brechung und die Seitenabweichungen des dazu gehörigen Bildes bestimmen, welches unmittelbar von dem Auge betrachtet wird. Da sich indessen dieses Bild bei gut organisirten Augen in einer sehr grossen Entfernung befindet, mithin z_i einen äusserst bedeutenden Werth erhält, ja selbst unendlich werden kann, so bekommen sowohl die Ordinate des Hauptstrahles, als die Seitenabweichungen in diesem Falle wegen des Factors z_i eine sehr beträchtliche Grösse, wenn sie in absolutem Maasse ausgedrückt werden, und ausserdem kommt es weniger auf ihre wirkliche Grösse, als auf die Winkel an, unter welchen sie dem Auge erscheinen; bestimmen wir daher diese Winkel.

Zu dem Ende sey wie in Nro. 53

$\overset{\prime\prime}{\omega}_i$ der Winkel zwischen dem Hauptstrahle und der Axe des Instrumentes, bei welchem jedoch nunmehr die Abweichungen berücksichtigt werden.

Da die in (a) von Nro. 68 gegebene Gleichung des Hauptstrahles die einer geraden Linie ist, welche sich in der Ebene der yz befindet, so drückt der Coefficient von z_i die Tangente des Winkels aus, den die gerade Linie mit der Axe der z, d. i. der Hauptstrahl mit der Axe des Instrumentes macht, oder die Tangente von $\overset{''}{\omega}_i$.

Hiernach giebt die allegirte Gleichung

$$tg\overset{''}{\omega}_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 + [(K)_c - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_c - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ -\frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i}\end{array}\right\}\varphi_1 \\ + \left[P_i + (P)_c\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ + Q_c\,K_1^5\,\varphi_1^5\end{array}\right\} \quad (a)$$

Diese Formel ist jedoch nur unter der Voraussetzung richtig, dass g_i hinlänglich gross ist, um die Producte von $\frac{1}{g_i}$ in Grössen von der Ordnung der Abweichungen vernachlässigen zu können. In der ersten Gleichung (c) von Nro. 5, aus welcher die Gleichung des Hauptstrahles abgeleitet wurde, sind nämlich alle Glieder weggelassen worden, welche Abweichungen enthalten und zugleich mit $\left(\frac{z-g}{g}\right)_i$ multiplicirt sind. Diese Glieder bringen in dem Ausdrucke von $tg\overset{''}{\omega}_i$ analoge Glieder hervor, in denen der letztere Factor mit $\frac{1}{g_i}$ verwechselt ist, so dass sie nur unter der angegebenen Voraussetzung vernachlässigt werden können. Die in (a) von Nro. 34 gegebene Gleichung des Hauptstrahles bietet übrigens ein leichtes Mittel dar, um diejenigen unter den erwähnten Gliedern zu finden, in welchen $\frac{1}{g_i}$ nur mit Grössen von der zweiten Ordnung multiplicirt ist, da die Producte solcher Grössen in $\left(\frac{z-g}{g}\right)_i$ bei jener Gleichung beibehalten worden sind. Wählen wir daher in der letzteren die Glieder aus, welche nicht zugleich in der Gleichung (b) derselben Nummer oder (a) von Nro. 68 vorkommen, so sind diese

$$\overset{''}{y}_i = -\left(\frac{z-g}{Vg}\right)_i [P_i'' + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3$$

Hieraus entstehen in dem Ausdrucke von $tg\overset{''}{\omega}_i$ die folgenden Glieder

$$tg\overset{''}{\omega}_i = -\frac{1}{V_i g_i}[P_i'' + (KP - P'')_j]\,\varphi_1^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Diese müssen dem oben in (a) gefundenen Ausdrucke von $tg\overset{''}{\omega}_i$ zugesetzt werden, wenn man die Producte von $\frac{1}{g_i}$ in Grössen der zweiten Ordnung berücksichtigen will. Es ist jedoch um so mehr erlaubt, diese Glieder zu vernachlässigen, da gut organisirte Augen bei Parallelstrahlen deutlich sehen, daher bei der Berechnung der optischen Instrumente g_i gewöhnlich unendlich angenommen wird.

Gehen wir nun zu den Winkeln über, unter welchen die Seitenabweichungen dem Auge erscheinen. Um hierbei die Glieder zu berücksichtigen, welche aus Producten von $\frac{1}{g_i}$ in Grössen der zweiten Ordnung bestehen, müssen wir in den Gleichungen der Seitenabweichungen die Producte jener Grössen in $\left(\frac{z-g}{g}\right)_i$ beibehalten.

Vermöge (f) von Nro. 74 entstehen hierdurch in den Ausdrücken von y'_i und x'_i die folgenden Glieder:

$$y'_i = -\left\{\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]'_i + \delta Y_i\right\}\left(\frac{z-g}{g}\right)_i$$

$$x'_i = -\left\{\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i + \delta X_i\right\}\left(\frac{z-g}{g}\right)_i$$

welche den in Nro. 68 gegebenen Ausdrücken der Seitenabweichungen zugesetzt werden müssen. Bezeichnen wir daher die letzteren durch

$$\left.\begin{aligned} y' &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\right] \\ x' &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

und setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} [y] &= -\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]'_i - \delta Y_i \\ [x] &= -\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i - \delta X_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(d)}$$

so erhalten wir die folgenden Ausdrücke der Seitenabweichungen, in welchen ich die mit z_i multiplicirten Glieder von den übrigen absondere:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right] + \frac{Y'_1}{V_i} - [y] \\ x' &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1}{V_i g_i} + \frac{[x]}{g_i}\right] + \frac{X'_1}{V_i} - [x] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

Vermittelst dieser Gleichungen können die Winkel leicht berechnet werden, welche die Projectionen des allgemeinen farbigen Strahles mit dem Hauptstrahle bilden. Zu diesem Ende müssen wir die Coordinaten x' y z nach den in (c) von Nro. 74 gegebenen Formeln in andere $x,$ $y,$ $z,$ verwandeln, bei denen die Axe der $z,$ mit dem Hauptstrahle zusammenfällt. In den so abgeänderten Gleichungen drücken sodann die Coefficienten von $z,$ die Tangenten der erwähnten Winkel aus. Da hierbei die von den Coordinaten unabhängigen Glieder nicht gebraucht werden, so können wir sie bei der Entwickelung weglassen.

Die allegirten Formeln geben zuerst die folgenden Ausdrücke für die ursprünglichen Coordinaten:

$$\acute{x} = x_{,}$$

$$\acute{y} = \frac{y_{,}}{\cos\omega}$$

$$z = z_{,} \cos\omega - y_{,} \sin\omega \text{ — } (d)$$

folglich, wenn man diese Werthe in den Gleichungen (e) substituirt,

$$\left.\begin{aligned} y_{,} &= z_{,} \cos^2\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right] - y_{,} \sin\omega \cos\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right] \\ x_{,} &= z_{,} \cos\omega \left[(x) - \frac{\acute{X}_1}{V_i g_i} + \frac{[x]}{g_i}\right] - y_{,} \sin\omega \left[(x) - \frac{\acute{X}_1}{V_i g_i} + \frac{[x]}{g_i}\right] \end{aligned}\right\} (f)$$

Die letzten Glieder enthalten kleine Correctionen, welche an den vorhergehenden angebracht werden müssen; substituiren wir daher in denselben statt $y_{,}$ seinen genäherten Werth, welcher aus der ersten der vorhergehenden Gleichungen folgt, nämlich

$$y_{,} = z_{,} \cos^2\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right].$$

so werden die letzten Glieder

$$\left.\begin{aligned} y_{,} &= \ldots - z_{,} \cos^3\omega \sin\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right]^2 \\ x_{,} &= \ldots - z_{,} \cos^2\omega \sin\omega \left[(x) - \frac{\acute{X}_1}{V_i g_i} + \frac{[x]}{g_i}\right]\left[(y) - \frac{\acute{Y}_1}{V_i g_i} + \frac{[y]}{g_i}\right] \end{aligned}\right\} (g)$$

Bei der ferneren Entwickelung werde ich $\frac{1}{{}_{,}g_i}$ und $\frac{1}{z_i}$ von derselben Ordnung wie $\acute{Y}_1$, $\acute{X}_1$ und φ_1; $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \frac{\acute{Y}_1}{V_i}$ und $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \frac{\acute{X}_1}{V_i}$ dagegen von derselben Ordnung wie (y) und (x) annehmen. Die letzteren Grössen sind von der Ordnung $\acute{Y}_1^5$, da die in denselben enthaltenen Glieder der zweiten Ordnung durch die Wirkung des Objectivs auf Grössen der dritten Ordnung reducirt sind, so oft die letzteren gebraucht werden; $[y]$ und $[x]$ sind vermöge der in (d) angenommenen Werthe von der Ordnung $\acute{Y}_1^3$, $\sin\omega$ von der Ordnung φ_1 oder $\acute{Y}_1$. Behält man daher nur diejenigen Glieder bei, welche von der Ordnung $\acute{Y}^5$ sind, so werden die in (g) gefundenen Glieder

$$y_{,} = \ldots - z_{,} \frac{\acute{Y}_1^2}{V_i^2 g_i^2} \cos^3\omega \sin\omega$$

$$x_{,} = \ldots - z_{,} \frac{\acute{X}_1 \acute{Y}_1}{V_i^2 g_i^2} \cos^2\omega \sin\omega$$

Vermöge (q) von Nro. 4 ist

$$\acute{Y}_1 = V_i \acute{Y}_i$$

$$\acute{X}_1 = V_i \acute{X}_i$$

folglich

$$y_{,} = \ldots - z_{,} \frac{\acute{Y}_{\mathrm{i}}^{3}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \cos^{3}\omega \sin\omega$$

$$x_{,} = \ldots - z_{,} \frac{\acute{X}_{\mathrm{i}} \acute{Y}_{\mathrm{i}}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \cos^{2}\omega \sin\omega$$

Substituiren wir diese Werthe statt der letzten Glieder in den Gleichungen (f), so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$y_{,} = z_{,} \cos^{2}\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_{1}}{V_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}} + \frac{[y]}{g_{\mathrm{i}}} - \frac{\acute{Y}_{\mathrm{i}}^{2}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \sin\omega \cos\omega \right]$$

$$x_{,} = z_{,} \cos\omega \left[(x) - \frac{\acute{X}_{1}}{V_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}} + \frac{[x]}{g_{\mathrm{i}}} - \frac{\acute{X}_{\mathrm{i}} \acute{Y}_{\mathrm{i}}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \sin\omega \cos\omega \right]$$

Da die letzten Glieder von der Ordnung $\acute{Y}_{\mathrm{i}}^{5}$ sind, so kann darin $\cos\omega = 1$ gesetzt werden.

Nennen wir nun

$v_{,}$ und $\xi_{,}$ die Winkel, welche die Projectionen des allgemeinen farbigen Strahles auf den Ebenen der $y_{,}$ $z_{,}$ und $x_{,}$ $z_{,}$ mit dem Hauptstrahle machen,

so geben die vorhergehenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} tg\, v_{,} &= \cos^{2}\omega \left[(y) - \frac{\acute{Y}_{1}}{V_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}} + \frac{[y]}{g_{\mathrm{i}}} - \frac{\acute{Y}_{\mathrm{i}}^{2}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \sin\omega \right] \\ tg\, \xi_{,} &= \cos\omega \left[(x) - \frac{\acute{X}_{1}}{V_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}} + \frac{[x]}{g_{\mathrm{i}}} - \frac{\acute{X}_{\mathrm{i}} \acute{Y}_{\mathrm{i}}}{g_{\mathrm{i}}^{2}} \sin\omega \right] \end{aligned} \right\} \quad . \quad (h)$$

Wäre die Deutlichkeit vollkommen, so würden sich alle Strahlen, welche demselben Punkte des Gegenstandes angehören, in einem Punkte des Hauptstrahles durchschneiden. Dieser Durchschnittspunkt brauchte nicht gerade derjenige zu seyn, in dem sich die Strahlen vereinigen würden, wenn nur die Grössen der ersten Ordnung vorhanden wären und dessen Abscisse mit g_{i} bezeichnet wurde.

Nehmen wir daher einen beliebigen Punkt im Hauptstrahle, dessen ursprüngliche Abscisse z_{i} ist und eine solche Beschaffenheit hat, dass $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_{\mathrm{i}}$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_{\mathrm{i}}}$ wird; legen wir ferner durch jenen Punkt und durch denjenigen, in welchem der allgemeine farbige Strahl die Hornhaut durchschneidet, eine gerade Linie, so würde die Deutlichkeit vollkommen seyn, wenn der allgemeine farbige Strahl mit der erwähnten Linie zusammenfiele, die ich den hypothetischen Strahl nennen will.

Bestimmen wir nun die Winkel, welche die Projectionen des hypothetischen Strahles auf den Ebenen der $y_{,}$ $z_{,}$ und der $x_{,}$ $z_{,}$ mit dem Hauptstrahle machen, ebenso wie es bei dem allgemeinen farbigen Strahle geschehen ist. Zu dem Ende seyen

$v_{,,}$ und $\xi_{,,}$ jene Winkel,

$x_{,}$ $y_{,}$ $z_{,}$ die Coordinaten des Punktes, in welchem der hypothetische Strahl den Hauptstrahl durchschneidet,

$x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ die Coordinaten seines Durchschnittspunktes mit der Hornhaut, beide auf dasjenige System bezogen, bei welchem die Axe der $z_{\prime}$ mit dem Hauptstrahle zusammenfällt.

Da der hypothetische Strahl durch die beiden Punkte $x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime}$ und $x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ geht, so sind die Winkel $v_{\prime\prime}$ und $\xi_{\prime\prime}$ durch die Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned} tg\, v_{\prime\prime} &= \frac{y_{\prime} - y_{\prime\prime}}{z_{\prime} - z_{\prime\prime}} \\ tg\, \xi_{\prime\prime} &= \frac{x_{\prime} - x_{\prime\prime}}{z_{\prime} - z_{\prime\prime}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (i)$$

Es bleibt daher nur noch übrig, die Coordinaten $x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime}$ und $x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ zu bestimmen.

Der Punkt, welchem die ersteren zugehören, liegt im Hauptstrahle; mithin ist für denselben

$$x' = y' = 0$$

Ferner wurde die ursprüngliche Abscisse $= z_{\mathrm{i}}$ angenommen; die Gleichungen (c) von Nro. 74 geben daher die verwandelten Coordinaten vermittelst der Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x_{\prime} &= 0 \\ y_{\prime} &= 0 \\ z_{\prime} &= \frac{z_{\mathrm{i}} + (d)}{cos\, \omega} = \frac{z_{\mathrm{i}}}{cos\, \omega} \left[1 + \frac{(d)}{z_{\mathrm{i}}}\right] \end{aligned}$$

Vermöge (m) von Nro. 74 ist

$$(d) = d - \frac{o\, tg^2 \omega}{2}$$

folglich

$$z_{\prime} = \frac{z_{\mathrm{i}}}{cos\, \omega} \left[1 + \frac{d}{z_{\mathrm{i}}} - \frac{o\, tg^2 \omega}{2\, z_{\mathrm{i}}}\right]$$

Schreibt man hierin

$$\frac{d}{g_{\mathrm{i}}} - d\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_{\mathrm{i}} \text{ statt } \frac{d}{z_{\mathrm{i}}}$$

und bemerkt, dass vermöge (n) der allegirten Nummer

$$1 + \frac{d}{g_{\mathrm{i}}} = \frac{c_I}{g_{\mathrm{i}}}$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} x_{\prime} &= 0 \\ y_{\prime} &= 0 \\ z_{\prime} &= \frac{z_{\mathrm{i}}\, c_I}{g_{\mathrm{i}}\, cos\, \omega} \left[1 - \frac{g_{\mathrm{i}}\, d}{c_I} \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_{\mathrm{i}} - \frac{g_{\mathrm{i}}\, o\, tg^2 \omega}{2\, c_I\, z_{\mathrm{i}}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Die Coordinaten $x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ sind dieselben, welche in (t) und (u) der allegirten Nummer mit $x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime}$ bezeichnet wurden. Verwechseln wir daher in jenen Ausdrücken $x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime}$ mit $x_{\prime\prime} y_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ und setzen zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
(\mathfrak{y}) &= -\frac{c_I \acute{Y}_i}{g_i}\left(\frac{X_i^2+\acute{Y}_i^2}{2a_I g_i}\right) + \frac{\acute{Y}_i^2 \sin\omega}{g_i} - \frac{\acute{Y}_i\, o\, tg^2\omega}{2c_I} \\
&\quad + \frac{g_i d}{c_I}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i + \frac{g_i d}{c_I}\left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i \\
&\quad + \left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]'_i + \delta Y_i \\
(\mathfrak{x}) &= -\frac{c_I X_i}{g_i}\left(\frac{X_i^2+\acute{Y}_i^2}{2a_I g_i}\right) + \frac{X_i \acute{Y}_i \sin\omega}{g_i} - \frac{X_i\, o\, tg^2\omega}{2c_I} \\
&\quad + \frac{g_i d}{c_I} X_i \Delta\frac{1}{g_i} + \frac{g_i d}{c_I} X_i \delta\frac{1}{g_i} \\
&\quad + \left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i + \delta X_i
\end{aligned}\right\} \quad (l)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}
y_{\prime\prime} &= \frac{c_I \cos\omega}{g_i}\left[\acute{Y}_i + (\mathfrak{y})\right] \\
x_{\prime\prime} &= \frac{c_I}{g_i}\left[X_i + (\mathfrak{x})\right] \\
z_{\prime\prime} &= \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2\left(\frac{X_i^2+\acute{Y}_i^2}{2a_I}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Die Formeln (k) und (m) geben ferner, wenn man einstweilen den Buchstaben $z_{\prime\prime}$ statt seines vorhergehenden Werthes beibehält,

$$\begin{aligned}
y_\prime - y_{\prime\prime} &= -\frac{c_I \cos\omega}{g_i}\left[\acute{Y}_i + (\mathfrak{y})\right] \\
x_\prime - x_{\prime\prime} &= -\frac{c_I}{g_i}\left[X_i + (\mathfrak{x})\right] \\
\frac{1}{z_\prime - z_{\prime\prime}} &= \frac{g_i \cos\omega}{c_I z_i}\left\{\begin{aligned} &1 + \frac{g_i d}{c_I}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{g_i\, o\, tg^2\omega}{2c_I z_i} + \frac{g_i z_{\prime\prime} \cos\omega}{c_I z_i}\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

wobei $\cos\omega$ in dem von $z_{\prime\prime}$ abhängigen Gliede $= 1$ gesetzt werden kann. Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir aus (i)

$$\left.\begin{aligned}
tg\, v_{\prime\prime} &= -\frac{\cos^2\omega}{z_i}\left\{\begin{aligned} &\acute{Y}_i + (\mathfrak{y}) + \frac{g_i d \acute{Y}_i}{c_I}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{g_i \acute{Y}_i\, o\, tg^2\omega}{2c_I z_i} + \frac{g_i \acute{Y}_i z_{\prime\prime}}{c_I z_i}\end{aligned}\right. \\
tg\, \xi_{\prime\prime} &= -\frac{\cos\omega}{z_i}\left\{\begin{aligned} &X_i + (\mathfrak{x}) + \frac{g_i d X_i}{c_I}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{g_i X_i\, o\, tg^2\omega}{2c_I z_i} + \frac{g_i X_i z_{\prime\prime}}{c_I z_i}\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (n)$$

Wir können jetzt die Projectionen des Winkels berechnen, welchen der allgemeine farbige Strahl mit dem hypothetischen Strahle bildet. Da nämlich $v_\prime$ und $v_{\prime\prime}$ die Winkel bezeichnen, welche die Projectionen beider Strahlen auf der Ebene der $y_\prime z_\prime$ mit der Axe

der $z_{,}$ machen, so drückt $(v_{,} - v_{,,})$ die Projection des von jenen Strahlen eingeschlossenen Winkels auf der genannten Ebene aus, und ebenso ist $(\xi_{,} - \xi_{,,})$ die Projection desselben Winkels auf der Ebene der $x, z_{,}$. Diese Projectionen werde ich die *Winkelabweichungen* nennen, weil sie die Winkel sind, um welche die Projectionen des allgemeinen farbigen Strahles von derjenigen Lage abweichen, die einer vollkommenen Deutlichkeit entsprechen würde. Um sie zu finden, berechne ich zuerst $(tg\,v_{,} - tg\,v_{,,})$ und $(tg\,\xi_{,} - tg\,\xi_{,,})$ vermittelst der Formeln (h) und (n) und substituire zuvor in den ersten Gliedern der letzteren Formeln statt Y'_i und X'_i ihre Werthe

$$Y'_i = \frac{Y'_1}{V_i}$$

$$X'_i = \frac{X'_1}{V_i}$$

Hierdurch geben die allegirten Formeln

$$tg\,v_{,} - tg\,v_{,,} = \cos^2\omega \left\{ \begin{aligned} &(y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{[y]}{g_i} - \frac{Y'^2_i \sin\omega}{g_i^2} + \frac{(\mathfrak{y})}{z_i} \\ &+ \frac{g_i\, d\, Y'_i}{c_I\, z_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{g_i\, Y'_i\, o\, tg^2\omega}{2\, c_I\, z_i^2} + \frac{g_i\, Y'_i\, z_{,,}}{c_I\, z_i^2} \end{aligned} \right.$$

$$tg\,\xi_{,} - tg\,\xi_{,,} = \cos\omega \left\{ \begin{aligned} &(x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{[x]}{g_i} - \frac{X'_i\, Y'_i}{g_i^2}\sin\omega + \frac{(\mathfrak{x})}{z_i} \\ &+ \frac{g_i\, d\, X'_i}{c_I\, z_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{g_i\, X'_i\, o\, tg^2\omega}{2\, c_I\, z_i^2} + \frac{g_i\, X'_i\, z_{,,}}{c_I\, z_i^2} \end{aligned} \right.$$

Substituirt man nun statt $[y]$, $[x]$, $(\mathfrak{y})$, $(\mathfrak{x})$ und $z_{,,}$ ihre Werthe aus (d), (l) und (m), bemerkt man ferner, dass

$$\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i Y'_i,\ \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)'_i \text{ und } \left(Y\delta\frac{1}{g} - \delta\frac{f}{g}\right)_i$$

und ebenso die analogen Grössen in Bezug auf X nach den angenommenen Grundsätzen als Grössen der dritten Ordnung betrachtet werden, deren Producte in Grössen von der Ordnung $\frac{1}{z}$ und Y'_1 vernachlässigt werden, so fallen in jeder der vorhergehenden Formeln alle auf die erste Zeile folgende Glieder weg. Da ferner die erste

Zeile selbst von der dritten Ordnung ist, so kann der Unterschied der Tangenten mit dem Unterschiede der Winkel verwechselt und $\cos\omega = 1$ gesetzt werden.

Bezeichnet man daher durch

v und ξ die Winkelabweichungen oder die Winkel $(v_{,} - v_{,,})$ und $(\xi_{,} - \xi_{,,})$,

so sind dieselben vermittelst der Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned} v &= (y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ \xi &= (x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den in (c) angenommenen zeigt, dass die in Nro. 68 gegebenen Ausdrücke der Seitenabweichungen auch auf die Winkelabweichungen anwendbar sind, wenn man sie auf die letzte Fläche des Instrumentes bezieht und den gemeinschaftlichen Factor z_i weglässt.

Die Abscisse z_i, welche für den Durchschnitt des hypothetischen Strahles mit dem Hauptstrahle angenommen wurde, bleibt vorerst noch unbestimmt, ebenso wie bei den Seitenabweichungen, wo sie sich auf die Stelle bezieht, für welche die Seitenabweichungen berechnet werden sollen.

Die oben gefundenen Formeln bieten ein Mittel dar, auch den Winkel selbst zu finden, welchen der allgemeine farbige Strahl mit dem hypothetischen einschliesst. Denken wir uns nämlich die Gleichungen der Projectionen beider Strahlen auf den Ebenen der $y, z,$ und der $x, z_{,}$, so sind $tg v_{,}$ und $tg v_{,,}$, $tg\xi_{,}$ und $tg\xi_{,,}$ die Coefficienten von $z_{,}$ in diesen Gleichungen. Nennt man daher

ϱ den Winkel zwischen dem hypothetischen und dem allgemeinen farbigen Strahle,

so ist derselbe durch den Ausdruck gegeben:

$$\sin\varrho = \sqrt{\frac{(tg v_{,} - tg v_{,,})^2 + (tg\xi_{,} - tg\xi_{,,})^2 + (tg v_{,}\, tg\xi_{,,} - tg\xi_{,}\, tg v_{,,})^2}{(1 + tg^2 v_{,} + tg^2 \xi_{,})\,(1 + tg^2 v_{,,} + tg^2 \xi_{,,})}}$$

Substituirt man hierin statt $tg v_{,}$ und $tg\xi_{,}$ ihre Werthe

$$tg v_{,} = tg v_{,,} + v$$
$$tg\xi_{,} = tg\xi_{,,} + \xi$$

und bemerkt, dass v, ξ und ϱ von der dritten Ordnung sind, so wird

$$\varrho = \sqrt{v^2 + \xi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

Wir können diesen Ausdruck mit dem analogen vergleichen, welcher sich auf die Seitenabweichungen bezieht. Bezeichnen wir nämlich durch

r' den parallel mit der Ebene der $x'y'$ gemessenen Abstand zwischen dem Hauptstrahle und dem allgemeinen farbigen Strahle, an der Stelle, welche der Abscisse z_i entspricht, so ist

$$r' = \sqrt{y'^2 + x'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

Da sich nun y' und x' in v und ξ verwandeln, wenn man den gemeinschaftlichen Factor z_i weglässt, so verwandelt sich eben dadurch r' in ϱ, so dass mit dieser Modification die Formel (q) ebenfalls gebraucht werden kann, um den Winkel zwischen dem hypothetischen und dem allgemeinen farbigen Strahle zu berechnen.

Die vorhergehende Analyse bezog sich zwar eigentlich nur auf den in Nro. 74 und 75 betrachteten Fall, wobei angenommen wurde, dass das Auge bei Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes seine Axe nach dem, jenem Punkte entsprechenden Hauptstrahle richtet; es lässt sich jedoch leicht einsehen, dass die gefundenen Formeln auch auf den in Nro. 73 untersuchten Fall anwendbar sind, bei welchem die Voraussetzung zu Grunde lag, dass das Auge seine Lage unverändert in der Axe des Instrumentes beibehält.

In den vorhergehenden Formeln bezeichnete nämlich

— d die Abscisse des Scheitels der Hornhaut bei seiner anfänglichen Lage in der Axe des Instrumentes,

— (d) die Abscisse, welche bei der veränderten Lage des Auges dem Durchschnitte des Hauptstrahles mit der Hornhaut zugehört,

$z_{,,}$ die Abscisse des Durchschnittes des allgemeinen farbigen Strahles mit der Hornhaut in der letzteren Lage des Auges.

Bei den beiden ersteren fiel die Abscissenaxe mit der Axe des Instrumentes, bei $z_{,,}$ dagegen mit dem Hauptstrahle zusammen.

Hierdurch entstanden die Werthe

$$(d) - d = -\frac{o\, tg^2\, \omega}{2}$$

$$z_{,,} = \left(\frac{c_I}{g_i}\right)^2 \left(\frac{X_i'^2 + Y_i'^2}{2\, a_I}\right)$$

deren Substitution in den übrigen Grössen die von o und a_I abhängigen Glieder hervorbrachte.

Wird nun die Stelle des Auges unveränderlich angenommen, so erhalten $(d) - d$ und $z_{,,}$ andere Werthe, welche jedoch von derselben Ordnung sind, wie die vorhergehenden, und an deren Stelle gesetzt werden müssen. Da aber die jenen Grössen entsprechenden Glieder in den Endresultaten weggefallen sind, so muss dasselbe stattfinden, wenn man ihre abgeänderten Werthe substituirt, so dass die erhaltenen Formeln in allen Fällen gebraucht werden können.

Vergleichung der für die verschiedenen Instrumente in Bezug auf die Abweichungen erhaltenen Resultate.

77) Vergleichen wir jetzt die Resultate, welche wir in den Nummern 72 bis 76 gefunden haben, so sehen wir, dass bei allen Instrumenten die Formeln (a) und (f) von Nro. 68 die Gleichungen des Hauptstrahles, und die Formeln (c), (d) und (e) derselben Nummer die Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles ausdrücken, welche auf der Projectionsebene oder der Netzhaut entstehen, und dass nur in den verschiedenen Fällen die folgenden Modificationen an den in jenen Formeln enthaltenen Grössen stattfinden.

1) Bei den Instrumenten der ersten Art, welche von dem Gegenstande ein Bild auf einer Projectionsebene entwerfen, bezeichnet z_i die Entfernung dieser Ebene von der letzten brechenden Fläche; alle übrige Grössen, welche in den Formeln vorkommen, behalten ihre frühere Bedeutung.

Je nachdem nur $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ oder auch $(z-g)_i$ als eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ zu betrachten ist, können diejenigen Formeln von Nro. 68 genommen werden, welche der einen oder der anderen Voraussetzung entsprechen.

2) Nimmt man bei den Instrumenten der zweiten Art an, dass sich das Auge, in welches die Strahlen nach ihrem Durchgange durch das Instrument fallen, in der Axe des letzteren befindet, ohne seinen Ort zu verändern, so muss man das Instrument und das Auge als ein zusammengehöriges System von brechenden Flächen betrachten und hiernach alle in den Formeln enthaltene Grössen berechnen.

z_i bezeichnet den Abstand des Scheitels der Netzhaut von der letzten brechenden Fläche des Auges,

$\varkappa$ den Krümmungshalbmesser der Netzhaut,

O_i muss mit $O_i - \frac{1}{2\nu_i\varkappa}$

N_i mit $N_i - \frac{1}{2\nu_i\varkappa}$

P_i mit $P_i + \frac{V_i z_i}{2\nu_i^2\varkappa}\left[1-\frac{\nu_i K_i}{V_i^2 z_i}\right]$ verwechselt werden.

3) Wird dagegen bei den Instrumenten der zweiten Art angenommen, dass das Auge zwar in einerlei Entfernung von der letzten brechenden Fläche des Instrumentes bleibt, aber bei Betrachtung eines jeden Punktes seine Axe so richtet, dass sie mit dem, jenem Punkte zugehörigen Hauptstrahle zusammenfällt, so müssen

$$\frac{V_i z_i}{\nu_i},\ \frac{\nu_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i,\ L_i \text{ und } S_i$$

für das Instrument und Auge zusammengenommen berechnet werden, unter der Voraussetzung, dass beide ein einziges System von brechenden Flächen bilden und eine gemeinschaftliche Axe haben.

z_i bezeichnet den Abstand des Scheitels der Netzhaut von der letzten brechenden Fläche des Auges.

Alle übrige Grössen, welche in den Formeln vorkommen, werden für das Instrument allein berechnet,

$$O_i \text{ muss mit } O_i + \frac{1}{2 v_i g_i}$$

$$N_i \text{ mit } N_i + \frac{1}{2 v_i g_i}$$

verwechselt werden.

Die Gleichungen des Hauptstrahles (a) und (f) von Nro. 68 fallen in Bezug auf seine Lage im Auge hier weg, da der Hauptstrahl mit der Axe des Auges zusammenfällt.

4) In allen vorhergehenden Fällen können dieselben Formeln auch gebraucht werden, um die Seitenabweichungen in der Nähe der Projectionsebene oder der Netzhaut zu bestimmen, wenn man unter z_i die Abscisse versteht, die derjenigen Stelle zugehört, an welcher die Seitenabweichungen berechnet werden sollen. Die in 2. angegebenen, von x abhängigen Glieder fallen aber alsdann weg, weil die Strahlen nicht, wie dort angenommen wurde, von der gekrümmten Netzhaut aufgefangen werden.

5) Soll bei den Instrumenten der zweiten Art die Lage der Strahlen nicht nach der letzten Brechung im Auge, sondern nach der letzten Brechung im Instrumente bestimmt werden, so sind die Formeln von Nro. 68 zwar auch anwendbar, wenn man unter z_i die Abscisse versteht, für welche die Ordinate des Hauptstrahles und die Seitenabweichungen berechnet werden sollen, es ist jedoch bequemer, in diesem Falle die Winkel zu gebrauchen. Lässt man in den Formeln der Seitenabweichungen den gemeinschaftlichen Factor z_i weg, so drücken sie die Winkelabweichungen aus. Der Winkel des Hauptstrahles mit der Axe des Instrumentes ist durch die Formel (a) von Nro. 76 gegeben. Die in den Formeln enthaltenen Grössen müssen für das Instrument allein berechnet werden.

Kleine Veränderungen im Instrumente und Auge.

78) Die Instrumente der ersten und zweiten Art haben das mit einander gemein, dass von dem Gegenstande ein Bild auf der Projectionsebene oder der Netzhaut entworfen wird, welche daher mit dem gemeinschaftlichen Namen *Projectionsfläche* bezeichnet werden können.

Eine nothwendige Bedingung bei allen optischen Werkzeugen ist nun die, dass das Bild so genau als möglich mit der Projectionsfläche zusammenfällt. Ist, wie ich es voraussetze, bei der Construction der Instrumente darauf Rücksicht genommen, dass dieses sehr nahe der Fall ist, so kann eine vollkommene Erfüllung jener Bedingung auf zweierlei Art bewirkt werden. Es kann nämlich einmal eine Verschiebung der Projectionsfläche parallel mit sich selbst stattfinden, sodann können aber auch kleine Abänderungen in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen, sowohl bei dem Instrumente als dem Auge, z. B. durch Verschiebung der Oculareinsätze, durch Veränderung der Krümmungen und Entfernungen der brechenden Flächen im Auge etc. vorgenommen werden.

Bei Microscopen und anderen Instrumenten, durch welche kleine, in der Nähe befindliche Gegenstände vergrössert dargestellt werden, kommt hierzu noch eine kleine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes bei ungeänderter Einrichtung des Instrumentes. Diese darf jedoch nicht mit derjenigen verwechselt werden, die sich auf Fernröhre bezieht und in Nro. 27 bis 31 untersucht wurde, indem wir bei der letzteren Untersuchung die Voraussetzung zu Grunde gelegt haben, dass der Oculareinsatz jedesmal so weit verschoben wird, als es erforderlich ist, um die letzte Vereinigungsweite ungeändert zu erhalten, wodurch also der hier beabsichtigte Zweck nicht erreicht wird.

Berechnen wir nun den Einfluss, den die erwähnten Veränderungen auf die Seitenabweichungen äussern.

Da der Voraussetzung nach die angegebene Bedingung durch die Construction des Instrumentes bereits sehr nahe erfüllt ist, so können die vorzunehmenden Veränderungen nur sehr klein seyn, daher es erlaubt ist, ihre Potenzen und Producte in andere Abweichungen und in die Grösse $\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{g}\right)_i$ zu vernachlässigen, welche stets von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist.

Eine Ausnahme hiervon scheinen diejenigen Instrumente der ersten Art zu machen, bei denen die Projectionsfläche in einer sehr grossen Entfernung angebracht ist, wie es z. B. bei dem Sonnenmicroscope stattfindet. In diesem Falle bringen kleine Veränderungen in der Entfernung des Gegenstandes und in der Einrichtung des Instrumentes Aenderungen in der Entfernung des Bildes hervor, welche in Vergleichung mit den ersteren sehr gross sind. Sollte daher das genaue Einstellen des Instrumentes bloss durch eine Verschiebung der Projectionsfläche bewirkt werden, so würde jene nach Umständen eine bedeutende Grösse erhalten, und ausserdem der Vortheil verloren gehen, dass man durch eine beliebige Stellung der Projectionsfläche die Vergrösserung nach Willkühr bestimmen kann. Aus diesem Grunde sind die Instrumente der Art gewöhnlich so eingerichtet,

dass sie durch kleine Verschiebungen des Gegenstandes und der brechenden Flächen eingestellt werden und höchstens nur solche Verschiebungen der Projectionsfläche stattfinden, welche in Vergleichung mit der ganzen Entfernung jener Fläche sehr klein sind, so dass die in aliquoten Theilen der Entfernung der Projectionsfläche ausgedrückte Verschiebung derselben in allen Fällen als eine kleine Grösse zu betrachten ist, deren Producte in Grössen der dritten Ordnung vernachlässigt werden können.

Diess vorausgesetzt, bringe ich die in (c) von Nro. 35 gegebenen Ausdrücke der Seitenabweichungen unter die Form:

$$\left.\begin{aligned} y'_i &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i\right] \\ x'_i &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1}{V_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Nehmen wir nun an, dass die Grössen, welche hierin vorkommen, Abänderungen erleiden, die ich mit der Characteristik D bezeichne und deren Producte in $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i$ vernachlässigt werden, so sind die Veränderungen, welche hierdurch in den Seitenabweichungen entstehen:

$$\left.\begin{aligned} Dy'_i &= z_i\left[D(y) + (y)\frac{Dz_i}{z_i} - \frac{Y'_1}{V_i}\left(D\frac{1}{g_i} - D\frac{1}{z_i}\right)\right] \\ Dx'_i &= z_i\left[D(x) + (x)\frac{Dz_i}{z_i} - \frac{X'_1}{V_i}\left(D\frac{1}{g_i} - D\frac{1}{z_i}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Die Glieder $D(y)$ und $D(x)$ enthalten Grössen von derselben Ordnung wie $D\frac{1}{g_i}$ und $D\frac{1}{z_i}$, welche aber noch ausserdem mit Grössen der zweiten und dritten Ordnung multiplicirt sind. Jene Glieder werden daher nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt. Dasselbe gilt von den Gliedern $(y)\frac{Dz_i}{z_i}$ und $(x)\frac{Dz_i}{z_i}$, da (y) und (x) von der dritten Ordnung sind, $\frac{Dz_i}{z_i}$ aber die in aliquoten Theilen der Entfernung der Projectionsfläche ausgedrückte Verschiebung derselben bezeichnet, deren Producte in Grössen der dritten Ordnung der Voraussetzung nach nicht beibehalten werden. Hierdurch reduciren sich die Formeln (b) auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} Dy'_i &= -\frac{z_i Y'_1}{V_i}\left(D\frac{1}{g_i} - D\frac{1}{z_i}\right) \\ Dx'_i &= -\frac{z_i X'_1}{V_i}\left(D\frac{1}{g_i} - D\frac{1}{z_i}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Die von $D\frac{1}{z_i}$ abhängigen Glieder in den vorhergehenden Ausdrücken geben den Einfluss an, welchen eine Verschiebung der Projectionsfläche auf die Coordinaten y'_i und x'_i oder die Seitenab-

weichungen äussert. Es würde unnöthig seyn, die erwähnten Glieder beizubehalten, wenn man dagegen z_i als eine veränderliche Grösse betrachtete, indem alsdann die Veränderungen derselben ebenfalls Verschiebungen der Projectionsfläche ausdrücken würden. Es ist jedoch bequemer, die Entfernung der Projectionsfläche als gegeben anzusehen und kleine Veränderungen in der Stellung derselben durch das Glied $D\frac{1}{z_i}$ zu berücksichtigen, wodurch nunmehr z_i als unveränderlich zu betrachten ist.

Die oben angeführten Veränderungen in der Entfernung des Gegenstandes und in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen bringen Veränderungen in den entsprechenden Vereinigungsweiten hervor, welche sich auf alle folgende bis zur letzten g_i fortpflanzen, da nach den in (b) von Nro. 4 gegebenen Formeln jede folgende Vereinigungsweite von der vorhergehenden abhängt. Versteht man daher unter $D\frac{1}{g_i}$ die Summe der Aenderungen, welche $\frac{1}{g_i}$ hierdurch erleidet, so drücken die von $D\frac{1}{g_i}$ abhängigen Glieder in den vorhergehenden Ausdrücken den Einfluss aus, welchen jene Veränderungen zusammengenommen auf die Coordinaten y'_i und x'_i oder die Seitenabweichungen äussern.

Wäre es nun von Interesse, diesen Einfluss näher kennen zu lernen, so würde diess, analytisch betrachtet, keinen Schwierigkeiten unterliegen, indem hierzu weiter nichts erforderlich ist, als die Formeln (b) von Nro. 4 nach der Characteristik D zu differentiiren und dabei g_{i-1}, d_{i-1}, c_i, a_i und g_i veränderlich anzunehmen, aus der auf diese Weise erhaltenen Differenzengleichung sodann $D\frac{1}{g_i}$ für die letzte brechende Fläche durch Integration abzuleiten, so wie es früher in allen ähnlichen Fällen geschehen ist. Um jedoch in der Ausübung $D\frac{1}{g_i}$ nach diesem analytischen Ausdrucke berechnen zu können, müssten die Veränderungen in der Entfernung des Gegenstandes und in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen in Zahlen gegeben seyn, welches aber, namentlich bei dem Auge, nicht der Fall ist. Glücklicherweise hat, wie die Folge zeigen wird, eine solche Kenntniss von $D\frac{1}{g_i}$ für die Construction der optischen Werkzeuge kein Interesse und es genügt, im Allgemeinen die Form zu kennen, unter welcher die von $D\frac{1}{z_i}$ und $D\frac{1}{g_i}$ abhängigen Glieder in den Ausdrücken der Seitenabweichungen vorkommen. Die Vergleichung der Formeln (a) und (c) zeigt aber, dass sie mit den von $\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i$ abhängigen Gliedern einerlei Coefficienten haben und daher mit diesen vereinigt werden können. Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{z}_i = \left(\frac{z-g}{gz}\right)_i + D\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i = \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i + D\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{z}\right)_i \quad \text{(d)}$$

so ist die Summe der in (a) und (c) enthaltenen Glieder

$$\left.\begin{aligned} y'_i + Dy'_i &= z_i\left[(y) - \frac{Y'_1 \mathfrak{z}_i}{V_i}\right] \\ x'_i + Dx'_i &= z_i\left[(x) - \frac{X'_1 \mathfrak{z}_i}{V_i}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Wir haben bei den vorhergehenden Formeln angenommen, dass eine Projectionsfläche vorhanden wäre, auf welcher die Seitenabweichungen stattfänden. Nach der in der vorhergehenden Nummer gemachten Bemerkung können jedoch die Ausdrücke der Seitenabweichungen auch gebraucht werden, um die letzteren in der der Abscisse z_i zugehörigen Entfernung zu berechnen, ohne dass sich daselbst eine Projectionsfläche befindet. Es ist leicht einzusehen, dass die vorhergehenden Formeln auch in diesem Falle anwendbar sind, nur muss man, weil nunmehr von keiner Verschiebung der Projectionsfläche die Rede seyn kann,

$$D\frac{1}{z_i} = 0$$

setzen, worauf die Formeln (d) und (e) die Aenderungen bestimmen, welche die Seitenabweichungen in der der Abscisse z_i entsprechenden Stelle dadurch erleiden, dass die mit $D\frac{1}{g_i}$ bezeichneten kleinen Veränderungen vorgenommen werden.

Vermittelst der Resultate, welche wir in Nro. 76 gefunden haben, ist es leicht, die vorhergehenden Schlüsse auch auf die Winkelabweichungen anzuwenden. Wir haben nämlich daselbst gesehen, dass die Ausdrücke von jenen aus den Ausdrücken der Seitenabweichungen erhalten werden, wenn man den gemeinschaftlichen Factor z_i weglässt oder mit anderen Worten ihn $= 1$ setzt. Da ferner hierbei keine Projectionsfläche vorhanden ist, so ist

$$D\frac{1}{z_i} = 0$$

Hiernach sind die Winkelabweichungen in dem obigen Falle begriffen, mithin die Formeln (d) und (e) auch bei ihnen brauchbar, wenn der gemeinschaftliche Factor z_i weggelassen wird.

Soll daher der Einfluss berücksichtigt werden, welchen eine Verschiebung der Projectionsfläche oder Veränderungen in der Entfernung des Gegenstandes und in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen auf die Seiten- und Winkelabweichungen äussern, so reicht es in allen Fällen hin, in den Ausdrücken der ersteren, welche in Nro. 68 gegeben worden sind, $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ mit $\mathfrak{z}_i$ zu verwechseln und diese Grösse als veränderlich zu betrachten, ohne sich darum zu bekümmern, durch welche Ursache die Veränderungen derselben hervorgebracht werden. In Bezug auf die Winkelabweichungen muss ausserdem der in jenen Formeln enthaltene gemeinschaftliche Factor z_i weggelassen werden.

Wir können auf ähnliche Weise untersuchen, wie die Lage des Hauptstrahles von den hier betrachteten Veränderungen abhängt.

Nach (a) von Nro. 68 lassen sich die Gleichungen des Hauptstrahles auf die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i z_i \varphi_1}{v_i}\left[1 - \frac{v_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i + (y'')\right] \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (f)$$

wobei (y'') die Glieder von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen bezeichnet.

Bezieht man die Formeln stets auf denjenigen Punkt des Gegenstandes, für welchen φ_1 denselben Werth hat, so muss φ_1 als eine unveränderliche Grösse in Bezug auf die Characteristik D betrachtet werden. Wenden wir ferner die bei den Seitenabweichungen gemachten Schlüsse auch hier an, so gelangen wir zu dem Resultate, dass in dem vorliegenden Falle ebenfalls die Producte von $\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i$ und von Grössen der zweiten Ordnung in die mit der Characteristik D versehenen Veränderungen vernachlässigt werden könnnen. Hiernach geben die Formeln (f)

$$\left.\begin{aligned} D y''_i &= \frac{V_i z_i \varphi_1}{v_i}\left[\frac{D . V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{v_i K_i}{V_i^2} D\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i\right] \\ D x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (g)$$

Die Summe der in (f) und (g) enthaltenen Glieder ist mit Rücksicht auf den in (d) angenommenen Werth von $\mathfrak{z}_i$

$$\begin{aligned} y''_i + D y''_i &= \frac{V_i z_i \varphi_1}{v_i}\left[1 + \frac{D . V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{v_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} + (y'')\right] \\ x''_i + D x''_i &= 0 \end{aligned}$$

woraus folgt, dass es hinreicht, in (a) von Nro. 68, $\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i$ mit $\mathfrak{z}_i$ zu verwechseln und dem inclavirten Factor von φ_1 das Glied $\frac{D . V_i z_i}{V_i z_i}$ zuzusetzen, um den Einfluss der erwähnten Veränderungen zu berücksichtigen. Hierdurch werden die Gleichungen des Hauptstrahles

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_i z_i}{v_i}\left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} &1 + [(K)_e - K_1]\,\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ &+ \frac{D . V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{v_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} \end{aligned}\right\} \varphi_1 \\ &+ \left[P_i + (P)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1^3 \\ &+ Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{aligned}\right. \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} (h)$$

Den mit der Characteristik D bezeichneten Veränderungen in dem vorhergehenden Ausdrucke von y''_i müssen dieselben Werthe beigelegt werden, welche bei der Berechnung der Seitenabweichungen gebraucht werden, daher die davon abhängigen Glieder ebensowenig

wie bei den letzteren berechnet werden können, ohne die Veränderungen im Instrumente und Auge genau zu kennen. Die Folge wird indessen zeigen, dass es auch hier hinreicht, die Form zu wissen, unter welcher jene Glieder in der Gleichung des Hauptstrahles vorkommen.

Ist $(z-g)_i$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$, so wird

$$\mathfrak{z}_i = \left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i + D\left(\frac{z-g}{g^2}\right)_i = \frac{1}{g_i^2}\left[z-g+Dz-Dg\right]_i \text{ . (i)}$$

Ferner erhalten wir aus (f) von Nro. 68 für diesen Fall die Gleichungen des Hauptstrahles:

$$\left.\begin{array}{l} y''_i = \dfrac{V_i\, g_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1+[(K)_e-K_1]\,\Delta\dfrac{1}{c_1}+[(K)_e-K_1]^2\left(\Delta\dfrac{1}{c_1}\right)^2 \\ +\dfrac{D\,V_i\,g_i}{V_i\,g_i}+\left(1-\dfrac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}\right)g_i\,\mathfrak{z}_i \end{array}\right\}\varphi_1 \\ +\left[P_i+(P)_e\,\Delta\dfrac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ +Q_e\,K_1^5\,\varphi_1^5 \end{array}\right. \\ x''_i = 0 \end{array}\right\} \text{(k)}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den in (h) gefundenen zeigt, dass die ersteren aus den letzteren entspringen, wenn man z_i mit g_i verwechselt und dem inclavirten Factor von φ_1 das Glied $g_i\,\mathfrak{z}_i$ zusetzt.

Durch Anwendung derselben Methode erhalten wir endlich aus (a) von Nro. 76 die Tangente des Winkels, welchen der Hauptstrahl mit der Axe des Instrumentes bildet, unter der Voraussetzung, dass die erwähnten Veränderungen berücksichtigt werden sollen, nämlich

$$tg\,\omega''_i = \frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1+[(K)_e-K_1]\,\Delta\dfrac{1}{c_1}+[(K)_e-K_1]^2\left(\Delta\dfrac{1}{c_1}\right)^2 \\ -\dfrac{v_i\,K_i}{V_i^2\,g_i}+\dfrac{1}{V_i}\,D\left(V_i-\dfrac{v_i\,K_i}{V_i\,g_i}\right) \end{array}\right\}\varphi_1 \\ +\left[P_i+(P)_e\,\Delta\dfrac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ +Q_e\,K_1^5\,\varphi_1^5 \end{array}\right\} \text{(l)}$$

Bei allen vorhergehenden Formeln liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass $\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist, deren Producte in die durch die Characteristik D bezeichneten Veränderungen vernachlässigt werden können. Sollen jedoch diese Producte beibehalten werden, so kann dieses leicht vermittelst der Formeln (b) von Nro. 35 geschehen, wofern man nur die Grössen der zweiten Ordnung berücksichtigt, und die Untersuchung auf das letzte von dem Instrumente entworfene Bild beschränkt.

Jene Formeln haben dieselbe Gestalt, wie die Formeln (a) der gegenwärtigen Nummer. Behandelt man daher die letzteren ebenso,

wie es oben geschehen ist, so folgt aus dem daselbst Gesagten, dass zu den in (c) erhaltenen Ausdrücken von Dy'_i und Dx'_i bei der gegenwärtigen Voraussetzung noch die Glieder

$$Dy'_i = -\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i D\frac{z_i\, Y'_1}{V_i}$$

$$Dx'_i = -\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i D\frac{z_i\, X'_1}{V_i}$$

hinzukommen.

Y'_1 und X'_1 bezeichnen die Coordinaten des als beliebig angenommenen Einfallspunktes des Strahles auf der ersten brechenden Fläche; beziehen wir daher die Formeln bei allen Veränderungen stets auf denselben Einfallspunkt, so können wir DY'_1 und $DX'_1 = 0$ setzen. Hierdurch werden die vorhergehenden Glieder:

$$\left.\begin{aligned} Dy'_i &= -\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i Y'_1\, D\frac{z_i}{V_i} \\ Dx'_i &= -\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i X'_1\, D\frac{z_i}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

wobei z_i in Bezug auf die Characteristik D als unveränderlich betrachtet werden muss, wenn keine wirkliche Projectionsfläche vorhanden ist. Setzen wir daher nunmehr

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_i = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i &+ D\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i \\ &+ \frac{V_i}{z_i}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i D\frac{z_i}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

so wird die Summe der in (a), (c) und (m) erhaltenen Glieder ebenfalls durch die Formeln (e) ausgedrückt, woraus folgt, dass es auch bei der gegenwärtigen Voraussetzung hinreicht, in den Formeln (i) von Nro. 68, $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ mit dem vorhergehenden Werthe von $\mathfrak{z}_i$ zu verwechseln, um auf die hier betrachteten Veränderungen Rücksicht zu nehmen.

Endlich geben die Formeln (h) von Nro. 68 die Gleichungen des Hauptstrahles unter der gegenwärtigen Voraussetzung und mit Rücksicht auf die erwähnten Veränderungen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} y''_i &= \frac{V_1 z_i}{\nu_i}\left\{\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{\nu_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \\ &+ \frac{D V_i\, z_i}{V_i\, z_i} - \frac{\nu_i}{V_i\, z_i} D \cdot \frac{K_i}{V_i}\left(\frac{z-g}{g}\right)_i \end{aligned}\right\}\varphi_1 \right. \\ &\qquad\qquad + \mathfrak{P}\,\varphi_1^3 \\ x''_i &= 0 \end{aligned}\right\} (o)$$

Siebentes Kapitel.

Undeutlichkeit und Lage des von einem leuchtenden Punkte entstehenden Bildes.

Die in dem vorhergehenden Kapitel gefundenen Formeln bilden die Grundlage zur Auflösung der Probleme höherer Ordnungen. Eines der wichtigsten derselben ist die Untersuchung, auf welche Weise die optischen Instrumente eingerichtet werden müssen, um bei ihnen die grösstmögliche Deutlichkeit zu erhalten. Hierzu ist es zuerst nothwendig, die Undeutlichkeit in dem Bilde eines leuchtenden Punktes näher zu bestimmen und eine Methode aufzusuchen, durch welche alle dabei concurrirende Strahlen berücksichtigt werden, da die vorhergehenden Formeln sich nur auf einen einzigen von ihnen beziehen. Diese Methode wird uns zugleich in den Stand setzen, den Ort des Bildes anzugeben, auf welchen die Abweichungen einen bedeutenden Einfluss haben.

Absolute Undeutlichkeit in dem Bilde eines Punktes, wenn der Hauptstrahl als Axe des Strahlenbündels angenommen wird.

Wir haben in Nro. 57 gesehen, dass die von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen, ohne Rücksicht auf die Abweichungen, nach den verschiedenen Brechungen Kegel bilden, deren Axen mit dem jenem Punkte zugehörigen Hauptstrahle zusammenfallen. Wäre nun eine Projectionsfläche vorhanden, welche eine solche Beschaffenheit hätte, dass die Scheitel der sämmtlichen, nach der letzten Brechung entstehenden Strahlenkegel, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entsprechen, in ihr lägen, so würden sich diejenigen Strahlen, welche von einem und demselben Punkte ausgehen, auch auf der Projectionsfläche in einem und demselben Punkte vereinigen und hierdurch ein vollkommen deutliches Bild des Gegenstandes entwerfen. In der Wirklichkeit findet jedoch diese vollkommene Deutlichkeit nicht statt, weil die Strahlen durch die Abweichungen eine andere Lage erhalten, so dass sich diejenigen, welche von einem Punkte ausgehen, nach der letzten Brechung nicht mehr in einem Punkte schneiden.

Nehmen wir den Hauptstrahl als eine Axe an, auf welche die Lage der übrigen dazu gehörigen Strahlen bezogen wird, so folgt

aus demjenigen, was wir in dem vorhergehenden Kapitel entwickelt haben, dass die durch die Gleichungen (d) von Nro. 68 gegebenen Grössen y' und x' die auf der Projectionsfläche entstehenden Seitenabweichungen des allgemeinen farbigen Strahles ausdrücken, welche als zwei auf jener Fläche gezogene rechtwinkelige Coordinaten zu betrachten sind.

Diese Coordinaten bestimmen die Entfernung zwischen den Durchschnittspunkten des Hauptstrahles und des allgemeinen farbigen Strahles, welche ich mit r' bezeichne. Da nämlich der Ursprung derselben in dem Durchschnittspunkte des Hauptstrahles liegt, so ist

$$r'^2 = y'^2 + x'^2 \quad \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Diese Formel ist auch in dem Falle anwendbar, wenn keine Projectionsfläche vorhanden ist, sondern die Lage der Strahlen an derjenigen Stelle untersucht werden soll, welche der Abscisse z entspricht. r' bezeichnet alsdann die Entfernung zwischen dem Hauptstrahle und dem allgemeinen farbigen Strahle in einer Ebene gemessen, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und deren Abstand von der letzten brechenden Fläche durch die Abscisse z bestimmt wird.

Wir haben ferner durch die Vergleichung der Formeln (p) und (q) von Nro. 76 gesehen, dass bei den Instrumenten der zweiten Art r' auch den Winkel ausdrückt, welchen der allgemeine farbige Strahl mit derjenigen Richtung macht, die er haben müsste, wenn nach der letzten Brechung ein vollkommen deutliches Bild in der Entfernung z entstehen sollte, unter der Bedingung jedoch, dass der in den Ausdrücken von y' und x' enthaltene gemeinschaftliche Factor $z = 1$ gesetzt wird.

Substituiren wir nun in (a) statt y' und x' ihre Werthe aus den allegirten Gleichungen und berücksichtigen die Bemerkungen, welche in Nro. 77 und 78 über die darin enthaltenen Grössen gemacht wurden, so wird r'^2 durch lauter Grössen ausgedrückt, welche entweder gegeben sind, oder von der willkührlichen Einrichtung des Instrumentes abhängen.

Bei einer vollkommenen Deutlichkeit würde r' für sämmtliche, von demselben leuchtenden Punkte ausgehende Strahlen verschwinden; um daher bei einem Instrumente die grösstmögliche Deutlichkeit zu erhalten, ist es erforderlich, diejenigen Grössen, welche bei der Construction desselben der Willkühr überlassen bleiben, so zu bestimmen, dass r' für jene Strahlen zusammengenommen so klein als möglich wird.

Um diese Bedingung zu erfüllen, kann man mit Vortheil die Methode der kleinsten Quadrate anwenden. Betrachtet man nämlich r' als einen Fehler des allgemeinen farbigen Strahles, welcher Undeutlichkeit hervorbringt, so wird nach jener Methode diejenige Ein-

richtung des Instrumentes in Bezug auf die Deutlichkeit den Vorzug verdienen, bei welcher die Summe der r'^2 für sämmtliche Strahlen so klein als möglich wird. Da aber unzählig viele Strahlen vorhanden sind, so unterscheidet sich dieser Fall von der gewöhnlichen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate dadurch, dass die Summe der Quadrate der Fehler, welche bei den gewöhnlichen Anwendungen eine endliche Summe ist, hier wegen der unzähligen Menge der r'^2 durch die Integralrechnung gesucht werden muss.

Betrachten wir zuerst nur *einen* einfallenden Strahl, welchen ich von weisser Farbe annehme. Jeder weisse Lichtstrahl besteht aber aus einer unzähligen Menge verschieden gefärbter Strahlen. Um diese von einander zu unterscheiden, wurde bei den vorhergehenden Untersuchungen einer von ihnen nach Willkühr gewählt und der mittlere Strahl genannt. Das ihm zugehörige Brechungsverhältniss in Bezug auf einen bestimmten Körper, welcher zur Vergleichung der übrigen Körper diente, wurde durch ν, das Brechungsverhältniss eines anderen beliebigen farbigen Strahles durch $(\nu + \delta\nu)$ bezeichnet, wonach also ν für sämmtliche Strahlen unveränderlich ist, $\delta\nu$ dagegen eine veränderliche Grösse bezeichnet, welche die Lage des Strahles im prismatischen Farbenbilde und hierdurch zugleich seine Farbentinte angiebt.

Jedem farbigen Strahle gehört ein r'^2 zu, welches durch die allegirten Formeln erhalten wird, wenn man darin $\delta\nu$ denjenigen Werth beilegt, den die Farbentinte des Strahles erfordert. Da nun $\delta\nu$ als eine stetige veränderliche Grösse zu betrachten ist, so erhält man die Summe der r'^2 für sämmtliche farbige Strahlen, welche einem einfallenden Strahle zugehören, wenn man r'^2 mit $d\delta\nu$ multiplicirt und in Bezug auf $\delta\nu$ integrirt.

Hierbei ist jedoch eine Bemerkung nothwendig. Die Erfahrung zeigt nämlich, dass die verschiedenen farbigen Strahlen, aus welchen ein weisser Strahl besteht, eine ungleiche Wirkung in unserem Auge hervorbringen, z. B. die gelben eine stärkere als die violetten, daher es zweckmässig erscheint, die stärker wirkenden Strahlen mehr zu berücksichtigen, als die schwächeren. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als dass man das, einem jeden farbigen Strahle zugehörige r'^2 vor der Integration mit einem Factor multiplicirt, welcher eine Function von der Lage des Strahles im Farbenbilde, d. h. von $\delta\nu$, ist und hier die Stelle der bei der Methode der kleinsten Quadrate gebräuchlichen Gewichte vertritt. Nennt man ihn λ und bezeichnet mit r''^2, die Summe der r'^2, welche einem einfallenden Strahle zugehören, so ist

$$r''^2 = \int \lambda r'^2 d\delta\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Die Grenzen dieses Integrals sind diejenigen Werthe von $\delta\nu$, welche den äussersten rothen und violetten Strahlen des Farbenbildes entsprechen.

Die in (d) von Nro. 68 gefundenen Ausdrücke von y' und x' zeigen, dass r'^2, wenn es in Bezug auf die Potenzen von $\delta\nu$ entwickelt wird, nur Glieder von der Form $A\,\delta\nu^m$ enthält, in welchen m nach und nach alle ganze bejahte Zahlen von 0 bis + 4 einschliesslich bezeichnet. Hiernach besteht das obige Integral nur aus Gliedern von der Form

$$A\int\lambda\,\delta\nu^m\,d\delta\nu$$

deren Integration aber erst alsdann ausgeführt werden kann, wenn λ in Function von $\delta\nu$ gegeben ist.

Ohne über die Natur dieser Function zu entscheiden, welche bloss durch Beobachtungen bestimmt werden kann, bezeichne ich die von $\delta\nu$ abhängenden Integrale durch δ_0, $\delta_1 \ldots \delta_4$, so dass allgemein

$$\delta_m = \int\lambda\,\delta\nu^m\,d\delta\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

innerhalb der angegebenen Grenzen genommen bedeutet. Hierdurch verwandelt sich jedes in r'^2 enthaltene Glied von der Form

$$A\,\delta\nu^m$$

nach der Integration in

$$A\int\lambda\,\delta\nu^m\,d\delta\nu = A\,\delta_m$$

Um daher die Integration in Bezug auf $\delta\nu$ auszuführen, und hierdurch von r'^2 auf r''^2 überzugehen, ist weiter nichts erforderlich, als r'^2 nach Potenzen von $\delta\nu$ zu entwickeln und dann die verschiedenen Potenzen $\delta\nu^m$ mit den correspondirenden Grössen δ_m zu verwechseln.

Bei dieser Rechnung ist jedoch noch eine Abkürzung möglich. Wir hatten nämlich in Nro. 15 nur vorausgesetzt, dass der mittlere Strahl eine unveränderliche Lage im prismatischen Farbenbilde hat, und hatten uns vorbehalten, diese Lage demnächst auf eine schickliche Weise zu bestimmen. Da nun die Sache selbst uns keine Gründe zu einer solchen Bestimmung an die Hand giebt, so ist es erlaubt, diejenige zu wählen, welche die Rechnung am meisten vereinfacht. Diese besteht darin, dass man als mittleren Strahl denjenigen annimmt, dessen Brechungsverhältniss das arithmetische Mittel aus den Brechungsverhältnissen sämmtlicher farbigen Strahlen mit Rücksicht auf ihre verschiedene Wirksamkeit ist. Untersuchen wir daher, welche Folgen diese Voraussetzung in den Resultaten der Rechnung hat.

Das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles ist =

$$= \nu + \delta\nu$$

woraus die Brechungsverhältnisse der sämmtlichen farbigen Strahlen erhalten werden, wenn man $\delta\nu$ nach und nach alle Werthe innerhalb des prismatischen Farbenbildes giebt. Da aber $\delta\nu$ als eine stetige veränderliche Grösse betrachtet werden muss, so ist die Summe der Brechungsverhältnisse sämmtlicher farbigen Strahlen mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit =

$$= \int\lambda\,(\nu + \delta\nu)\,d\delta\nu$$

Dagegen ist die Anzahl der farbigen Strahlen, ebenfalls mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit =

$$= \int \lambda \, d\delta v$$

Dividiren wir nun diese beiden Ausdrücke in einander, so erhalten wir die Summe sämmtlicher Brechungsverhältnisse dividirt durch ihre Anzahl, d. h. das arithmetische Mittel aus den Brechungsverhältnissen sämmtlicher farbigen Strahlen mit Rücksicht auf ihre Wirksamkeit; und da dasselbe dem Brechungsverhältnisse des mittleren Strahles, oder v, gleich seyn soll, so giebt diess die Gleichung

$$v = \frac{\int \lambda \, (v + \delta v) \, d\delta v}{\int \lambda \, d\delta v}$$

v ist eine von δv völlig unabhängige Constante; der vorhergehende Ausdruck wird daher nach gehöriger Entwickelung

$$v = \frac{v \int \lambda \, d\delta v}{\int \lambda \, d\delta v} + \frac{\int \lambda \, \delta v \, d\delta v}{\int \lambda \, d\delta v} = v + \frac{\delta_1}{\delta_0}$$

Hieraus folgt, dass bei der angegebenen Bestimmung über die Lage des mittleren Strahles

$$\delta_1 = \int \lambda \, \delta v \, d\delta v = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

ist, wodurch alle Glieder wegfallen, welche nach der Entwickelung von r'^2 die erste Potenz von δv enthalten. Diese Glieder können daher bei jener Entwickelung sogleich weggelassen werden.

Bei der vorhergehenden Untersuchung ist der einfallende Strahl von weisser Farbe angenommen worden. Diese Voraussetzung findet jedoch in der Wirklichkeit nicht statt, da die Gegenstände, welche man durch optische Instrumente betrachtet, sehr verschieden gefärbt sind. Sollte nun die Rechnung für eine andere Farbe als die weisse geführt werden, so würde diess keine andere Folge haben, als dass die Grösse λ andere Werthe erhielte, welche nach der Verschiedenheit der Farbe des Gegenstandes bald nach dem rothen, bald nach dem violetten Ende des Farbenbildes grösser würden. Da aber die optischen Werkzeuge bei unveränderter Einrichtung für alle Farben der Gegenstände gebraucht werden sollen, so bleibt nichts Anderes übrig, als bei der Berechnung derselben eine bestimmte Farbe und zwar am besten die weisse vorauszusetzen, eines Theils, weil diese in Bezug auf die der Grösse λ zu gebenden Werthe ungefähr in der Mitte liegt, andern Theils, weil bei ihr die Farbenzerstreuung am bemerkbarsten ist und es daher räthlich erscheint, dieselbe gerade hier so viel als möglich zu vermindern.

Nachdem durch die vorhergehende Rechnung r''^2 oder die Summe der Quadrate der Fehler für *einen* einfallenden Strahl gefunden worden ist, so können wir sie für *sämmtliche* Strahlen berechnen, welche von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehen.

Zuerst muss bemerkt werden, dass r'^2 von der Ordnung des Quadrates der nicht aufgehobenen Abweichungen ist. Da nun die

höheren Glieder nicht beibehalten werden, so reicht es hin, die Factoren, womit $\overset{\prime\prime}{r}^2$ bei der ferneren Rechnung multiplicirt wird, ohne Rücksicht auf die Abweichungen zu berechnen und darin nur die niedrigsten Potenzen von R und φ beizubehalten.

Nehmen wir die Gestalt der Hauptblendung als kreisförmig an, so wie es bei den optischen Instrumenten gewöhnlich der Fall ist, und nennen

ϱ_j ihren Halbmesser,

so folgt aus (c) von Nro. 57, dass derjenige Theil der ersten brechenden Fläche, in dem alle Lichtstrahlen einfallen, welche von dem, den Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 entsprechenden leuchtenden Punkte ausgehen, ohne Rücksicht auf die Abweichungen ein Kreis ist, dessen Halbmesser R durch den Ausdruck bestimmt wird:

$$R = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \varrho_j = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{j+1} \varrho_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Jedem Lichtstrahle, welcher von demselben leuchtenden Punkte ausgeht und innerhalb jenes Kreises auf die erste brechende Fläche fällt, gehört ein $\overset{\prime\prime}{r}^2$ zu, dessen Werth man aus dem allgemeinen Ausdrucke von $\overset{\prime\prime}{r}^2$ erhält, wenn man darin den Coordinaten R und Ψ diejenigen Werthe giebt, welche dem Einfallspunkte des Strahles entsprechen.

Um nun die Summe der $\overset{\prime\prime}{r}^2$ für alle diese Strahlen zu erhalten, müssen wir bedenken, dass vermöge (o) von Nro. 65 die Menge von Lichtstrahlen, welche auf ein Element des Kreises fallen, der Fläche des Elementes multiplicirt mit einer Constante gleich ist, wenn man die Potenzen von R und φ nicht berücksichtigt.

Bezeichnen wir daher die dortige Constante $\frac{\mathfrak{A}}{c_1^2}$ hier mit $2\mathfrak{A}$ und bemerken, dass die Fläche jenes Elementes $= R\,dR\,d\Psi$ ist, so erhalten wir die Menge der darauf fallenden Strahlen =

$$2\mathfrak{A}R\,dR\,d\Psi = \mathfrak{A}\,d.R^2 d\Psi$$

Da nun jedem dieser Strahlen ein $\overset{\prime\prime}{r}^2$ zugehört, so ist die dem Flächenelemente des Kreises entsprechende Summe der $\overset{\prime\prime}{r}^2$ =

$$\mathfrak{A}\,\overset{\prime\prime}{r}^2 d.R^2 d\Psi$$

Integrirt man diesen Ausdruck zuerst von $\Psi = 0$ bis zu $\Psi = 2\pi$, sodann von $R = 0$ bis zu dem durch den Ausdruck (e) gegebenen äussersten Werthe von R, so erhält man die Summe der $\overset{\prime\prime}{r}^2$ für die ganze Fläche des Kreises, oder mit anderen Worten, die Summe der Quadrate der Fehler für sämmtliche Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punkte des Gegenstandes ausgehen. Wird diese Summe mit $\overset{\prime\prime\prime}{r}^2$ bezeichnet, so ist

$$\overset{\prime\prime\prime}{r}^2 = \mathfrak{A}\int_0^R d.R^2 \int_0^{2\pi} \overset{\prime\prime}{r}^2 d\Psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

Zur Erleichterung dieser Integrationen können die folgenden Bemerkungen gemacht werden.

Der Ausdruck von $\overset{\prime}{r}{}^2$ und folglich auch der von $\overset{\prime\prime}{r}{}^2$ besteht aus Gliedern, welche mit verschiedenen Potenzen von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ multiplicirt sind. Sie geben nach der Integration theils Glieder, welche den Bogen Ψ enthalten, theils solche, welche von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ abhängen.

Da nun die Integration in Bezug auf Ψ, von $\Psi = 0$ bis zu $\Psi = 2\pi$ vorgenommen werden muss, so fallen die letzteren Glieder weg, weil sie an den beiden Grenzen der Integrale einerlei Werth haben, und es bleiben bloss die ersteren Glieder, in denen sich Ψ in π verwandelt. Untersuchen wir daher, in welchen Fällen das Eine oder das Andere statt findet.

Zuerst müssen wir bemerken, dass von $\sin\Psi$ keine andere Potenzen vorkommen, als die zweite, von $\cos\Psi$ dagegen verschiedene Potenzen, theils mit ungeraden, theils mit geraden Exponenten.

Hiernach sind alle Glieder von $\overset{\prime}{r}{}^2$, welche ungerade Potenzen von $\cos\Psi$ enthalten, unter der Form begriffen

$$A \sin^{2k}\Psi \cos^{2m+1}\Psi$$

wobei k entweder $= 0$, oder $= 1$ seyn kann.

Es ist aber, wenn man statt $\cos^{2m+1}\Psi$ seinen Werth $(1 - \sin^2\Psi)^m \cos\Psi$ substituirt, $(1 - \sin^2\Psi)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt und den n^{ten} Binomialcoefficienten der m^{ten} Potenz mit B_n^m bezeichnet,

$$\sin^{2k}\Psi \cos^{2m+1}\Psi = [\sin^{2k}\Psi + \textstyle\sum_{n\,1}^{m} (\pm B_n^m \sin^{2k+2n}\Psi] \cos\Psi$$

folglich

$$\int \sin^{2k}\Psi \cos^{2m+1}\Psi \, d\Psi = \frac{\sin^{2k+1}\Psi}{2k+1} + \sum_{n\,1}^{m} \left(\frac{\pm B_n^m \sin^{2k+2n+1}\Psi}{2k+2n+1} \right) \quad \text{(g)}$$

wobei das obere Zeichen für gerade, das untere für ungerade Werthe von n gilt.

Dieses Integral verschwindet, wenn es innerhalb der angegebenen Grenzen genommen wird; wir können daher den Schluss machen, dass alle Glieder von $\overset{\prime}{r}{}^2$ oder $\overset{\prime\prime}{r}{}^2$, welche ungerade Potenzen von $\cos\Psi$ enthalten, nach der Integration wegfallen, mithin bei der Entwickelung von $\overset{\prime}{r}{}^2$ sogleich weggelassen werden können. Die übrigen Glieder von $\overset{\prime}{r}{}^2$, welche mit geraden Potenzen von $\cos\Psi$ multiplicirt sind, haben die Formen

$$A \cos^{2m}\Psi$$

und

$$A \sin^2\Psi \cos^{2m}\Psi$$

Durch Anwendung der bekannten Reductionsformeln erhält man aber

$$\left.\begin{aligned}
&\int cos^{2m}\Psi\, d\Psi = \frac{sin\Psi\, cos^{2m-1}\Psi}{2m} \\
&\quad + \sum_{1}^{m-1}{}_{n} \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(2m-2n+1)\, sin\Psi\, cos^{2m-2n-1}\Psi}{2m(2m-2)\ldots(2m-2n+2)(2m-2n)} \\
&\quad + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{2m(2m-2)\ldots 2}\Psi \\
&\int sin^2\Psi\, cos^{2m}\Psi\, d\Psi = -\frac{sin\Psi\, cos^{2m+1}\Psi}{2m+2} + \frac{sin\Psi\, cos^{2m-1}\Psi}{(2m+2)\,2m} \\
&\quad + \sum_{1}^{m-1}{}_{n} \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(2m-2n+1)\, sin\Psi\, cos^{2m-2n-1}\Psi}{(2m+2)\,2m\ldots(2m-2n+4)(2m-2n+2)(2m-2n)} \\
&\quad + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1.1}{(2m+2)\,2m\ldots 4.2}\Psi
\end{aligned}\right\}(h)$$

Innerhalb der angegebenen Grenzen fallen alle von $sin\Psi$ abhängige Glieder weg und es wird

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} cos^{2m}\Psi\, d\Psi = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{2m(2m-2)\ldots 2}\,.\,2\pi \\
&\int_0^{2\pi} sin^2\Psi\, cos^{2m}\Psi\, d\Psi = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1.1}{(2m+2)\,2m\ldots 4.2}\,.\,2\pi
\end{aligned}\right\}(i)$$

Diese Formeln geben die folgenden Integrale, welche in $\overset{\prime\prime\prime}{r}{}^2$ vorkommen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\Psi = 2\pi \\
&\int_0^{2\pi} cos^2\Psi\, d\Psi = \frac{1}{2}\,.\,2\pi \\
&\int_0^{2\pi} sin^2\Psi\, d\Psi = \frac{1}{2}\,.\,2\pi \\
&\int_0^{2\pi} cos^4\Psi\, d\Psi = \frac{3}{8}\,.\,2\pi \\
&\int_0^{2\pi} sin^2\Psi\, cos^2\Psi\, d\Psi = \frac{1}{8}\,.\,2\pi
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (k)$$

Die Integration in Bezug auf R ist keinen Schwierigkeiten unterworfen. Nach der Entwickelung enthält nämlich $\overset{\prime}{r}{}^2$ nur Glieder, die mit geraden Potenzen von R multiplicirt sind; jedes Glied von der Form

$$AR^{2m}$$

giebt daher nach der Integration eines von der Form

$$A\int_0^R R^{2m}\, d.R^2 = \frac{A\, R^{2(m+1)}}{(m+1)}$$

worin nunmehr R den durch den Ausdruck (e) gegebenen äussersten Werth von R bezeichnet.

Da es bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf beständige Factoren nicht ankommt, so kann man statt der Grösse $\overset{\prime\prime\prime}{r}{}^2$ eine andere einführen, welche von dem unbekannten Factor $\mathfrak{A}$ unabhängig ist. Dividirt man nämlich $\overset{\prime\prime\prime}{r}{}^2$ durch die Anzahl

sämmtlicher Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punkte des Gegenstandes in das Instrument fallen, multiplicirt mit ihrer jedesmaligen Wirksamkeit, so erhält man das arithmetische Mittel aus allen r'^2, welche jenem Punkte zugehören, mit Rücksicht auf die verschiedene Wirksamkeit der Strahlen. Dieses arithmetische Mittel soll zur Abkürzung die *absolute Undeutlichkeit des durch die Coordinaten* $\frac{1}{c_1}$ *und* φ_1 *bestimmten Punktes* genannt und mit Θ bezeichnet werden.

Die angegebene Anzahl der Strahlen ist aber =

$$\mathfrak{A}\int_0^R d\,.\,R^2\int_0^{2\pi} d\Psi\int\lambda d\,\delta\nu = \mathfrak{A}R^2\,.\,2\pi\,\delta_0 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (l)$$

folglich

$$\Theta = \frac{r'''^2}{\mathfrak{A}R^2\,2\pi\,\delta_0} = \frac{\int_0^R d\,.\,R^2\int_0^{2\pi} d\Psi\int\lambda r'^2\,d\delta\nu}{R^2\,.\,2\pi\,\delta_0}\;. \quad (m)$$

Da die Grössen $\delta\nu$, Ψ und R^2 völlig unabhängig von einander sind, so können wir die Integrale, welche sich auf $\delta\nu$ beziehen, sogleich mit δ_0 dividiren, wodurch sich die Grössen δ_m in $\frac{\delta_m}{\delta_0}$ verwandeln.

Ebenso können wir die Integrale (k), welche Ψ betreffen, durch 2π dividiren, wodurch dieser gemeinschaftliche Factor in ihnen wegfällt.

Endlich können die Integrale in Bezug auf R mit R^2 dividirt werden, wodurch sich $R^{2(m+1)}$ in R^{2m} verwandelt, so dass die in r'^2 enthaltenen Potenzen R^{2m} dieselben Exponenten behalten und nur durch $(m+1)$ dividirt werden. Aus allem diesem können wir daher die folgenden Regeln zur Berechnung von Θ abstrahiren:

Zuerst muss r'^2 durch Substitution der in (d) von Nro. 68 gegebenen Werthe von y' und x' in dem Ausdruck (a) berechnet und der dadurch erhaltene Werth von r'^2 so entwickelt werden, dass er nach Potenzen von R, φ, $sin\Psi$, $cos\Psi$ und $\delta\nu$ geordnet ist, wobei jedoch alle Glieder wegbleiben, welche entweder die erste Potenz von $\delta\nu$ oder ungerade Potenzen von $cos\Psi$ enthalten.

Um sodann von dem auf diese Art erhaltenen Ausdrucke von r'^2 zu Θ überzugehen, ist weiter nichts erforderlich, als in ersterem

$$\left.\begin{array}{r} R^{2m} \text{ mit } \dfrac{R^{2m}}{m+1} \\ \delta\nu^m \text{ mit } \dfrac{\delta_m}{\delta_0} \\ cos^2\Psi \text{ mit } \dfrac{1}{2} \\ sin^2\Psi \text{ mit } \dfrac{1}{2} \\ cos^4\Psi \text{ mit } \dfrac{3}{8} \\ sin^2\Psi\, cos^2\Psi \text{ mit } \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (n)$$

zu verwechseln und unter R nunmehr den durch den Ausdruck (e) gegebenen äussersten Werth dieser Grösse zu verstehen.

80) Entwickeln wir jetzt r'^2 nach diesen Regeln. Hierzu müssen die in (d) von Nro. 68 gefundenen Werthe von y' und x' zum Quadrat erhoben und dann addirt werden, nachdem darin zuvor $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ mit $\mathfrak{z}$ verwechselt worden ist. Sie enthalten den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{\nu}\right)$, welcher in der Summe ihrer Quadrate den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2$ giebt.

Aus den inclavirten Theilen jener Grössen entstehen mehrere Glieder, welche mit Combinationen der Coefficienten L, M u. s. w. multiplicirt sind. Zur Abkürzung bezeichne ich diese Glieder mit den in Parenthesen eingeschlossenen Verbindungen L^2, LM u. s. w. welche darin vorkommen. So giebt z. B. der inclavirte Theil von y', wenn er zum Quadrate erhoben wird, das erste Glied

$$L^2 R^6 \cos^2 \Psi$$

und der inclavirte Theil von x' das erste Glied

$$L^2 R^6 \sin^2 \Psi$$

Die Summe von beiden ist das correspondirende Glied von r'^2, welches mit (L^2) bezeichnet wird; es ist folglich

$$(L^2) = L^2 R^6$$

Berechnen wir auf dieselbe Weise alle übrige Glieder und lassen diejenigen sogleich weg, welche entweder die erste Potenz von $\delta\nu$ oder ungerade Potenzen von $\cos\Psi$ enthalten, so finden wir die folgenden Werthe:

$$(L^2) = L^2 R^6$$
$$(LM) = 0$$
$$(LO) = 2 L O R^4 \varphi^2 \cos^2\Psi$$
$$(LN) = 2 L N R^4 \varphi^2 \sin^2\Psi$$
$$(LQ) = 2 L Q \left\{ \begin{array}{l} R^8 + 2 R^6 K^2 \varphi^2 + R^4 K^4 \varphi^4 \\ + (8 R^6 K^2 \varphi^2 + 4 R^4 K^4 \varphi^4) \cos^2\Psi \end{array} \right.$$
$$(LS) = 0$$
$$(Ls) = 2 L s R^4 \delta\nu^2$$
$$(LU) = 0$$
$$(LT) = 0$$
$$(Lt) = 0$$
$$(LW) = 0$$
$$(LJ) = 2 L J R^4 \mathfrak{z}$$
$$(M^2) = M^2 R^4 \varphi^2 \left(\frac{1}{4} + 2\cos^2\Psi\right)$$
$$(MO) = 0$$
$$(MN) = 0$$

$$(MQ) = 2MQ\left\{\begin{array}{l}\frac{R^6 K \varphi^2}{2} + R^4 K^3 \varphi^4 \\ + (7R^6 K \varphi^2 + 10 R^4 K^3 \varphi^4) \cos^2\Psi \\ + 4R^4 K^3 \varphi^4 \cos^4\Psi\end{array}\right.$$

$$(MS) = 0$$
$$(Ms) = 0$$
$$(MU) = 0$$
$$(MT) = 0$$
$$(Mt) = 2Mt R^2 \varphi^2 \delta\nu^2 \left(\frac{1}{2} + \cos^2\Psi\right)$$
$$(MW) = 0$$
$$(MJ) = 0$$
$$(O^2) = O^2 R^2 \varphi^4 \cos^2\Psi$$

$$(OQ) = 2OQ\left\{\begin{array}{l}(R^6 \varphi^2 + 6R^4 K^2 \varphi^4 + 5R^2 K^4 \varphi^6) \cos^2\Psi \\ + 4R^4 K^2 \varphi^4 \cos^4\Psi\end{array}\right.$$

$$(OS) = 0$$
$$(Os) = 2Os R^2 \varphi^2 \delta\nu^2 \cos^2\Psi$$
$$(OU) = 0$$
$$(OT) = 0$$
$$(Ot) = 0$$
$$(OW) = 0$$
$$(OJ) = 2OJ R^2 \varphi^2 \mathfrak{z} \cos^2\Psi$$
$$(N^2) = N^2 R^2 \varphi^4 \sin^2\Psi$$

$$(NQ) = 2NQ\left\{\begin{array}{l}(R^6 \varphi^2 + 2R^4 K^2 \varphi^4 + R^2 K^4 \varphi^6) \sin^2\Psi \\ + 4R^4 K^2 \varphi^4 \sin^2\Psi \cos^2\Psi\end{array}\right.$$

$$(NS) = 0$$
$$(Ns) = 2Ns R^2 \varphi^2 \delta\nu^2 \sin^2\Psi$$
$$(NU) = 0$$
$$(NJ) = 2NJ R^2 \varphi^2 \mathfrak{z} \sin^2\Psi$$

$$(Q^2) = Q^2\left\{\begin{array}{l}R^{10} + 5R^8 K^2 \varphi^2 + 10R^6 K^4 \varphi^4 \\ + 8R^4 K^6 \varphi^6 + R^2 K^8 \varphi^8 \\ + \cos^2\Psi \left\{\begin{array}{l}40R^8 K^2 \varphi^2 + 120R^6 K^4 \varphi^4 \\ + 112R^4 K^6 \varphi^6 + 24R^2 K^8 \varphi^8\end{array}\right\} \\ + \cos^4\Psi\,[80R^6 K^4 \varphi^4 + 80R^4 K^6 \varphi^6]\end{array}\right.$$

$$(QS) = 0$$

$$(Qs) = 2Qs\,\delta\nu^2\left\{\begin{array}{l}R^6 + 2R^4 K^2 \varphi^2 + R^2 K^4 \varphi^4 \\ + (8R^4 K^2 \varphi^2 + 4R^2 K^4 \varphi^4) \cos^2\Psi\end{array}\right.$$

$$(QU) = 0$$
$$(QT) = 0$$

$$(Qt) = 2Qt\,\delta\nu^2\left\{\begin{array}{l}R^4 K \varphi^2 + 2R^2 K^3 \varphi^4 \\ + (4R^4 K \varphi^2 + 8R^2 K^3 \varphi^4) \cos^2\Psi\end{array}\right.$$

$$(QW) = 0$$

$$(QJ) = 2QJ\mathfrak{z}\left\{\begin{array}{l}R^6 + 2R^4 K^2 \varphi^2 + R^2 K^4 \varphi^4 \\ + (8R^4 K^2 \varphi^2 + 4R^2 K^4 \varphi^4) \cos^2\Psi\end{array}\right.$$

$$(S^2) = S^2 R^2 \delta\nu^2$$
$$(Ss) = 2Ss R^2 \delta\nu^3$$
$$(SU) = 2SU\,\delta\nu^2\,[R^4 + R^2 K^2 \varphi^2 + 2R^2 K^2 \varphi^2 \cos^2\Psi]$$
$$(ST) = 0$$

$$
(\beta) \quad \left\{
\begin{aligned}
(St) &= 0\\
(SW) &= 0\\
(SJ) &= 0\\
(s^2) &= s^2 R^2 \delta \nu^4\\
(sU) &= 2sU\delta\nu^3 \left[R^4 + R^2 K^2 \varphi^2 + 2R^2 K^2 \varphi^2 \cos^2\Psi\right]\\
(sT) &= 0\\
(st) &= 0\\
(sW) &= 0\\
(sJ) &= 2sJR^2 \mathfrak{z}\, \delta\nu^2\\
(U^2) &= U^2 \delta\nu^2 \left\{ \begin{aligned} &R^6 + 3R^4 K^2 \varphi^2 + R^2 K^4 \varphi^4\\ &+ (12R^4 K^2 \varphi^2 + 8R^2 K^4 \varphi^4) \cos^2\Psi \end{aligned} \right.\\
(UT) &= 2UT\delta\nu^2 \left[R^2 K \varphi^2 + 2R^2 K \varphi^2 \cos^2\Psi\right]\\
(Ut) &= 2Ut\delta\nu^3 \left[R^2 K \varphi^2 + 2R^2 K \varphi^2 \cos^2\Psi\right]\\
(UW) &= 2UW\delta\nu^2 \left[R^2 K \varphi^4 + 2R^2 K \varphi^4 \cos^2\Psi\right]\\
(UJ) &= 0\\
(T^2) &= T^2 \varphi^2 \delta\nu^2\\
(Tt) &= 2Tt\varphi^2 \delta\nu^3\\
(TW) &= 2TW\varphi^4 \delta\nu^2\\
(TJ) &= 0\\
(t^2) &= t^2 \varphi^2 \delta\nu^4\\
(tW) &= 2tW\varphi^4 \delta\nu^3\\
(tJ) &= 0\\
(W^2) &= W^2 \varphi^6 \delta\nu^2\\
(WJ) &= 0\\
(J^2) &= J^2 R^2 \mathfrak{z}^2
\end{aligned}
\right.
$$

Durch die in (n) von Nro. 79 angegebenen Verwechselungen erhält man aus diesen Gliedern die correspondirenden von Θ, welche ich mit eckigen Parenthesen bezeichne, nämlich

$$
\left.
\begin{aligned}
[L^2] &= \frac{L^2 R^6}{4}\\
[LO] &= 2LO.\frac{R^4 \varphi^2}{6}\\
[LN] &= 2LN.\frac{R^4 \varphi^2}{6}\\
[LQ] &= 2LQ\left[\frac{R^8}{5} + \frac{3}{2} R^6 K^2 \varphi^2 + R^4 K^4 \varphi^4\right]\\
[Ls] &= 2Ls\,\frac{R^4 \delta_2}{3\delta_0}\\
[LJ] &= 2LJ\,\frac{R^4 \mathfrak{z}}{3}\\
[M^2] &= \frac{5}{12} M^2 R^4 \varphi^2\\
[MQ] &= 2MQ\left[R^6 K \varphi^2 + \frac{5}{2} R^4 K^3 \varphi^4\right]\\
[Mt] &= 2Mt\,\frac{R^2 \varphi^2 \delta_2}{2\delta_0}
\end{aligned}
\right\} . \quad (a)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
[O^2] &= \frac{O^2 R^2 \varphi^4}{4} \\
[O\,Q] &= 2\,O\,Q \left[\frac{R^6 \varphi^2}{8} + \frac{3}{2} R^4 K^2 \varphi^4 + \frac{5}{4} R^2 K^4 \varphi^6\right] \\
[O\,s] &= 2\,O\,s\, \frac{R^2 \varphi^2 \delta_2}{4\,\delta_0} \\
[O\,J] &= 2\,O\,J\, \frac{R^2 \varphi^2 \mathfrak{z}}{4} \\
[N^2] &= \frac{N^2 R^2 \varphi^4}{4} \\
[N\,Q] &= 2\,N\,Q \left[\frac{R^6 \varphi^2}{8} + \frac{R^4 K^2 \varphi^4}{2} + \frac{R^2 K^4 \varphi^6}{4}\right] \\
[N\,s] &= 2\,N\,s\, \frac{R^2 \varphi^2 \delta_2}{4\,\delta_0} \\
[N\,J] &= 2\,N\,J\, \frac{R^2 \varphi^2 \mathfrak{z}}{4} \\
[Q^2] &= Q^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{R^{10}}{6} + 5 R^8 K^2 \varphi^2 + 25 R^6 K^4 \varphi^4 \\
&+ \frac{94}{3} R^4 K^6 \varphi^6 + \frac{13}{2} R^2 K^8 \varphi^8
\end{aligned}
\right. \\
[Q\,s] &= \frac{2\,Q\,s\,\delta_2}{\delta_0} \left[\frac{R^6}{4} + 2 R^4 K^2 \varphi^2 + \frac{3}{2} K^4 \varphi^4\right] \\
[Q\,t] &= \frac{2\,Q\,t\,\delta_2}{\delta_0} \left[R^4 K \varphi^2 + 3 R^2 K^3 \varphi^4\right] \\
[Q\,J] &= 2\,Q\,J\,\mathfrak{z} \left[\frac{R^6}{4} + 2 R^4 K^2 \varphi^2 + \frac{3}{2} K^4 \varphi^4\right] \\
[S^2] &= \frac{S^2 R^2 \delta_2}{2\,\delta_0} \\
[S\,s] &= \frac{2\,S\,s\,R^2 \delta_3}{2\,\delta_0} \\
[S\,U] &= \frac{2\,S\,U\,\delta_2}{\delta_0} \left[\frac{R^4}{3} + R^2 K^2 \varphi^2\right] \\
[s^2] &= \frac{s^2 R^2 \delta_4}{2\,\delta_0} \\
[s\,U] &= \frac{2\,s\,U\,\delta_3}{\delta_0} \left[\frac{R^4}{3} + R^2 K^2 \varphi^2\right] \\
[s\,J] &= 2\,s\,J\, \frac{R^2 \mathfrak{z}\, \delta_2}{2\,\delta_0} \\
[U^2] &= \frac{U^2 \delta_2}{\delta_0} \left[\frac{R^6}{4} + 3 R^4 K^2 \varphi^2 + \frac{5}{2} R^2 K^4 \varphi^4\right] \\
[U\,T] &= 2\,U\,T\, \frac{R^2 K \varphi^2 \delta_2}{\delta_0} \\
[U\,t] &= 2\,U\,t\, \frac{R^2 K \varphi^2 \delta_3}{\delta_0} \\
[U\,W] &= 2\,U\,W\, \frac{R^2 K \varphi^4 \delta_2}{\delta_0}
\end{aligned}
\right\} \quad . \quad \text{(a)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
[T^2] &= \frac{T^2 \varphi^2 \delta_2}{\delta_0} \\
[Tt] &= 2Tt \frac{\varphi^2 \delta_3}{\delta_0} \\
[TW] &= 2TW \frac{\varphi^4 \delta_2}{\delta_0} \\
[t^2] &= \frac{t^2 \varphi^2 \delta_4}{\delta_0} \\
[tW] &= 2tW \frac{\varphi^4 \delta_3}{\delta_0} \\
[W^2] &= W_2 \frac{\varphi^6 \delta_2}{\delta_0} \\
[J^2] &= \frac{J^2 R^2 \mathfrak{z}^2}{2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (a)
$$

Nachdem auf diese Weise die Glieder gefunden worden sind, aus welchen der inclavirte Theil von Θ besteht, so reicht es zur Berechnung von Θ hin, ihre Summe mit $\left(\frac{V\mathfrak{z}}{v}\right)^2$ zu multipliciren. Diess giebt

$$
\Theta = \left(\frac{V\mathfrak{z}}{v}\right)^2 \Big\{ [L^2] + [LO] + [LN] \ldots . + [J]^2 \Big\} \quad . \quad (b)
$$

Die inclavirte Grösse kann jedoch dadurch bequemer ausgedrückt werden, dass man mehrere Glieder derselben vereinigt.

Zuerst nehme ich die Glieder

$$
\begin{aligned}
[J^2] + [LJ] + [OJ] &+ [NJ] + [QJ] + [sJ] \\
+ [L^2] + [LO] &+ [LN] + [LQ] + [Ls] \\
+ [O^2] &\qquad\quad + [OQ] + [Os] \\
&+ [N^2] + [NQ] + [Ns] \\
&\qquad\quad + [Q^2] + [Qs] \\
&\qquad\qquad\qquad + [s^2]
\end{aligned}
$$

und bezeichne ihre Summe mit $\mathfrak{S}$.

Substituirt man hierin die obigen Werthe, so wird

$$
\mathfrak{S} = \frac{R^2}{2} \left\{ \begin{aligned}
& J^2 \mathfrak{z}^2 \\
& + 2J\mathfrak{z} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ & + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) + \frac{\delta_2}{\delta_0} s \end{aligned}\right\} \\
& + \frac{L^2 R^6}{4} + \frac{2}{3} L \left(\frac{O+N}{2}\right) R^4 \varphi^2 \\
& + 2LQ\left(\frac{R^8}{5} + \frac{3}{2} R^6 K^2 \varphi^2 + R^4 K^4 \varphi^4\right) + \frac{2}{3} L R^4 \frac{\delta_2}{\delta_0} s \\
& + \left(\frac{O^2+N^2}{4}\right) R^2 \varphi^4 + 2OQ\left(\frac{R^6\varphi^2}{8} + \frac{3}{2} R^4 K^2 \varphi^4 + \frac{5}{4} R^2 K^4 \varphi^6\right) \\
& + 2NQ\left(\frac{R^6\varphi^2}{8} + \frac{R^4K^2\varphi^4}{2} + \frac{R^2K^4\varphi^6}{4}\right) + 2\left(\frac{O+N}{4}\right) R^2 \varphi^2 \frac{\delta_2}{\delta_0} s \\
& + Q^2\left(\frac{R^{10}}{6} + 5R^8K^2\varphi^2 + 25R^6K^4\varphi^4 + \frac{94}{3} R^4K^6\varphi^6 + \frac{13}{2} R^2K^8\varphi^8\right) \\
& + 2Q\frac{\delta_2}{\delta_0} s \left(\frac{R^6}{4} + 2R^4K^2\varphi^2 + \frac{3}{2} K^4\varphi^4\right) + \frac{R^2}{2} \frac{\delta_4}{\delta_0} s^2
\end{aligned}\right. \quad .
$$

Der von $\mathfrak{z}$ abhängige Theil kann in ein vollständiges Quadrat verwandelt werden, wenn man zu dem Ausdrucke von $\mathfrak{S}$ die Grösse

$$\frac{R^2}{2}\left\{\begin{aligned}&\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2\\ &+Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\varphi^2+3K^4\varphi^4\right)+\frac{\delta_2}{\delta_0}s\end{aligned}\right\}^2$$

addirt und ihre Entwickelung davon abzieht.

Hierdurch nimmt $\mathfrak{S}$ die Gestalt an:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}=\frac{R^2}{2}&\left\{\begin{aligned}&J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2\\ &+Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\varphi^2+3K^4\varphi^4\right)+\frac{\delta_2}{\delta_0}s\end{aligned}\right\}^2\\ &+\frac{L^2R^6}{36}+2LQ\left(\frac{R^8}{30}+\frac{R^6K^2\varphi^2}{6}\right)\\ &+\frac{(O-N)^2}{8}R^2\varphi^4+2(O-N)Q\left(\frac{R^4K^2\varphi^4}{2}+\frac{R^2K^4\varphi^6}{2}\right)\\ &+Q^2\left(\frac{R^{10}}{24}+3R^8K^2\varphi^2+\frac{31}{2}R^6K^4\varphi^4+\frac{58}{3}R^4K^6\varphi^6+2R^2K^8\varphi^8\right)\\ &+\frac{R^2}{2}\left[\frac{\delta_4}{\delta_0}-\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2\right]s^2\end{aligned}$$

Die mit L, O und N multiplicirten Glieder lassen sich ebenfalls in vollständige Quadrate verwandeln; es ist nämlich

$$\begin{aligned}&\frac{L^2R^6}{36}+2LQ\left(\frac{R^8}{30}+\frac{R^6K^2\varphi^2}{6}\right)=\\ &\quad=\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+6K^2\varphi^2\right)\right]^2\\ &\quad-Q^2\left(\frac{R^{10}}{25}+\frac{2}{5}R^8K^2\varphi^2+R^6K^4\varphi^4\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{(O-N)^2}{8}R^2\varphi^4+2(O-N)Q\left(\frac{R^4K^2\varphi^4}{2}+\frac{R^2K^4\varphi^6}{2}\right)=\\ &\quad=\frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2}+2QK^2(R^2+K^2\varphi^2)\right]^2\\ &\quad-Q^2(2R^6K^4\varphi^4+4R^4K^6\varphi^6+2R^2K^8\varphi^8)\end{aligned}$$

folglich, wenn man diese Werthe in dem Ausdrucke von $\mathfrak{S}$ substituirt,

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S}=\frac{R^2}{2}&\left\{\begin{aligned}&J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2\\ &+Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\varphi^2+3K^4\varphi^4\right)+\frac{\delta_2}{\delta_0}s\end{aligned}\right\}^2\\ &+\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+6K^2\varphi^2\right)\right]^2\\ &+\frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2}+2QK^2(R^2+K^2\varphi^2)\right]^2\\ &+Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{13}{5}R^8K^2\varphi^2+\frac{25}{2}R^6K^4\varphi^4+\frac{46}{3}R^4K^6\varphi^6\right]\\ &+\frac{R^2}{2}\left[\frac{\delta_4}{\delta_0}-\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2\right]s^2\end{aligned}\right\}\text{(c)}$$

Nehmen wir nun die folgenden Glieder, deren Summe ich $\mathfrak{D}$ nenne, nämlich

$$\mathfrak{D} = [T^2] + [Tt] + [TW] + [UT] + [t^2] + [tW] + [Ut] + [W^2] + [UW]$$

so wird durch Substitution der obigen Werthe

$$\mathfrak{D} = \frac{\phi^2 \delta_2}{\delta_0}\left[T^2 + 2T\left(\frac{\delta_3}{\delta_2}t + W\phi^2 + UKR^2\right)\right] + \frac{t^2\phi^2\delta_4}{\delta_0} + \frac{2tW\phi^4\delta_3}{\delta_0} + \frac{2UtR^2K\phi^2\delta_3}{\delta_0} + \frac{W^2\phi^6\delta_2}{\delta_0} + \frac{2UWR^2K\phi^4\delta_2}{\delta_0}$$

und auf ähnliche Weise behandelt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D} = \frac{\phi^2\delta_2}{\delta_0}\left[T + \frac{\delta_3}{\delta_2}t + W\phi^2 + UKR^2\right]^2 \\ + \phi^2 t^2\left[\frac{\delta_4}{\delta_0} - \frac{\delta_3^2}{\delta_0\delta_2}\right] - \frac{U^2R^4K^2\phi^2\delta_2}{\delta_0}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \text{(d)}$$

Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{E}$ die Summe der Glieder

$$[S^2] + [Ss] + [SU] + [sU] + [U^2]$$

so ist

$$\mathfrak{E} = \frac{R^2\delta_2}{2\delta_0}\left\{S^2 + 2S\left[\frac{s\delta_3}{\delta_2} + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\phi^2\right)\right]\right\} + \frac{2sU\delta_3}{\delta_0}\left[\frac{R^4}{3} + R^2K^2\phi^2\right] + \frac{U^2\delta_2}{\delta_0}\left[\frac{R^6}{4} + 3R^4K^2\phi^2 + \frac{5}{2}R^2K^4\phi^4\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E} = \frac{R^2\delta_2}{2\delta_0}\left[S + \frac{s\delta_3}{\delta_2} + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\phi^2\right)\right]^2 \\ - \frac{R^2s^2\delta_3^2}{2\delta_0\delta_2} \\ + \frac{U^2\delta_2}{\delta_0}\left[\frac{R^6}{36} + \frac{5}{3}R^4K^2\phi^2 + \frac{R^2K^4\phi^4}{2}\right]\end{aligned}\right\} \quad . \text{(e)}$$

Endlich bleiben noch die Glieder

$$[M^2] + [MQ] + [Mt] + [Qt]$$

übrig, deren Summe $\mathfrak{F}$ genannt werden soll.

Die obigen Werthe geben

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F} = \frac{5}{12}R^4\phi^2\left\{M^2 + 2M\left\{\begin{aligned}QK\left(\frac{12}{5}R^2 + 6K^2\phi^2\right) \\ + \frac{6t\delta_2}{5R^2\delta_0}\end{aligned}\right.\right. \\ + \frac{2Qt\delta_2}{\delta_0}\left[R^4K\phi^2 + 3R^2K^3\phi^4\right]\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \text{(f)}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F} = \frac{5}{12}R^4\phi^2\left[M+QK\left(\frac{12}{5}R^2+6K^2\phi^2\right)+\frac{6t\,\delta_2}{5R^2\,\delta_0}\right]^2 \\ +\frac{\phi^2}{10}\left[QKR^4-\frac{2t\,\delta_2}{\delta_0}\right]^2 \\ -Q^2\left[\frac{5}{2}R^8K^2\phi^2+12R^6K^4\phi^4+15R^4K^6\phi^6\right] \\ -t^2\phi^2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad .\ (g)$$

Die Summe der Grössen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ enthält sämmtliche Glieder $[L^2]$, $[LO]$..... $[J^2]$, folglich ist vermöge (b)

$$\Theta = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2[\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{F}]$$

Substituiren wir hierin die in (c). (d), (e) und (g) gefundenen Werthe, vereinigen die mit einerlei Coefficienten multiplicirten Glieder und gebrauchen statt der von der Farbenzerstreuung abhängigen Grössen, welche nach der Integration zu blossen Zahlencoefficienten geworden sind, die folgenden Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\delta_2}{\delta_0} \\ \eta &= \frac{\delta_3}{\delta_2} \\ \theta &= \frac{\delta_4}{\delta_0}-\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2-\frac{\delta_3^2}{\delta_0\,\delta_2}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (h)$$

so wird *die absolute Undeutlichkeit des durch die Coordinaten* $\frac{1}{c_1}$ *und* ϕ_1 *bestimmten Punktes:*

$$\Theta = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2\left\{\begin{aligned}&\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+6K^2\phi^2\right)\right]^2 \\ &+\frac{5}{12}R^4\phi^2\left[M+QK\left(\frac{12}{5}R^2+6K^2\phi^2\right)+\frac{6}{5}\,\varepsilon\,\frac{t}{R^2}\right]^2 \\ &+\frac{R^2\phi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2}+2QK^2(R^2+K^2\phi^2)\right]^2 \\ &+\frac{\varepsilon\,R^2}{2}\left[S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+2K^2\phi^2\right)\right]^2 \\ &+\varepsilon\,\phi^2\,[T+\eta t+W\phi^2+UKR^2]^2 \\ &+Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\phi^2}{10}+\frac{R^6K^4\phi^4}{2}+\frac{R^4K^6\phi^6}{3}\right] \\ &+\frac{\phi^2}{10}\,[QKR^4-2\varepsilon t]^2 \\ &+\frac{\theta\,s^2\,R^2}{2} \\ &+\varepsilon\,U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{2}{3}R^4K^2\phi^2+\frac{R^2K^4\phi^4}{2}\right] \\ &+\theta\,t^2\phi^2 \\ &+\frac{R^2}{2}\left\{\begin{aligned}&J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\phi^2 \\ &+Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\phi^2+3K^4\phi^4\right)+\varepsilon s\end{aligned}\right\}^2\end{aligned}\right\}\quad .\ (i)$$

Wir haben am Ende von Nro. 68 gesehen, dass die bei der vorhergehenden Entwickelung von Θ gebrauchten Ausdrücke der Seitenabweichungen mit den daselbst angegebenen Modificationen auch anwendbar sind, wenn die Producte von $\left(\frac{\mathfrak{z}-g}{g\mathfrak{z}}\right)$ in Grössen der zweiten Ordnung beibehalten, dagegen $\Delta\frac{1}{c_1}$ und die Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt werden sollen.

Hiernach kommt unter dieser Voraussetzung zu dem inclavirten Factor von y' noch das Glied $\mathfrak{q}\,\mathrm{R}^2\varphi$. Verfährt man nun ebenso, wie es oben bei der Entwickelung von Θ geschehen ist, und verwechselt nach der am angeführten Orte gemachten Bemerkung die lateinischen Buchstaben mit deutschen, so kommen zu den oben berechneten Gliedern des inclavirten Factors von r'^2 noch die folgenden hinzu:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}\mathfrak{q}) &= 0 \\
(\mathfrak{M}\mathfrak{q}) &= 2\mathfrak{M}\mathfrak{q}\,R^4\left(\frac{1}{2}+\cos^2\Psi\right)\varphi^2 \\
(\mathfrak{D}\mathfrak{q}) &= 0 \\
(\mathfrak{S}\mathfrak{q}) &= 0 \\
(\mathfrak{T}\mathfrak{q}) &= 0 \\
(\mathfrak{q}^2) &= \mathfrak{q}^2 R^4\varphi^2 \\
(\mathfrak{q}J) &= 0
\end{aligned}
$$

Dadurch entstehen in dem inclavirten Factor von Θ nur die beiden Glieder

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{M}\mathfrak{q}] &= \frac{2}{3}\,\mathfrak{M}\mathfrak{q}\,R^4\varphi^2 \\
[\mathfrak{q}^2] &= \frac{\mathfrak{q}^2}{3}\,R^4\varphi^2
\end{aligned}
$$

Setzt man sie dem in (i) erhaltenen Ausdrucke von Θ zu und nimmt darin die angegebenen Veränderungen vor, so wird unter der gegenwärtigen Voraussetzung

$$
\Theta=\left(\frac{V\mathfrak{z}}{v}\right)^2\left\{
\begin{aligned}
&\frac{R^6}{36}\mathfrak{L}^2+\frac{R^4\varphi^2}{12}\left[\mathfrak{M}^2+4(\mathfrak{M}+\mathfrak{q})^2\right] \\
&+\frac{R^2\varphi^4}{2}\left(\frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{N}}{2}\right)^2 \\
&+\frac{{}_8R^2}{2}\mathfrak{S}^2+{}_8\varphi^2\,\mathfrak{T}^2 \\
&+\frac{R^2}{2}\left[J_{\mathfrak{z}}+\frac{2}{3}\mathfrak{L}R^2+\left(\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{N}}{2}\right)\varphi^2\right]^2
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots \quad (k)
$$

Absolute Undeutlichkeit in dem Bilde eines Punktes, wenn diejenige Linie als Axe des Strahlenbündels angenommen wird, welche die Undeutlichkeit so klein als möglich macht.

81) Bei der vorhergehenden Entwickelung von Θ sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Seitenabweichungen y' und x'

von demjenigen Punkte an gezählt werden, in welchem der Hauptstrahl die Projectionsfläche oder die der Abscisse z entsprechende, auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene durchschneidet. Da jedoch dieser Ursprung von y' und x' willkührlich ist, so entsteht die Frage, ob es nicht einen anderen Punkt giebt, welcher die Eigenschaft hat, dass die Summe der r'^2 für sämmtliche Strahlen und mithin θ so klein als möglich wird, wenn man jenen Punkt als Ursprung der y' und x' annimmt. Untersuchen wir daher die Folgen, welche hieraus entstehen. Zuerst ist es einleuchtend, dass der erwähnte Punkt sich nur in der durch den Hauptstrahl und die Axe des Instrumentes gelegten Ebene befinden kann, weil die Strahlen symmetrisch um diese Ebene liegen. Da nun die Coordinaten des bisherigen Ursprungs y'' und x'' waren, so folgt hieraus, dass bloss die erstere durch die Verlegung des Ursprungs eine Aenderung erleidet, die letztere dagegen nach wie vor $= 0$ bleibt.

Inclaviren wir daher alle Grössen, welche sich auf die bisherige Annahme beziehen, und bezeichnen durch

$\mathfrak{y}$ die Zunahme, welche (y'') durch die Veränderung des Ursprungs erhält,

so sind die Coordinaten des neuen Ursprungs

$$\left.\begin{aligned} y'' &= (y'') + \mathfrak{y} \\ x'' &= (x'') = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

mithin die Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles, wenn sie von dem neuen Ursprunge an gezählt werden,

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - y'' = y - (y'') - \mathfrak{y} = (y') - \mathfrak{y} \\ x' &= x - x'' = x - (x'') \quad\; = (x') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Die letzteren Formeln geben

$$\begin{aligned} r'^2 &= [(y') - \mathfrak{y}]^2 + (x')^2 \\ &= (r')^2 - 2(y')\,\mathfrak{y} + \mathfrak{y}^2 \end{aligned}$$

Aus diesem Werthe von r'^2 müssen wir jetzt den correspondirenden Werth von θ berechnen, wozu nur nöthig ist, statt (y') seinen Werth aus (d) von Nro. 68 zu substituiren, sodann die in (n) von Nro. 79 angegebenen Veränderungen vorzunehmen und $(r')^2$ mit (θ) zu verwechseln. Nennt man daher

$[y']$ den Werth, welchen (y') durch die erwähnten Veränderungen erhält,

bemerkt man ferner, dass $\mathfrak{y}$ eine Constante ist, welche hierdurch ungeändert bleibt, so wird

$$\theta = (\theta) - 2[y']\,\mathfrak{y} + \mathfrak{y}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Da $\mathfrak{y}$ bis jetzt unbestimmt geblieben ist, so können wir seinen Werth so bestimmen, dass Θ so klein als möglich wird, indem wir

$$\frac{d\,\Theta}{d\,\mathfrak{y}} = 0$$

setzen. Diess giebt

$$\mathfrak{y} = [y']$$

Durch Substitution dieses Werthes erhalten wir aus (a) die Coordinaten des neuen Ursprungs der Seitenabweichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y'' = (y'') + [y'] \\ x'' = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

ferner aus (b) die Coordinaten des allgemeinen farbigen Strahles, wenn sie von dem neuen Ursprunge an gezählt werden:

$$\left.\begin{array}{l} y' = (y') - [y'] \\ x' = (x') \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

endlich aus (c) die Undeutlichkeit des durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punktes in Bezug auf den neuen Ursprung:

$$\Theta = (\Theta) - [y']^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

woraus ersichtlich ist, dass Θ bei dem auf diese Weise bestimmten Werthe von $\mathfrak{y}$ stets ein Minimmm ist.

Entwickeln wir nun den Werth von $[y']$.

Die erste Gleichung (d) von Nro. 68 giebt, wenn man darin alle Glieder weglässt, welche entweder die erste Potenz von $\delta\nu$ oder ungerade Potenzen von $\cos\Psi$ enthalten,

$$(y') = \frac{V z}{\nu}\left\{\begin{array}{l} M\,R^2\,\varphi\left(\frac{1}{2} + \cos^2\Psi\right) \\ + Q\,(R^4 K_\varphi + 2R^2 K^3{}_\varphi{}^3)\,(1 + 4\cos^2\Psi) \\ + t_\varphi\,\delta\nu^2 \end{array}\right.$$

folglich durch die erwähnten Veränderungen

$$[y'] = \frac{V z}{\nu}\left[\frac{M\,R^2\,\varphi}{2} + Q\,(R^4 K_\varphi + 3R^2 K^3{}_\varphi{}^3) + \frac{\delta^2}{\delta_0}\,t_\varphi\right]. \quad \text{(g)}$$

Substituiren wir hierin statt $\frac{\delta_2}{\delta_0}$ seinen Werth aus (h) der vorhergehenden Nummer und statt der übrigen Grössen ihre Werthe aus (b) von Nro. 68, so wird

$$[y'] = \frac{V_i\,z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l} \left[M_i + (M)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\frac{R^2\,\varphi_1}{2} \\ + Q_e\,(R^4 K_1\varphi_1 + 3R^2 K_1^3\,\varphi_1^3) \\ + \varepsilon\,t_i\,\varphi_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

folglich wenn man in (d) statt $[y']$ den vorhergehenden Werth und statt (y'') seinen Werth aus (h) von Nro. 78 substituirt,

$$
\overset{\prime\prime}{y} = \frac{V_i z_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}1 + \frac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ + \left[\frac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1\right]\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ + \frac{D\,V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{v_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} + {}_8 t_i\end{array}\right)\varphi_1 \\ + \left[P_i + 3\,Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^5\end{array}\right\} \quad \text{(i)}
$$

$$
\overset{\prime\prime}{x} = 0
$$

Denken wir uns, dass z_i nach und nach zunimmt, dass aber das Instrument währenddem eine unveränderte Einrichtung behält, wodurch $D\frac{1}{g_i}$ eine Constante ist, setzen wir ferner $D z_i$ und mithin auch $D\frac{1}{z_i} = 0$, weil die hierdurch ausgedrückte Verschiebung der Projectionsfläche bereits in der Veränderlichkeit von z_i enthalten ist, so wird

$$
\frac{D\,V_i z_i}{V_i z_i} = \frac{D\,V_i}{V_i}
$$

$$
\mathfrak{z}_i = \left(\frac{1}{g} + D\frac{1}{g}\right)_i - \frac{1}{z_i}
$$

und die vorhergehenden Gleichungen haben die Form:

$$
\overset{\prime\prime}{y} = C z_i + D
$$

$$
\overset{\prime\prime}{x} = 0
$$

Die verschiedenen Werthe von z_i bestimmen alsdann eine Reihe von Punkten, welche alle die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate der daselbst stattfindenden Seitenabweichungen kleiner ist, als sie seyn würde, wenn der Ursprung dieser Abweichungen in irgend einem anderen Punkte angenommen würde, dem dieselbe Abscisse z_i zugehörte. Aus der Form der Gleichungen (i) ist ferner ersichtlich, dass jene Punkte in einer geraden Linie liegen, welche von dem Hauptstrahle nur um Grössen von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen verschieden ist, und sich ebenso wie jener in der durch den leuchtenden Punkt und die Axe des Instrumentes gelegten Ebene befindet. Uebrigens gilt auch hier die in Nro. 78 gemachte Bemerkung, dass in (i) z_i mit g_i verwechselt und dem inclavirten Factor von φ_1 das Glied $g_i\,\mathfrak{z}_i$ zugesetzt werden kann, wenn $(z - g)_i$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_i}$ ist.

Es bleibt jetzt noch übrig, Θ zu berechnen. Die Formel (f) zeigt, dass zu dem früher gefundenen Werthe jener Grösse noch das Glied $-[\overset{\prime}{y}]^2$ hinzukommt. Vermöge (g) ist aber, wenn man das Quadrat des inclavirten Factors entwickelt,

$$
-[y']^2 = -\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{M^2 R^4 \varphi^2}{4} + MQ\,(R^6 K \varphi^2 + 3 R^4 K^3 \varphi^4 \\
&+ \frac{M^2 R\, t \varphi^2 \delta_2}{\delta_0} + Q^2\,(R^8 K^2 \varphi^2 + 6 R^6 K^3 \varphi^3 + 9 R^4 K^6 \varphi^6) \\
&+ \frac{2 Q t \delta_2}{\delta_0}\,(R^4 K \varphi^2 + 3 R^2 K^3 \varphi^4) + t^2 \varphi^2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

welche Grösse sich mit dem in (Θ) enthaltenen Gliede $\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \mathfrak{F}$ vereinigt.

Nach (f) der vorhergehenden Nummer ist das letztere

$$
\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \mathfrak{F} = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{5 M^2 R^4 \varphi^2}{12} + MQ\,(2 R^6 K \varphi^2 + 5 R^4 K^3 \varphi^4) \\
&+ \frac{M R^2 t \varphi^2 \delta_2}{\delta_0} + \frac{2 Q t \delta_2}{\delta_0}\,(R^4 K \varphi^2 + 3 R^2 K^3 \varphi^4)
\end{aligned}
\right.
$$

Daher ist die Summe von beiden

$$
\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \mathfrak{F} - [y']^2 = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{M^2 R^4 \varphi^2}{6} + MQ\,(R^6 K \varphi^2 + 2 R^4 K^3 \varphi^4) \\
&- Q^2 (R^8 K^2 \varphi^2 + 6 R^6 K^3 \varphi^3 + 9 R^4 K^6 \varphi^6) - t^2 \varphi^2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

Vermittelst der in derselben Nummer gebrauchten Methode können die von M abhängenden Glieder in ein vollständiges Quadrat verwandelt werden, wodurch jene Summe die Gestalt erhält:

$$
\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \mathfrak{F} - [y']^2 = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{R^4 \varphi^2}{6}\,[M + 3QK\,(R^2 + 2K^2 \varphi^2)]^2 \\
&- Q^2 \left[\frac{5}{2} R^8 K^2 \varphi^2 + 12 R^6 K^3 \varphi^3 + 15 R^4 K^6 \varphi^6\right] \\
&- t^2 \varphi^2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2
\end{aligned}
\right.
$$

Diesen Ausdruck müssen wir nunmehr in (Θ) an die Stelle von $\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \mathfrak{F}$ setzen. Die Vergleichung desselben mit dem in (g) der vorhergehenden Nummer gefundenen Werthe von $\mathfrak{F}$ zeigt aber, dass sich hierdurch nur

$$
\frac{5}{12} R^4 \varphi^2 \left[M + QK\left(\frac{12}{5} R^2 + 6 K^2 \varphi^2\right) + \frac{6\,\varepsilon\, t}{5 R^2}\right]^2
$$

$$
+ \frac{\varphi^2}{10}\,[QKR^4 - 2\,\varepsilon\, t]^2
$$

in

$$
\frac{R^4 \varphi^2}{6}\,[M + 3QK\,(R^2 + 2K^2 \varphi^2)]^2
$$

umändert. Nimmt man daher diese Verwechselung in (i) jener Nummer vor, so wird der auf den neuen Ursprung der Seitenabweichungen reducirte Werth von Θ:

$$\Theta = \left(\frac{V\mathfrak{z}}{\nu}\right)^2 \left\{\begin{array}{l}
\frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 6K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\
+ \frac{R^4\varphi^2}{6}\left[M + 3QK(R^2 + 2K^2\varphi^2)\right]^2 \\
+ \frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2} + 2QK^2(R^2 + K^2\varphi^2)\right]^2 \\
+ \frac{{}_{\varepsilon}R^2}{2}\left[S + {}_{\eta}s + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\
+ {}_{\varepsilon}\varphi^2\left[T + {}_{\eta}t + W\varphi^2 + UKR^2\right]^2 \\
+ Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8K^2\varphi^2}{10} + \frac{R^6K^4\varphi^4}{2} + \frac{R^4K^6\varphi^6}{3}\right] \\
+ \frac{\theta s^2 R^2}{2} \\
+ {}_{\varepsilon}U^2\left[\frac{R^6}{36} + \frac{2}{3}R^4K^2\varphi^2 + \frac{R^2K^4\varphi^4}{2}\right] \\
+ \theta t^2\varphi^2 \\
+ \frac{R^2}{2}\left\{\begin{array}{l} J\mathfrak{z} + \frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) + {}_{\varepsilon}s \end{array}\right\}^2
\end{array}\right\} \quad \text{(k)}$$

Diese Formel drückt daher die absolute Undeutlichkeit des durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punktes unter der Voraussetzung aus, dass der Ursprung der Seitenabweichungen in demjenigen Punkte angenommen wird, welcher die Summe ihrer Quadrate bei einerlei Werth von $\mathfrak{z}_i$ so klein als möglich macht.

Da der Zweck der gegenwärtigen Untersuchung der ist, die Bedingungen zu finden, unter welchen die Undeutlichkeit möglichst vermindert wird, so dürfen wir für Θ nicht den in der vorhergehenden Nummer gefundenen Werth gebrauchen, weil derselbe durch die willkührliche Annahme, dass der Ursprung der Seitenabweichungen im Hauptstrahle liegen sollte, grösser wurde, als es nöthig und bei der nunmehr erhaltenen Bestimmung über die schicklichste Lage jenes Ursprungs der Fall ist. Wir müssen demnach die Formel (k) an die Stelle der in (i) der vorhergehenden Nummer gefundenen setzen.

Bei dieser Verwechselung vertritt die durch die Gleichungen (i) bestimmte Linie die Stelle des Hauptstrahles. Da jedoch bei den Instrumenten der zweiten Art der Hauptstrahl die Hornhaut des dahinter befindlichen Auges wirklich durchschneidet, da ferner bei der Voraussetzung einer veränderlichen Lage des Auges angenommen wurde, dass das letztere bei der Betrachtung eines jeden Punktes stets seine Axe nach dem correspondirenden Hauptstrahle richtet, so müssen wir untersuchen, ob dasselbe auch stattfinden kann, wenn die erwähnte Linie statt des Hauptstrahles genommen wird.

Nach (d) und (e) sind die Coordinaten jener Linie und des allgemeinen farbigen Strahles

$$\left.\begin{aligned} y'' &= (y'') + [y'] \\ x'' &= 0 \\ y' &= (y') - [y'] \\ x' &= (x') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

Wird dagegen der Hauptstrahl beibehalten, so sind die correspondirenden Coordinaten

$$\left.\begin{aligned} y'' &= (y'') \\ x'' &= 0 \\ y' &= (y') \\ x' &= (x') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Um in beiden Fällen die Durchschnitte der Linie und der Strahlen mit der Hornhaut zu bestimmen, muss man in den vorhergehenden Gleichungen statt z denjenigen Werth nehmen, welcher jenem Durchschnittspunkte zugehört. Bemerkt man nun, dass (y''), (y') und (x') die in $\mathfrak{z}$ begriffenen, von $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)$ abhängigen Glieder enthalten, welche von der Ordnung der nicht aufgehobenen Abweichungen sind, wenn die Lage der Strahlen in der Nähe des Bildes untersucht wird, in allen übrigen Fällen dagegen die einzigen Glieder der ersten Ordnung ausmachen, dass ferner $[y']$ eine Grösse von der Ordnung jener Abweichungen ist, so ist es einleuchtend, dass die Coordinaten der erwähnten Durchschnittspunkte in Bezug auf die Grössen der ersten Ordnung einerlei gefunden werden, sie mögen aus den Gleichungen (l) oder aus den Gleichungen (m) berechnet werden. Nur in den Gliedern der höheren Ordnungen zeigt sich in den beiden Fällen eine Verschiedenheit. Da nun bei den früheren Untersuchungen alle Grössen der letzteren Art in den Endresultaten weggefallen sind, so würde ein Gleiches bei denjenigen eintreten, welche nach der gegenwärtigen Annahme hinzukämen. Wir können mithin den Schluss machen, dass es erlaubt ist, die durch die Gleichungen (i) bestimmte Linie an die Stelle des Hauptstrahles zu setzen, dass sich das Auge eben so gut nach jener Linie als nach dem Hauptstrahle richten kann und dass die früher gefundenen Resultate ihre Richtigkeit behalten, wofern man bei den Seiten- und Winkelabweichungen die von $[y']$ abhängigen Glieder berücksichtigt. Der in (k) erhaltene Ausdruck von Θ ist daher auch bei den Winkelabweichungen anwendbar, wenn in demselben der gemeinschaftliche Factor z^2 weggelassen wird.

Da hiernach die durch die Gleichungen (i) bestimmte Linie nunmehr als eine Axe zu betrachten ist, auf welche die Lage der übrigen von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen

bezogen wird, diese Strahlen aber zusammengenommen den Strahlenbündel ausmachen, welcher von jenem Punkte in das Instrument fällt, so werde ich zur Abkürzung die erwähnte Linie die *Axe des Strahlenbündels* nennen.

Berechnen wir jetzt noch den Winkel $\overset{''}{\omega}$, welchen dieselbe mit der Axe des Instrumentes macht. Da die Tangente dieses Winkels durch den Coefficienten von z in der Gleichung jener Linie ausgedrückt wird und da die Grösse $[\overset{'}{y}]$ den gemeinschaftlichen Factor z enthält, so folgt aus der ersten Gleichung (d), dass

$$tg\overset{''}{\omega} = tg(\overset{''}{\omega}) + \frac{[\overset{'}{y}]}{z}$$

ist. Substituiren wir hierin statt $tg(\overset{''}{\omega})$ seinen Werth aus (l) von Nro. 78 und statt $[\overset{''}{y}]$ den in (h) gefundenen Werth, so erhalten wir den folgenden Ausdruck für den Winkel, welchen die Axe des Strahlenbündels mit der Axe des Instrumentes macht:

$$tg\overset{''}{\omega} = \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ + \left[\frac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1\right]\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ - \frac{\nu_i K_i}{V_i^2 g_i} + \frac{1}{V_i} D\left(V_i - \frac{\nu_i K_i}{V_i g_i}\right) + \varepsilon t_i\end{array}\right\}\varphi_1 \\ + \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^5\end{array}\right\} \quad (n)$$

Sollen die Producte von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ in Grössen der zweiten Ordnung beibehalten werden, welche wir bei der vorhergehenden Entwickelung vernachlässigt haben, so kommt nach der am Ende von Nro. 68 gemachten Bemerkung zu dem inclavirten Factor von $\overset{'}{y}$ noch das Glied $\mathfrak{q} R^2 \varphi$. Hierdurch wird nach der obigen Bezeichnung

$$(\overset{'}{y}) = \frac{Vz}{\nu} R^2 \varphi \left[\mathfrak{M}\left(\frac{1}{2} + \cos^2\Psi\right) + \mathfrak{q}\right]$$

folglich

$$[\overset{'}{y}] = \frac{Vz}{\nu}\,\frac{R^2\varphi}{2}\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{q})$$

Substituirt man diesen Werth in (d) und (f), sodann statt $(\overset{''}{y})$ und Θ ihre Werthe aus (o) von Nro. 78 und (k) von Nro. 80, so werden die Gleichungen für die Axe des Strahlenbündels:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{''}{y}_i = \frac{V_i z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{R^2}{2}(\mathfrak{M} + \mathfrak{q}) - \frac{\nu_i K_i}{V_i^2}\left(\frac{z-g}{gz}\right)_i \\ + \frac{D \cdot V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{\nu_i}{V_i z_i} D \cdot \frac{K_i}{V_i}\left(\frac{z-g}{g}\right)_i\end{array}\right\}\varphi_1 \\ + \mathfrak{P}\varphi_1^3\end{array}\right. \\ \overset{''}{x}_i = 0\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (o)$$

Ferner ist, in Bezug auf jene Axe, die Undeutlichkeit durch den Ausdruck gegeben:

$$\Theta = \left(\frac{V\mathfrak{z}}{\nu}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^6}{36}\mathfrak{L}^2 + \frac{R^4\varphi^2}{12}\left[\mathfrak{M}^2 + (\mathfrak{M}+\mathfrak{q})^2\right] \\ + \frac{R^2\varphi^4}{2}\left(\frac{\mathfrak{O}-\mathfrak{N}}{2}\right)^2 \\ + \frac{\varepsilon R^2}{2}\mathfrak{S}^2 + \varepsilon\varphi^2\mathfrak{T}^2 \\ + \frac{R^2}{2}\left[J_{\mathfrak{z}} + \frac{2}{3}\mathfrak{L}R^2 + \left(\frac{\mathfrak{O}+\mathfrak{N}}{2}\right)\varphi^2\right]^2 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

wobei jedoch $\Delta\frac{1}{c_1}$ und alle Glieder der dritten Ordnung vernachlässigt sind.

Ort der Bilder, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören, wenn sie nach der absoluten Undeutlichkeit bestimmt werden.

82) Da die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen, wie wir oben gefunden haben, sich nach der letzten Brechung nicht in einem Punkte vereinigen, so entsteht dadurch kein eigentliches Bild, in dem Sinne genommen, wie es bei einer vollkommenen Deutlichkeit der Fall seyn würde. Wir müssen daher andere Charactere aufsuchen, um bei unvollkommener Deutlichkeit das Bild zu definiren. In dieser Beziehung bieten sich jedoch mehrere Ideen dar, welche dabei zu Grund gelegt werden können; entwickeln wir daher die Folgen, die aus jeder derselben entspringen.

Zuerst können wir unter dem Bilde denjenigen Raum verstehen, in welchem die von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen so nahe wie möglich bei einander liegen, um uns dadurch der Eigenschaft des Bildes bei vollkommener Deutlichkeit, so viel es geschehen kann, zu nähern, da in dem letzteren die Entfernung der verschiedenen Strahlen von einander völlig verschwindet.

Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck, den wir in (k) der vorhergehenden Nummer für die absolute Undeutlichkeit Θ erhalten haben, anwendbar, um denjenigen Werth der Abscisse $\mathfrak{z}$ zu finden, welcher dem Bilde des durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten leuchtenden Punktes zugehört.

Wir haben nämlich gesehen, dass jene Grösse der Summe der Quadrate der Entfernungen zwischen der Axe des Strahlenbündels und den übrigen dazu gehörigen Strahlen proportional ist, vorausgesetzt, dass diese Entfernungen an derjenigen Stelle gemessen werden, welche der Abscisse $\mathfrak{z}$ entspricht. Bestimmen wir daher die letztere so, dass dadurch Θ ein Minimum wird, so finden wir diejenige Stelle, an welcher die zu dem Strahlenbündel gehörigen

Strahlen so nahe wie möglich bei der Axe desselben, mithin auch so nahe wie möglich bei einander liegen, welches der gegebenen Definition des Bildes entspricht.

Da im gegenwärtigen Falle von einer Verschiebung der Projectionsfläche nicht die Rede ist, so ist

$$D\frac{1}{z} = 0$$

und dadurch wird der in (d) von Nro. 78 für $\mathfrak{z}$ angenommene Werth

$$\mathfrak{z} = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right) + D\frac{1}{g} \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Nach der Substitution dieses Werthes kann der in (k) der vorhergehenden Nummer gefundene Ausdruck von Θ unter die Gestalt gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{V^2 R^2}{2\nu^2} z^2 \left[A + \left(B - \frac{J}{z}\right)^2\right] \\ &= \frac{V^2 R^2}{2\nu^2} \left[A z^2 + (B z - J)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Für das Minimum in Bezug auf z ist

$$\frac{d\Theta}{dz} = 0$$

Man findet daher aus (b), da alle übrige darin enthaltene Grössen von z unabhängig sind,

$$0 = Az + B\,(Bz - J)$$

mithin

$$\frac{1}{z} = \frac{B^2 + A}{JB} = \frac{B}{J} + \frac{A}{JB} \quad \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Der hieraus folgende Werth von z drückt die Abscisse des Bildes aus, welches dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten leuchtenden Punkte zugehört, wenn man die Lage desselben nach der absoluten Deutlichkeit bestimmt.

Die Vergleichung der obigen Formel (b) mit (k) der vorhergehenden Nummer zeigt, dass A die durch $\frac{V^2 R^2 z^2}{2\nu^2}$ dividirte Summe sämmtlicher Glieder von Θ mit Ausschluss des letzten bezeichnet. Dagegen ist

$$\left.\begin{aligned} B = J\left(\frac{1}{g} + D\frac{1}{g}\right) + \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) + \varepsilon s \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die beiden andern Coordinaten des Bildes zu bestimmen, welche der Abscisse z zugehören. Da wir als Bild denjenigen Raum angenommen haben, in welchem die von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen so

nahe wie möglich bei der Axe des Strahlenbündels liegen, so können wir den der Abscisse z entsprechenden Punkt jener Axe als den Mittelpunkt des Bildes betrachten, welcher mit dem Bilde selbst verwechselt werden kann, wofern man die durch die Abweichungen entstehende Grösse desselben nicht berücksichtigt. Um daher die beiden Coordinaten jenes Punktes zu erhalten, müssen wir in den Gleichungen für die Axe des Strahlenbündels, welche in (i) der vorhergehenden Nummer gefunden wurden, diejenigen Werthe substituiren, die aus den obigen Gleichungen (a) und (c) und aus der Voraussetzung, dass $D\frac{1}{z} = 0$ ist, folgen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} z_i &= \frac{JB}{B^2+A} \\ \delta_i &= \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} - \frac{B}{J} - \frac{A}{JB} \\ \frac{D V_i z_i}{V_i z_i} &= \frac{D V_i}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

Durch diese Substitution geben die allegirten Gleichungen die Coordinaten $\overset{\prime\prime}{y}_i$ und $\overset{\prime\prime}{x}_i$, welche dem Mittelpunkte des Bildes zugehören.

Wir können aus diesen Formeln sogleich einige allgemeine Folgerungen ziehen.

Zuerst zeigt uns der Werth

$$\overset{\prime\prime}{x} = 0$$

dass sich der Mittelpunkt des Bildes stets mit dem dazu gehörigen Punkte des Gegenstandes in einer durch die Axe des Instrumentes gelegten Ebene befindet.

Nehmen wir ferner an, dass das Instrument für alle Punkte des Gegenstandes eine ungeänderte Einrichtung behält, und betrachten wir den letzteren, wie bisher, als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene, so ist φ die einzige veränderliche Grösse, welche in den Ausdrücken von z und $\overset{\prime\prime}{y}$ vorkommt. Diese Coordinaten sind daher für alle Punkte des Gegenstandes einerlei, für welche φ einerlei Werth hat, d. h. die in gleicher Entfernung von der Axe des Instrumentes liegen, dagegen ändern sie sich zugleich mit φ. Wir können hieraus den Schluss machen, dass die Bilder der verschiedenen Punkte des Gegenstandes nicht in einer auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene liegen, wie es der Fall seyn würde, wenn keine Abweichungen vorhanden wären. Jene Bilder befinden sich vielmehr, wenn man von ihrer Grösse abstrahirt, in einer krummen Fläche, welche ich die *Bildfläche* nennen werde, und deren Gestalt wir vermittelst der vorhergehenden Formeln bestimmen können.

Denken wir uns nämlich wie in Nro. 34 die Ebene des Hauptstrahles um die Axe des Instrumentes gedreht, bis sie in ihre an-

fängliche Lage zurückkommt und betrachten wir in den verschiedenen Lagen derselben diejenigen Punkte des Gegenstandes, für welche φ einerlei ist, so liegen dieselben in dem Umfange eines mit dem Halbmesser $b_1 = c_1 \varphi$ beschriebenen Kreises.

Aus den für $\frac{1}{z}$ und y'' erhaltenen Ausdrücken ist aber ersichtlich, dass die jenen Punkten entsprechenden Bilder ebenfalls in einem Kreise liegen, dessen Halbmesser $= y''$ ist und dessen Ebene senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und sich in der Entfernung z von der letzten brechenden Fläche befindet.

Hiernach ist die Bildfläche eine Revolutionsfläche, deren Umdrehungsaxe mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt.

Man erhält die Gleichung ihrer erzeugenden Curve, wenn man zwischen den Ausdrücken von $\frac{1}{z}$ und y'' die Grösse φ eliminirt, durch welche dieselben auf einen speciellen Punkt des Gegenstandes bezogen wurden.

Bei der weiteren Entwickelung der vorhergehenden Resultate müssen wir jedoch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem g einen solchen Werth hat, dass die Grössen von der Ordnung LR^2 als klein in Vergleichung mit $\frac{J}{g}$ zu betrachten sind, oder je nachdem $\frac{J}{g}$ so klein ist, dass es selbst als eine Grösse jener Ordnung angesehen werden muss.

83) Beginnen wir die Untersuchung mit dem ersten Falle.

Die Vergleichung des in (b) der vorhergehenden Nummer angenommenen Ausdruckes von Θ mit (k) von Nro. 81 zeigt, dass A eine Grösse von der Ordnung des Quadrates von LR^2 ist. Ferner ist aus (d) der vorhergehenden Nummer ersichtlich, dass B das erste Glied $\frac{J}{g}$ enthält, welches nach der gemachten Voraussetzung nicht als eine kleine Grösse betrachtet wird; dagegen sind die folgenden Glieder von B sämmtlich von der Ordnung LR^2. Hiernach ist $\frac{A}{JB}$ von der Ordnung des Quadrates jener Grösse und kann daher gegen $\frac{B}{J}$ vernachlässigt werden. Der daselbst in (c) gefundene Ausdruck von $\frac{1}{z}$ reducirt sich mithin auf den folgenden:

$$\frac{1}{z} = \frac{B}{J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

oder, wenn man statt B seinen Werth aus (d) von Nro. 82 substituirt,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) + \varepsilon s\end{array}\right\} \quad . \ (b)$$

wodurch die dem Bilde zugehörige Abscisse z bestimmt wird.

Für den in der Axe liegenden Punkt des Gegenstandes ist

$$\varphi = 0$$

Bezeichnen wir daher durch

z' die Abscisse, welche dem Bilde des in der Axe befindlichen Punktes des Gegenstandes zugehört,

drücken wir ferner $\frac{1}{z}$ durch $\frac{1}{z'}$ aus, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{z'} &= \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left[\frac{2}{3} L R^2 + \frac{Q R^4}{2} + {}_8 s\right] \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{z'} + \frac{1}{J}\left[\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 + Q\,(4R^2 K^2 \varphi^2 + 3K^4 \varphi^4)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \text{(c)}$$

Vergleichen wir jetzt die Formel (b) mit der in (n) von Nro. 71 gefundenen. Die letztere bestimmt den mittleren Werth von $\frac{1}{z}$ für die Vereinigungspunkte der beiden Paare von Strahlen, welche in einer beliebigen Entfernung R von dem Hauptstrahle auf die erste brechende Fläche fallen, und für welche einmal $\Psi = 0$ und $\Psi = \pi$, und dann $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \frac{3\pi}{2}$ ist. In (b) dagegen bezeichnet R den äussersten Werth dieser Grösse, welcher durch den Ausdruck (e) von Nro. 79 gegeben ist. Zur Unterscheidung beider Werthe von R werde ich daher den ersteren mit R' bezeichnen, für den letzteren dagegen den Buchstaben R beibehalten. Ferner bezieht sich die Formel (n) von Nro. 71 auf einen Strahl von beliebiger Brechbarkeit. Wählt man nun dazu den mittleren, so ist $\delta \nu = 0$.

Endlich ist in der allegirten Formel noch keine Rücksicht auf die mit der Characteristik D bezeichneten kleinen Veränderungen genommen. Um ihren Einfluss zu berechnen, müssen wir nach den in Nro. 78 angenommenen Grundsätzen $\frac{1}{g}$ mit $\frac{1}{g} + D\frac{1}{g}$ verwechseln.

Hierdurch giebt die erwähnte Formel

$$\frac{1}{z_{,,,}} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned} &L R'^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ &+ Q\,(R'^4 + 6R'^2 K^2 \varphi^2 + 3K^4 \varphi^4) \end{aligned}\right.$$

Setzt man darin

$$R' = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

so wird

$$\frac{1}{z_{,,,}} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ &+ Q\left(\frac{4}{9} R^4 + 4R^2 K^2 \varphi^2 + 3K^4 \varphi^4\right) \end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

Der Unterschied zwischen dieser Formel und der in (b) gefundenen ist

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z_{,,,}} = \frac{1}{J}\left[\frac{Q R^4}{18} + {}_8 s\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(e)}$$

Die beiden hierin enthaltenen Glieder sind sehr kleine Grössen der dritten Ordnung, deren erste sich auf die Abweichung wegen der Gestalt, die zweite dagegen auf die Farbenzerstreuung bezieht. Wir können daher hieraus den Schluss machen, dass der dem Bilde zugehörige Werth von $\frac{1}{z}$ sehr nahe dem arithmetischen Mittel aus denjenigen Werthen gleich ist, welche den Durchschnittspunkten zweier Paare von Strahlen von mittlerer Brechbarkeit entsprechen, die in der Entfernung $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ von der Axe auf die erste brechende Fläche fallen, und für die einmal $\Psi = 0$ und $\Psi = \pi$, und dann $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \frac{3\pi}{2}$ ist.

Nachdem wir durch die oben entwickelten Formeln die Abscisse z_i des Bildes gefunden haben, können wir seine anderen Coordinaten berechnen. Wir gelangen dazu, wenn wir in (i) von Nro. 81 diejenigen Substitutionen vornehmen, welche in (e) der vorhergehenden Nummer angegeben sind, und welche sich in dem gegenwärtigen Falle auf die folgenden reduciren:

$$\left.\begin{aligned} z_i &= \frac{J}{B} \\ \mathfrak{z}_i &= \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} - \frac{B}{J} \\ \frac{D\,V_i\,z_i}{V_i\,z_i} &= \frac{D\,V_i}{V_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Bestimmen wir jetzt noch die erzeugende Curve der Bildfläche.

Wir haben gesehen, dass es hierzu erforderlich ist, die Grösse φ zwischen der zweiten der vorhergehenden Gleichungen (c) und der ersten der Gleichungen (i) von Nro. 81 zu eliminiren. Zur Erleichterung dieser Elimination können wir jedoch die folgenden Bemerkungen machen.

Wenn die Grösse $\left(\frac{O+N}{2}\right)$ in der ersteren Gleichung einen bedeutenden Werth hat, so ist es erlaubt, die Glieder der dritten Ordnung zu vernachlässigen und daher statt φ denjenigen Werth zu substituiren, welcher erhalten wird, wenn man die Abweichungen vernachlässigt. Die Glieder der dritten Ordnung würden in diesem Falle unrichtig werden, weil bei ihrer Entwickelung die Voraussetzung zu Grunde lag, dass die Glieder der zweiten Ordnung wegen der Kleinheit ihrer Coefficienten als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet werden könnten, welche Voraussetzung unstatthaft ist, wenn $\left(\frac{O+N}{2}\right)$ einen bedeutenden Werth hat. Im entgegengesetzten Falle dagegen müssen sämmtliche Glieder in dem Ausdruck von $\frac{1}{z}$ als Grössen der dritten Ordnung angesehen werden, und da wir alle

Glieder der höheren Ordnungen vernachlässigen, so müssen wir auch in diesem Falle statt φ seinen Werth ohne Rücksicht auf die Abweichungen substituiren.

Hiernach giebt die erste Gleichung (i) von Nro. 81

$$y'' = \frac{Vz}{v}\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (g)$$

folglich

$$\varphi = \frac{vy''}{Vz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (h)$$

Substituirt man daher diesen Werth von φ in der zweiten der vorhergehenden Gleichungen (c) und bemerkt, dass nach (b) von Nro. 68

$$\frac{1}{J} = -\frac{V^2}{v}$$

ist, so erhält man die folgende Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z'} - v\left[\left(\frac{O+N}{2} + 4QK^2R_{,}^2\right)\left(\frac{y''}{z}\right)^2 + \frac{3v^2QK^4}{V^2}\left(\frac{y''}{z}\right)^4\right] \quad (i)$$

Diese Gleichung zeigt, dass im Allgemeinen gleichen und entgegengesetzten Werthen von y'' einerlei Werthe von z entsprechen und dass $z = z'$ wird, wenn $y'' = 0$ ist. Hieraus folgt, dass die Axe des Instrumentes ein Durchmesser der Curve ist, und dass diese einen Scheitel an derjenigen Stelle hat, wo das Bild des in der Axe befindlichen Punktes des Gegenstandes liegt, und wo $z = z'$ ist. Die Gestalt und Lage der Curve hängt von der Beschaffenheit der Coefficienten in ihrer Gleichung ab, untersuchen wir sie daher etwas näher in den verschiedenen Fällen, welche dabei in Betracht kommen.

Können die Grössen der dritten Ordnung gegen die der zweiten Ordnung vernachlässigt werden, so fallen die mit Q multiplicirten Glieder in der vorhergehenden Gleichung weg, welche sich mithin auf die folgende reducirt:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z'} - \frac{v(O+N)y''^2}{2z^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (k)$$

oder

$$y''^2 = -\frac{2}{vz'(O+N)}(z'z - z^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (l)$$

Verlegen wir den Ursprung der z in den Scheitel der Curve, dessen Abscisse z' ist, und nennen wir

z'' die von diesem neuen Ursprunge an gezählte Abscisse,

so ist

$$z = z' + z'' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (m)$$

und die vorhergehende Gleichung wird

$$y''^2 = \frac{2}{vz'(O+N)}(z'z'' + z''^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (n)$$

Die erzeugende Curve ist daher ein Kegelschnitt und zwar eine Hyperbel oder eine Ellipse, je nachdem $(O+N)$ und z' einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Im ersten Falle kehrt sie der letzten brechenden Fläche ihre convexe, im zweiten Falle dagegen ihre concave Seite zu. Ohne Rücksicht auf das Zeichen ist

$$\frac{2}{\nu(O+N)} \text{ der Parameter,}$$

$$z' \text{ die grosse Axe}$$

derselben.

Wir müssen jetzt noch die Gestalt der erzeugenden Curve bestimmen, wenn die in der Gleichung (i) enthaltenen Grössen der zweiten Ordnung solche Werthe haben, dass dagegen die zur dritten Ordnung gehörigen Glieder nicht vernachlässigt werden können. Da bei der Entwickelung der ursprünglichen Formeln φ als eine kleine Grösse angenommen wurde, so können wir uns darauf beschränken, nur kleine Werthe von $\frac{y''}{z}$ zu betrachten.

Unter dieser Voraussetzung ändert sich die Gestalt der Curve ab, je nachdem die Coefficienten von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ und $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$, in dem inclavirten Factor von ν, mithin die Grössen

$$\left(\frac{O+N}{2} + 4\,Q\,K^2\,R^2\right) \text{ und } Q$$

einerlei oder entgegensetzte Zeichen haben.

Findet das erstere statt, so ist aus der allegirten Gleichung ersichtlich, dass z stets grösser oder stets kleiner als z' ist, je nachdem jene Coefficienten entweder beide positiv oder beide negativ sind, ebenso wie es bei der Gleichung (k) der Fall ist, je nachdem $(O+N)$ einen positiven oder negativen Werth erhält.

Bei gleichen Zeichen jener Grössen hat daher die erzeugende Curve dieselbe Lage, welche sie haben würde, wenn bloss die Grössen der zweiten Ordnung vorhanden wären und

$$\frac{O+N}{2} \text{ mit } \left(\frac{O+N}{2} + 4\,Q\,K^2\,R^2\right)$$

verwechselt würde. Dagegen wird die Natur der Curve verändert, indem diese wegen des von $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ abhängigen Gliedes nun kein Kegelschnitt mehr ist und eine stärkere Krümmung hat, als das von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ abhängige Glied allein hervorbringen würde.

Haben die Coefficienten von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ und $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ entgegengesetzte Zeichen, so hat die Curve in der Nähe des Scheitels dieselbe Lage,

welche sie haben würde, wenn das zweite von $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ abhängige Glied nicht vorhanden wäre, weil dieses bei sehr kleinen Werthen von $\left(\frac{y''}{z}\right)$ in Vergleichung mit dem ersten von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ abhängigen Gliede nur einen unbedeutenden Werth erhält. Lässt man daher $\frac{y''}{z}$ von 0 an nach und nach wachsen, so nimmt Anfangs z sehr nahe ebenso zu oder ab, wie es der Fall seyn würde, wenn das erste Glied allein existirte. Nach und nach wird aber das zweite Glied verhältnissmässig grösser und da es das entgegengesetzte Zeichen des ersten Gliedes hat, so findet bei einem gewissen Werthe von $\frac{y''}{z}$ ein Maximum oder Minimum von z statt, welches man erhält, wenn man $\frac{y''}{z}$ als die unabhängige veränderliche Grösse betrachtet und das nach derselben genommene Differential von $\frac{1}{z} = 0$ setzt. Hiernach ist derjenige Werth von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$, welcher dem Maximum oder Minimum von z zugehört, durch den Ausdruck gegeben:

$$\left(\frac{y''}{z}\right)^2 = -\frac{V^2\left(\frac{O+N}{2} + 4QK^2R^2\right)}{6\nu^2 QK^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

Fährt $\frac{y''}{z}$ fort zu wachsen, so nimmt z wieder ab oder zu, je nachdem ein Maximum oder Minimum vorhanden war und erhält an einer gewissen Stelle denselben Werth, den es im Scheitel der Curve hat. Man findet den dieser Stelle entsprechenden Werth von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$, wenn man in der Gleichung (i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{z'}$ setzt.

Diess giebt

$$\left(\frac{y''}{z}\right)^2 = -\frac{V^2\left(\frac{O+N}{2} + 4QK^2R^2\right)}{3\nu^2 QK^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Bei noch weiterer Zunahme von $\frac{y''}{z}$ dauert die Ab- oder Zunahme von z auf dieselbe Weise, nur in vergrössertem Maasse fort, so dass kein Maximum oder Minimum mehr stattfindet. Denken wir uns daher die erzeugende Curve um die Axe des Instrumentes gedreht, wodurch sie die Bildfläche erzeugt, denken wir uns ferner durch ihren Scheitel eine Ebene gelegt, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht, so berührt die Bildfläche im Scheitel jene Ebene. Nach und nach entfernt sie sich aber immer mehr von derselben, bis diese Entfernung ihren grössten Werth in einem Kreise erhält, dessen Halbmesser derjenige Werth von y'' ist, welchen

man findet, wenn man z zwischen den Gleichungen (i) und (o) eliminirt. Von da an nähert sich die Bildfläche wieder der Ebene und durchschneidet sie in einem Kreise, dessen Halbmesser aus (p) erhalten wird, wenn man darin $z = z'$ setzt. Jenseits dieses Kreises endlich liegt sie auf der entgegengesetzte Seite der Ebene und entfernt sich immer weiter von ihr, je grösser y'' wird. Ferner ist ersichtlich, dass die Bildfläche in der Gegend des Scheitels ihre convexe Seite, in der Gegend des Maximums der Entfernung aber ihre concave Seite der erwähnten Ebene zukehrt.

Da übrigens bei den vorhergehenden Formeln nur kleine Werthe von φ und $\left(\frac{y''}{z}\right)$ in Betracht kommen, so ist es bei nicht bedeutenden Werthen von g erlaubt, an denselben einige Abkürzungen vorzunehmen und sie dadurch einfacher zu machen. Unter jener Voraussetzung sind nämlich g, z und z' nur um Grössen von der Ordnung LR^2 unter einander verschieden und z'' ist von der letzteren Ordnung. Man kann daher in den Gliedern dieser Ordnung z und z' mit g verwechseln und das Quadrat von z'' vernachlässigen.

Diess giebt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{z'} - \frac{1}{g} &= \frac{g - z'}{g^2} \\ \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} &= \frac{z' - z}{g^2} = -\frac{z''}{g^2} \\ D\frac{1}{g} &= -\frac{Dg}{g^2} \\ \frac{y''}{z} &= \frac{y''}{g} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Hierdurch erhalten wir aus (c) die Abscisse des Bildes sowohl für den in der Axe befindlichen Punkt, als auch für einen beliebigen Punkt des Gegenstandes:

$$\left.\begin{aligned} z' &= g + Dg - \frac{g^2}{J}\left[\frac{2}{3}LR^2 + \frac{QR^4}{2} + \varepsilon s\right] \\ z &= z' - \frac{g^2}{J}\left[\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 + Q(4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4)\right] \end{aligned}\right\} . \quad (r)$$

ferner aus (i) die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche, wobei der Ursprung der Abscissen z'' im Scheitel angenommen ist,

$$z'' = \nu\left[\left(\frac{O+N}{2} + 4QK^2R^2\right)y''^2 + \frac{3\nu^2 QK^4 y''^4}{V^2 g^2}\right] . \quad (s)$$

Können die Grössen der dritten Ordnung vernachlässigt werden, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$z'' = \nu\left(\frac{O+N}{2}\right)y''^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

oder

$$\overset{\prime\prime}{y}{}^2 = \frac{2 z''}{\nu(O+N)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (u)$$

In diesem Falle wird daher die erzeugende Curve eine Parabel, deren Parameter $= \frac{2}{\nu(O+N)}$ ist. Da die Potenzen von z'' und $\overset{\prime\prime}{y}{}^2$ vernachlässigt sind, so kann jene Curve auch mit einem Kreise von gleichem Durchmesser verwechselt werden. Behält man die Grössen der dritten Ordnung bei, und haben die Coefficienten von $\overset{\prime\prime}{y}{}^2$ und $\overset{\prime\prime}{y}{}^4$ entgegengesetzte Zeichen, so geben die Gleichungen (o) und (p) den Halbmesser des in der Bildfläche enthaltenen Kreises, welcher dem Maximum oder Minimum von z'' entspricht,

$$\overset{\prime\prime}{y} = \frac{Vg}{\nu K^2}\sqrt{-\left(\frac{O+N}{12\,Q} + \frac{2}{3}K^2 R^2\right)} \quad \ldots \ldots \quad (v)$$

sodann den Halbmesser des Kreises, in welchem die Bildfläche eine durch ihren Scheitel gelegte und auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene durchschneidet,

$$\overset{\prime\prime}{y} = \frac{Vg}{\nu K^2}\sqrt{-\left(\frac{O+N}{6\,Q} + \frac{4}{3}K^2 R^2\right)} \quad \ldots \ldots \quad (w)$$

Die übrigen Schlüsse bleiben ungeändert.

84) Gehen wir jetzt zu dem zweiten in Nro. 82 erwähnten Falle über, wo nämlich $\frac{J}{g}$ einen so kleinen Werth erhält, dass es als eine Grösse von der Ordnung LR^2 zu betrachten ist.

In diesem Falle ist auch B von der Ordnung LR^2, und da A ungeändert von der Ordnung des Quadrates jener Grösse bleibt, so ist $\frac{A}{B}$ von derselben Ordnung wie B und kann daher gegen die letztere Grösse nicht vernachlässigt werden. Hiernach müssen wir den daselbst in (c) gefundenen Ausdruck von $\frac{1}{z}$ ungeändert beibehalten, nämlich

$$\frac{1}{z} = \frac{A+B^2}{JB} = \frac{B}{J} + \frac{A}{JB} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Das erste Glied $\frac{B}{J}$ ist bereits in dem vorhergehenden Falle entwickelt worden und macht den in (b) der vorhergehenden Nummer gefundenen Werth von $\frac{1}{z}$ aus. Das zweite Glied $\frac{A}{JB}$ erhält man sehr leicht durch Substitution der in Nro. 82 gegebenen Werthe von A und B. Ohne jedoch diese Substitution wirklich vorzunehmen, können wir aus (a) sogleich einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Zuerst ist es einleuchtend, dass man bei jeder gegebenen Einrichtung des Instrumentes, wobei mithin A, B und J gegebene Grössen sind, und für jeden Werth von φ, d. h. für jeden Punkt des

Gegenstandes einen entsprechenden Werth von $\frac{1}{z}$ finden kann, woraus folgt, dass jedem dieser Punkte ein Bild nach der gegebenen Definition zugehört und dass sich dasselbe an der durch die Abscisse z bestimmten Stelle befindet. Die Entfernung des Bildes kann aber nicht durch eine etwas abgeänderte Einrichtung des Instrumentes nach Belieben vergrössert werden, sie hat vielmehr sowohl für positive als für negative Werthe von z Grenzen, welche sie nicht überschreiten kann und die wir aufsuchen wollen.

Da $\frac{J}{g}$ der Voraussetzung nach in dem vorliegenden Falle stets von der Ordnung LR^2 seyn soll, so müssen die zulässigen Aenderungen in der Einrichtung des Instrumentes so beschaffen seyn, dass sie keinen grösseren Werth von $\frac{J}{g}$ hervorbringen, als jene Voraussetzung gestattet. Solche Veränderungen sind aber in den Formeln bereits berücksichtigt und es ist dadurch in B das von $D\frac{1}{g}$ abhängige Glied entstanden.

Die übrigen in dem Ausdrucke von $\frac{1}{z}$ enthaltenen Grössen dagegen können in dieser Beziehung als constant betrachtet werden, weil die erwähnten Veränderungen in ihnen nur solche Glieder hervorbringen, welche wir nach den angenommenen Grundsätzen nicht beibehalten. Sollen daher in der Einrichtung des Instrumentes alle nach der Voraussetzung mögliche Veränderungen vorgenommen werden können, so müssen wir in dieser Beziehung B, wegen des darin enthaltenen von $D\frac{1}{g}$ abhängigen Gliedes, als die einzige veränderliche Grösse in dem Ausdrucke von $\frac{1}{z}$ betrachten. Suchen wir mithin das Maximum oder Minimum von $\frac{1}{z}$ in Bezug auf B, so giebt die Gleichung (a)

$$\frac{d\frac{1}{z}}{dB} = \frac{1}{J}\left(1 - \frac{A}{B^2}\right) = 0$$

folglich

$$\left.\begin{array}{l} B = \pm\sqrt{A} \\ A = B^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Je nachdem man den einen oder den anderen dieser beiden Werthe in der allegirten Gleichung substituirt, erhält man

$$\frac{1}{z} = \pm\frac{2\sqrt{A}}{J} = \frac{2B}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Ferner ist

$$\frac{d^2\frac{1}{z}}{dB^2} = \frac{2A}{JB^3} = \pm\frac{2}{J\sqrt{A}}$$

Da nun $J = -\frac{v}{V^2}$ stets negativ ist, so gehört das obere Zeichen von $\sqrt{A}$ einem Maximum, das untere dagegen einem Minimum von $\frac{1}{z}$ zu, woraus folgt, dass die beiden Grenzen, über welche die positiven und negativen Entfernungen der Bilder nicht zunehmen können, durch die Formel bestimmt werden:

$$z = \pm \frac{J}{2\sqrt{A}} = \mp \frac{v}{2V^2\sqrt{A}} \quad \dots \dots \dots \quad (d)$$

Die Vergleichung des letzten in (c) erhaltenen Ausdruckes von $\frac{1}{z}$ mit demjenigen, welcher in (a) der vorhergehenden Nummer für den Fall gefunden wurde, dass die Grössen von der Ordnung LR^2 in Vergleichung mit $\frac{J}{g}$ als klein zu betrachten sind, zeigt, dass der grösst mögliche positive oder negative Werth, welchen z in dem gegenwärtigen Falle erhalten kann, nur halb so gross ist, als man ihn finden würde, wenn man ihn bei demselben Werthe von B nach der zuletzt allegirten Formel berechnete.

Innerhalb der durch die Gleichung (d) bestimmten Grenzen kann z alle mögliche positive und negative Werthe erhalten und selbst $= 0$ werden, welches letztere stattfindet, wenn B verschwindet, mithin

$$\frac{1}{g} + D\frac{1}{g} = -\frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) \\ + \varepsilon s\end{array}\right\} \quad \dots \quad (e)$$

wird. Wir müssen jedoch bemerken, dass bei kleinen Werthen von z Zweifel darüber entstehen können, ob die Formeln, auf welche die gegenwärtige Untersuchung gegründet ist, eine hinlängliche Genauigkeit geben. Jene Formeln sind nämlich unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g}$ oder $\frac{LR^2}{J}$ sey. Da nun im vorliegenden Falle $\frac{1}{g}$ eine solche Grösse ist, so muss $\frac{1}{z}$ von derselben Ordnung seyn, wenn die gemachte Voraussetzung richtig seyn soll, welches bei kleinen Werthen von z keineswegs stattfindet. Wir können uns indessen leicht überzeugen, dass wir wenigstens bis zu den Gliedern der zweiten Ordnung einschliesslich im Wesentlichen dieselben Resultate erhalten, wenn die Producte von $\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)$ in Grössen der zweiten Ordnung berücksichtigt und die Untersuchungen auf das letzte von dem Instrumente entworfene Bild bezogen werden. Bei dieser Annahme können wir die Formel (p) von Nro. 81 gebrauchen. Es ist aber aus (g) von Nro. 68 und (n) von Nro. 78 ersichtlich, dass dieselbe durch Absonderung der von z abhängigen Glieder unter die folgende Form gebracht werden kann:

$$\Theta = \frac{V^2 R^2 z^2}{2\nu^2}\left\{\begin{array}{l}\sum\left[C + JC'\left(\frac{z-g}{gz}\right)\right]^2 \\ + \left[B - \frac{J}{z} + JB'\left(\frac{z-g}{gz}\right)\right]^2\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (f)$$

$$= \frac{V^2 R^2}{2\nu^2}\left\{\begin{array}{l}\sum\left[\left(C + \frac{JC'}{g}\right)z - JC'\right]^2 \\ + \left[\left(B + \frac{JB'}{g}\right)z - J(1+B')\right]^2\end{array}\right\}$$

Hierbei sind C und B von der Ordnung LR^2; B kann jedoch wegen des darin enthaltenen Gliedes $\frac{J}{g}$ und der mit der Characteristik D bezeichneten Veränderungen bis zu 0 abnehmen; ferner sind C' und B' Grössen der zweiten Ordnung und Σ bezeichnet die Summe aller ähnlichen Glieder. Setzt man nun, um das Minimum von Θ zu erhalten,

$$\frac{d\Theta}{dz} = 0$$

so giebt diess die Gleichung

$$0 = \sum\left[\left(C + \frac{JC'}{g}\right)z - JC'\right]\left(C + \frac{JC'}{g}\right) + \left[\left(B + \frac{JB'}{g}\right)z - J(1+B')\right]\left(B + \frac{JB'}{g}\right)$$

mithin

$$\frac{1}{z} = \frac{\sum\left(C + \frac{JC'}{g}\right)^2 + \left(B + \frac{JB'}{g}\right)^2}{J\left[(1+B')\left(B + \frac{JB'}{g}\right) + \sum C'\left(C + \frac{JC'}{g}\right)\right]} \quad . \quad (g)$$

Da $\frac{J}{g}$ der Voraussetzung nach von der Ordnung LR^2 ist, die Producte solcher Grössen in andere Abweichungen aber nach den angenommenen Grundsätzen nicht beibehalten werden, so fallen die Glieder $\frac{JB'}{g}$ und $\frac{JC'}{g}$ gegen B und C weg, wofern nicht B einen so kleinen Werth erhält, dass es mit $\frac{JB'}{g}$ von einerlei Ordnung angenommen werden muss. Hierdurch wird der Zähler des vorhergehenden Ausdrucks von der Ordnung C^2; das niedrigste Glied des Nenners dagegen ist JB, woraus folgt, dass $\frac{1}{z}$ von der Ordnung $\frac{C}{J}$ ist. Da aber alle Glieder vernachlässigt werden, welche jene Ordnung übersteigen, so ist daraus ersichtlich, dass wir im Nenner nur das niedrigste Glied JB beibehalten können, wodurch sich der vorhergehende Ausdruck von $\frac{1}{z}$ in den folgenden verwandelt:

$$\frac{1}{z} = \frac{\Sigma C^2 + B^2}{JB} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

ΣC^2 bezeichnet die Summe der ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Glieder von A, die Formeln (a) und (h) stimmen daher in diesem Falle vollkommen mit einander überein.

Wird dagegen B so klein, dass es von derselben Ordnung wie $\frac{JB'}{g}$ angenommen werden muss, so reducirt sich der in (g) gefundene Ausdruck von $\frac{1}{z}$ auf den folgenden:

$$\frac{1}{z} = \frac{\Sigma C^2}{J\left[B + \frac{JB'}{g} + \Sigma C C'\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Welche Werthe auch die übrigen in dieser Formel enthaltenen Grössen haben mögen, so kann doch B jedenfalls einen solchen Werth bekommen, dass der Nenner verschwindet, wodurch $z = 0$ wird. Dieses geschieht daher, wenn

$$B + \frac{JB'}{g} + \Sigma C C' = 0$$

ist. Durch Substitution des in (d) von Nro. 82 gegebenen Werthes von B, mit alleiniger Berücksichtigung der ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Glieder, erhalten wir hieraus

$$\frac{1}{g} + D\frac{1}{g} = -\frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + \frac{JB'}{g} + \Sigma C C'\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (k)$$

Die Formel (k) fällt in Bezug auf die erste Zeile vollkommen mit (e) zusammen; nur sind die beiden letzten Glieder hinzugekommen, welche nach den angenommenen Grundsätzen als zur vierten Ordnung gehörig betrachtet werden.

Es lässt sich leicht einsehen, dass die vorhergehenden Resultate auch dann noch im Wesentlichen ungeändert bleiben, wenn man die hier vernachlässigten Glieder der dritten Ordnung berücksichtigt, und dass alsdann nur den in den Formeln enthaltenen Grössen die aus jenen resultirenden Glieder beigefügt werden müssen. Wir können daher aus allem diesem den Schluss machen, dass die Entfernung des Bildes, wenn sein Ort durch die absolute Deutlichkeit bestimmt wird, innerhalb der durch die Formel (d) angegebenen Grenzen alle mögliche positive und negative Werthe erhalten und selbst $= 0$ werden kann.

Dieses Resultat beweist, dass die Methode, welche wir angewandt haben, um den Ort des Bildes zu bestimmen, in dem gegenwärtigen Falle wenigstens alsdann unbrauchbar ist, wenn die danach berechnete Entfernung des Bildes sehr klein wird. Wir haben nämlich oben gesehen, dass die letztere in diesem Falle verschwindet, wenn $B = 0$ wird. Nach (a) der vorhergehenden Nummer wird aber hierdurch das dortige $\frac{1}{z}$ ebenfalls $= 0$. Da nun, wie wir daselbst gefunden haben, jene Grösse sehr nahe das arithmetische

Mittel aus denjenigen Werthen ist, welche den Durchschnittspunkten zweier Paare von Strahlen von mittlerer Brechbarkeit entsprechen, die in der Entfernung $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ von der Axe auf die erste brechende Fläche fallen, und für die einmal $\Psi = 0$ und $\Psi = \pi$, und dann $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \frac{3\pi}{2}$ ist, so folgt daraus, dass diese Strahlen beinahe parallel sind. Sie haben jedoch eine solche Lage, dass das eine Paar convergirt, das andere Paar dagegen divergirt, weil nur unter dieser Bedingung der mittlere Werth von $\frac{1}{z}$ verschwinden kann, und ebenso sind alle übrige Strahlen zum Theil convergirend, zum Theil divergirend. Hieraus ist ersichtlich, warum die Entfernung des Bildes in diesem Falle = 0 gefunden wird, wenn man als Ort desselben diejenige Stelle annimmt, wo die zu einerlei Strahlenbündel gehörigen Strahlen so nahe wie möglich bei einander liegen, so wie wir es oben vorausgesetzt haben. Auf der anderen Seite ist es leicht einzusehen, dass Strahlen, welche durch die letzte Brechung beinahe parallel geworden sind, in einer kleinen Entfernung von der letzten brechenden Fläche kein brauchbares Bild hervorbringen, indem sich alsdann die Bilder, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören, und wovon jedes einen merklichen Raum einnimmt, mit einander vermischen. Wir dürfen uns jedoch nur an die Erscheinungen bei der natürlichen Camera obscura erinnern, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass in manchen Fällen ein brauchbares Bild entstehen kann, wenn auch die vorhergehende Methode kein solches zu erkennen giebt. Obgleich dieser Fall eigentlich nicht hierher gehört, da bei demselben nicht von einem Bilde in dem Sinne, wie es hier genommen wird, sondern von der Stellung der Projectionsebene die Rede ist, so will ich ihn doch um desswillen betrachten, weil er zur Erläuterung des gegenwärtigen Falles beitragen kann.

Um jene Methode darauf anzuwenden, nehme ich an, dass in dem Laden eines verfinsterten Zimmers eine kreisförmige Oeffnung vom Halbmesser R angebracht ist, durch welche die von einem entfernten Gegenstande ausgehenden Lichtstrahlen auf eine Projectionsebene fallen. Unter dieser Voraussetzung kann die erwähnte Vorrichtung als ein Instrument der ersten Art betrachtet werden, bei welchem sich die brechenden Flächen berühren, eben sind und kein Brechungsvermögen besitzen. Hiernach ist für sämmtliche brechende Flächen

$$n_m = \nu_m = 1$$
$$\alpha_m = \beta_m = \gamma_m = 0$$
$$d_m = 0$$
$$c_m = g_m = c_1$$
$$V_m = 1$$
$$J = -1$$
$$\mathfrak{z} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{z}$$

Alle übrige Coefficienten, welche in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen vorkommen, sind vermöge der vorhergehenden Werthe = 0.

Wir erhalten daher aus (k) von Nro. 81

$$\Theta = \frac{z^2 R^2}{2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{z}{c_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Diese Formel ist für jeden Werth von z gültig, da bei der früheren Entwickelung nur die Producte von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ in Grössen von der Ordnung der Abweichungen vernachlässigt wurden, welche hier nicht vorhanden sind. Dagegen ist der Factor R^2 nur approximativ berechnet, weil wir die Formeln von Nro. 65, wodurch die Menge des auf ein Element der ersten brechenden Fläche fallenden Lichtes ausgedrückt wurde, bloss näherungsweise aufgelöst haben. Für den gegenwärtigen Zweck ist jedoch dieses gleichgültig, weil eine genauere Auflösung nur statt R^2 einen anderen von z unabhängigen Factor gegeben haben würde.

Da die Projectionsebene stets hinter der Oeffnung stehen muss, so sind alle mögliche Werthe von z verneint; verwechseln wir daher z mit $-z'$, so wird

$$\Theta = \frac{z'^2 R^2}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{z'}\right)^2 = \frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{z'}{c_1}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

wobei nunmehr nur positive Werthe von z' möglich sind.

Sucht man, um den Ort des Bildes zu bestimmen, denjenigen Werth von z', wobei Θ ein Minimum wird, so ist dieser

$$z' = -c_1$$

woraus folgt, dass das Bild mit dem Gegenstande zusammenfällt. Da die Projectionsebene nicht an die hierdurch bestimmte Stelle gebracht werden kann, so kommt es darauf an, unter allen möglichen Stellungen derselben diejenige auszusuchen, bei welcher die kleinste absolute Undeutlichkeit stattfindet. Aus dem zweiten der vorhergehenden Ausdrücke ist aber ersichtlich, dass unter allen positiven Werthen von z' keiner einen kleineren Werth von Θ hervorbringt, als

$$z' = 0$$

und dass Θ mit z' beständig zunimmt. Hieraus folgt also, dass die vortheilhafteste Stellung der Projectionsebene, wenn dieselbe nach der absoluten Deutlichkeit bestimmt wird, diejenige ist, wobei sich jene Ebene dicht hinter der Oeffnung befindet, durch welche das Licht in das verfinsterte Zimmer fällt. Es ist aber an sich klar und wird auch durch die Erfahrung bestätigt, dass an dieser Stelle kein brauchbares Bild entsteht, weil die Bilder von sämmtlichen Punkten des Gegenstandes gleiche Kreise sind, deren Mittelpunkte zusammenfallen und die sich daher vollkommen decken. Wird dagegen die Projectionsebene von der Oeffnung entfernt, so werden zwar die

Kreise und mit ihnen die absolute Undeutlichkeit grösser, ihre Mittelpunkte liegen aber nicht mehr in einem Punkte, sondern sie trennen sich desto mehr von einander, je weiter die Projectionsebene von der Oeffnung entfernt wird. Eine Folge dieser Absonderung ist, dass ein, wiewohl unvollkommenes Bild des Gegenstandes entsteht, welches, abgesehen von der Verminderung der Lichtstärke, bei grösserer Entfernung der Projectionsebene an Distinktheit gewinnt, wie es ebenfalls die Erfahrung bestätigt.

Die vorhergehende Betrachtung zeigt uns augenscheinlich, dass die Definition, welche wir oben von dem Bilde gegeben haben, darum mangelhaft ist, weil dabei auf die Absonderung der den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder keine Rücksicht genommen wurde; untersuchen wir daher, welchen Einfluss der letztere Umstand auf die Lage des Bildes äussert.

Relative Undeutlichkeit, Ort der Bilder, wenn sie nach derselben bestimmt werden.

85) Wir haben in Nro. 79 durch θ das arithmetische Mittel aus allen r^2 bezeichnet, welche den von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen zugehören und dieses arithmetische Mittel die absolute Undeutlichkeit genannt. Wäre nun nur ein leuchtender Punkt vorhanden, so würde sich diejenige Stelle des gebrochenen Strahlenbündels am meisten einem vollkommenen Bilde nähern, wo die Strahlen so nahe wie möglich bei einander liegen, mithin θ ein Minimum ist, so wie wir es in den vorhergehenden Nummern angenommen haben. Da aber der Gegenstand aus vielen leuchtenden Punkten bestehend gedacht werden kann, so kommt es, wie wir daselbst gesehen haben, nicht allein darauf an, dass die Bilder der verschiedenen Punkte desselben, abgesondert betrachtet, den kleinstmöglichen Raum einnehmen oder θ den kleinsten Werth erhält, sondern auch darauf, dass sich jene Bilder so viel als möglich von einander trennen. Bei einerlei Werth von θ geschieht aber das letztere desto mehr, je kleiner die Anzahl der leuchtenden Punkte ist, deren Bilder bei dem Bilde des Gegenstandes auf die Einheit des Flächenmaasses fallen, weil sie alsdann desto weiter aus einander liegen und folglich desto weniger in einander eingreifen. Bezeichnen wir daher die Anzahl jener Punkte mit $\mathfrak{S}$, so werden wir auf beide Umstände zugleich Rücksicht nehmen, wenn wir die Undeutlichkeit nicht θ, sondern dem Producte dieser Grösse in $\mathfrak{S}$ proportional setzen und als Ort des Bildes diejenige Stelle annehmen, wo jenes Product so klein als möglich wird.

Die auf diese Weise bestimmte Undeutlichkeit nenne ich die *relative Undeutlichkeit* und bezeichne sie durch θ'.

Hiernach ist folglich

$$\theta' = \mathfrak{S}\theta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Da Θ den früher entwickelten Werth behält, so bleibt nur noch übrig, $\mathfrak{C}$ zu berechnen. Wir haben in Nro. 65 mit $\mathfrak{B}$ die Anzahl der leuchtenden Punkte bezeichnet, welche bei dem Gegenstande in der Einheit des Flächenmaasses enthalten sind; der Voraussetzung nach sind aber die leuchtenden Punkte auf der Oberfläche desselben gleichförmig vertheilt, wir finden daher ihre Anzahl, wenn wir jene Oberfläche mit $\mathfrak{B}$ multipliciren. Nehmen wir, wie bisher, den Gegenstand als eine kreisförmige, auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene an, so ist ihr Halbmesser =

$$b_1 = c_1 \varphi$$

wobei φ auf die Grenze des Gesichtsfeldes bezogen werden muss. Demnach ist die Anzahl der leuchtenden Punkte, welche im Gegenstande enthalten sind =

$$\mathfrak{B}\pi b_1^2 = \mathfrak{B}\pi c_1^2 \varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Jedem dieser Punkte gehört in dem durch das Instrument hervorgebrachten Bilde des Gegenstandes ein entsprechendes Bild zu; die vorhergehende Formel drückt mithin auch die Anzahl der letzteren Bilder aus. Um folglich $\mathfrak{C}$ oder die Anzahl derjenigen unter ihnen zu finden, welche auf die Einheit des Flächenmaasses fallen, brauchen wir nur den vorhergehenden Ausdruck durch die Fläche des ganzen Bildes zu dividiren. Es muss jedoch dabei bemerkt werden, dass $\mathfrak{C}$ in (a) mit Θ multiplicirt ist, welche Grösse von der Ordnung des Quadrates der nicht aufgehobenen Abweichungen ist, daher es hinreicht, $\mathfrak{C}$ mit Vernachlässigung der Abweichungen und der Grösse $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ zu berechnen. Unter dieser Voraussetzung ist vermöge (i) von Nro. 81 der Halbmesser des von dem Instrumente entworfenen Bildes =

$$\overset{''}{y} = \frac{Vz\varphi}{\nu}$$

mithin seine Fläche =

$$\pi \overset{''}{y}{}^2 = \pi \left(\frac{Vz\varphi}{\nu}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Durch Division der in (b) und (c) gefundenen Werthe erhalten wir daher

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\, b_1^2}{\overset{''}{y}{}^2} = \mathfrak{B}\left(\frac{\nu c_1}{Vz}\right)^2$$

Da es bei der Methode der kleinsten Quadrate auf beständige Factoren nicht ankommt, so können wir die unbekannte Constante $\mathfrak{B} = 1$ setzen; hierdurch wird

$$\mathfrak{C} = \left(\frac{b_1}{\overset{''}{y}}\right)^2 = \left(\frac{\nu c_1}{Vz}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

und wenn wir diesen Werth in (a) substituiren,

$$\Theta' = \left(\frac{b_1}{\overset{''}{y}}\right)^2 \Theta = \left(\frac{\nu c_1}{Vz}\right)^2 \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

wodurch also die relative Undeutlichkeit ausgedrückt wird.

Der in (k) von Nro. 81 gefundene Ausdruck von Θ enthält den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{v}\right)^2$; der Werth von Θ' wird daher aus dem allegirten Werthe von Θ erhalten, wenn man jenen gemeinschaftlichen Factor mit c_1^2 verwechselt.

Bestimmen wir jetzt den Ort des Bildes, wenn derselbe nicht nach der absoluten, sondern nach der relativen Deutlichkeit bemessen wird.

Nach der in (b) von Nro. 82 angenommenen Bezeichnung ist

$$\Theta = \left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \frac{R^2}{2}\left[A + \left(B - \frac{J}{z}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \text{(f)}$$

folglich

$$\Theta' = \frac{R^2 c_1^2}{2}\left[A + \left(B - \frac{J}{z}\right)^2\right] \quad \ldots \ldots \text{(g)}$$

Das Bild ist unter der gegenwärtigen Voraussetzung diejenige Stelle des Strahlenbündels, wo die relative Undeutlichkeit Θ' so klein als möglich wird. Für das Minimum von Θ' in Bezug auf z ist aber

$$B - \frac{J}{z} = 0 \quad \ldots \ldots \text{(h)}$$

mithin

$$\frac{1}{z} = \frac{B}{J} \quad \ldots \ldots \text{(i)}$$

wodurch die Abscisse z des Bildes gegeben ist. Der auf diese Weise gefundene Werth von $\frac{1}{z}$ stimmt vollkommen mit demjenigen überein, welchen wir in (a) von Nro. 83 bei nicht beträchtlichen Werthen von g für den Fall erhalten haben, dass der Ort des Bildes nach der absoluten Deutlichkeit bestimmt wird. Die Resultate der allegirten Nummer gelten daher in dem gegenwärtigen Falle, wo der Ort des Bildes nach der relativen Deutlichkeit bemessen wird, allgemein, nicht nur bei wenig beträchtlichen, sondern bei allen Werthen von g. Ferner ist aus (b) derselben Nummer ersichtlich, dass es durch eine schickliche Bestimmung der in jener Formel enthaltenen Grössen möglich ist, der Entfernung des Bildes jeden beliebigen Werth zu geben, daher der in der vorhergehenden Nummer gefundene Nachtheil, wonach die Entfernung des Bildes bei kleinen Werthen von $\frac{J}{g}$ in gewisse Grenzen eingeschlossen ist und selbst verschwinden kann, im vorliegenden Falle nicht vorhanden ist.

Wenden wir jetzt die hier gebrauchte Methode auf die am Ende der vorhergehenden Nummer betrachteten Fälle an, wo die dortige Methode wegen der Vermischung der den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder unbrauchbare Resultate gab, so sehen wir zuerst aus (i), dass $\frac{1}{z}$ verschwindet, die Entfernung des Bildes mithin unendlich wird, wenn $B = 0$ ist, wodurch die Strahlen nach der letzten Brechung beinahe parallel werden.

Sodann giebt in Bezug auf die natürliche Camera obscura die Formel (e), wenn man darin statt Θ seinen Werth aus (m) der vorhergehenden Nummer substituirt und bemerkt, dass

$$\frac{V}{v} = 1$$

$$z' = -z$$

ist,

$$\Theta' = \frac{c_1^2 R^2}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{z'}\right)^2$$

woraus folgt, dass kein positiver Werth von z' einen kleineren Werth von Θ' geben kann, als

$$z' = \infty$$

und dass mithin das auf der Projectionsebene entstehende Bild nach der hier gegebenen Definition desto vollkommener wird, je weiter man die Projectionsebene von der Oeffnung entfernt, so wie es die Erfahrung bestätigt.

In beiden Fällen nimmt zwar die absolute Undeutlichkeit bei grösseren Werthen von z stets zu, dasselbe findet aber noch in stärkerem Maasse bei dem ganzen Bilde statt, wodurch sich die Bilder der verschiedenen Punkte verhältnissmässig mehr von einander absondern, als sie an Grösse zunehmen, so dass das ganze Bild an Distinktheit gewinnt. Dadurch wird also die Brauchbarkeit der zur Bestimmung der Lage des Bildes hier angewandten Methode in beiden Fällen einleuchtend.

Wir können übrigens noch die folgenden Betrachtungen anstellen, wonach die relative Undeutlichkeit auf andere Weise definirt werden kann.

Da nämlich b_1 die Ordinate von einem an der Grenze des Gesichtsfeldes liegenden Punkte des Gegenstandes, y'' dagegen die Ordinate des correspondirenden Punktes im Bilde bezeichnet, so drückt $\frac{y''}{b_1}$ die absolute Vergrösserung nach der in Nro. 64 gegebenen Definition aus, welche wir daselbst mit v' bezeichnet haben. Hierdurch verwandelt sich der in (e) gefundene Ausdruck von Θ' in den folgenden:

$$\Theta' = \frac{\Theta}{v'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

Die relative Undeutlichkeit wird daher auch erhalten, wenn man die absolute Undeutlichkeit durch das Quadrat der absoluten Vergrösserung dividirt. Wir hätten zwar Θ' nach der letzteren Formel berechnen und statt v' denjenigen Werth gebrauchen können, welchen wir bereits in (c) der allegirten Nummer gefunden haben; hierbei lag jedoch die Voraussetzung zu Grunde, dass keine Abweichungen vorhanden wären, das letzte Bild mithin in der Entfernung g_i von der letzten brechenden Fläche entstände, eine Voraussetzung, welche einen bedeutenden Fehler verursachen kann, wenn

die Entfernung des Bildes gross ist, so dass $(z-g)_1$ nicht als eine Grösse von derselben Ordnung wie $\Delta\frac{1}{g_1}$ zu betrachten ist. Es war daher nothwendig, den Werth von $\mathfrak{E}$ oder $\frac{1}{v'^2}$, so wie es oben geschehen ist, auf eine solche Weise zu berechnen, dass keine Glieder vernachlässigt werden, bei welchen dieses nach den angenommenen Grundsätzen nicht erlaubt ist.

Bringen wir ferner den in (e) gefundenen Ausdruck von Θ' unter die Form

$$\Theta' = b_1^2 \cdot \frac{\Theta}{y''^2}$$

so kann derselbe in die beiden Factoren b_1^2 und $\frac{\Theta}{y''^2}$ zerlegt werden. Setzen wir nun einen Gegenstand von gegebener Grösse voraus, so ist der erste Factor b_1^2 das Quadrat seines Halbmessers und kommt als eine Constante nicht weiter in Betracht. In Bezug auf den zweiten Factor müssen wir uns erinnern, dass Θ das arithmetische Mittel aus allen r'^2 bezeichnet, welche den von demselben leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen zugehören. Da nun y'' oder der Halbmesser des ganzen Bildes für alle diese Strahlen einerlei ist, so können wir $\frac{\Theta}{y''^2}$ auch als das auf dieselbe Weise wie Θ berechnete arithmetische Mittel aus allen $\left(\frac{r'}{y''}\right)^2$ ansehen. Hieraus folgt, dass die relative Undeutlichkeit bei unveränderter Grösse des Gegenstandes und mit Beiseitsetzung des beständigen Factors auch als das mit Rücksicht auf die Wirksamkeit der Strahlen berechnete arithmetische Mittel aus sämmtlichen, demselben leuchtenden Punkte zugehörigen r'^2 betrachtet werden kann, wenn die r' nicht in absolutem Maasse, sondern in aliquoten Theilen von dem Halbmesser des ganzen, durch das Instrument hervorgebrachten Bildes ausgedrückt werden. Vergleicht man nun mehrere Bilder desselben Gegenstandes mit einander und schätzt ihre Güte nach der relativen Deutlichkeit, so werden diejenigen Bilder als gleich gut angesehen, bei welchen Θ' einerlei ist, wenn sie auch in Ansehung ihrer Grösse verschieden sind. Eine Folge davon ist, dass alsdann die durch r' ausgedrückten absoluten Fehler nicht gleich sind, wie es bei einerlei Werth von Θ der Fall seyn würde, sondern dass jene Fehler jedesmal einen gleichen aliquoten Theil von der Grösse des ganzen Bildes ausmachen, was unter der Voraussetzung, dass man an beiden gleich viel erkennen will, um deswillen zulässig erscheint, weil ein in einem grösseren Maasstabe entworfenes Bild verhältnissmässig grössere Fehler gestattet als ein kleineres. Dagegen wird dasjenige Bild für besser geachtet, bei welchem Θ' einen kleineren Werth erhält, und an diesem Bilde lässt sich allerdings mehr vom Detail wahrnehmen, als bei den

übrigen, weil die Fehler im Verhältniss zu dem ganzen Bilde und seinen einzelnen Theilen kleiner sind und daher weniger von diesen unkenntlich machen.

Wir müssen jedoch hierbei bemerken, dass man in den meisten Fällen unbrauchbare Resultate erhalten würde, wenn man die Vollkommenheit des Bildes allein nach der relativen Deutlichkeit bemessen wollte, weil die absoluten Fehler desselben dem Auge nur dann erträglich werden, wenn sie eine gewisse Grenze nicht überschreiten, was bei jener Verfahrungsart, vorzüglich bei starken Vergrösserungen, leicht der Fall seyn könnte. Es erscheint daher nothwendig, in Bezug auf die Deutlichkeit des Bildes nicht nur die relative, sondern auch die absolute Deutlichkeit zu berücksichtigen, um es dahin zu bringen, dass die durch die Erfahrung zu bestimmenden Grenzen der zulässigen Undeutlichkeit nicht überschritten werden.

Undeutlichkeit nach den Winkelabweichungen geschätzt, Ort der hiernach bestimmten Bilder.

86) Es ist bereits in Nro. 79 bemerkt worden, dass der für Θ gefundene Ausdruck auch auf die Winkelabweichungen anwendbar ist, wenn man den gemeinschaftlichen Factor z^2 in demselben weglässt. Wir müssen uns ferner erinnern, was durch die Winkelabweichungen eigentlich ausgedrückt wurde. In dem Hauptstrahle, welcher Anfangs als Axe des dazu gehörigen Strahlenbündels angenommen worden war, hatten wir nämlich einen willkührlichen Punkt gewählt, dem die Abscisse z zugehört, und von diesem Punkte in Gedanken einen hypothetischen Strahl nach dem Auge gezogen. Wir hatten ferner durch den Hauptstrahl zwei coordinirte Ebenen gelegt und auf diese den Winkel projicirt, welchen der allgemeine farbige Strahl mit dem hypothetischen Strahle bildet; die so projicirten Winkel hatten wir sodann die Winkelabweichungen genannt. Da aber später der Hauptstrahl mit der Axe des Strahlenbundels verwechselt wurde, so liegt der der Abscisse z entsprechende Punkt nunmehr auf der letzteren Axe. Wird daher Θ auf die Winkelabweichungen bezogen, so drückt es die mit einer Constante multiplicirte Summe der Quadrate derjenigen Winkel aus, welche die verschiedenen zu dem Strahlenbündel gehörigen Strahlen mit den correspondirenden hypothetischen Strahlen machen. Bestimmen wir nun z so, dass Θ ein Minimum wird, so geben wir dadurch dem willkührlich angenommenen Vereinigungspunkte der hypothetischen Strahlen eine solche Lage, dass die Winkel derselben mit den wirklichen Strahlen so klein als möglich werden. Da aber diese Winkel diejenigen sind, unter welchen die Abweichungen dem Auge erscheinen, wenn es das letzte von dem Instrumente hervorgebrachte Bild betrachtet, so scheinen ihm in diesem Falle die wirklichen Strahlen so genau, als es wegen der Abweichungen möglich ist,

von dem durch die Abscisse z bestimmten Punkt in der Axe des Strahlenbündels auszugehen; wir können mithin diesen Punkt als das Bild ansehen, welches dem entsprechenden Punkte des Gegenstandes zugehört. Bestimmen wir daher den Ort desselben.

Nach dem oben Gesagten erhält man aus (b) von Nro. 82 denjenigen Werth von Θ, welcher den Winkelabweichungen entspricht, dadurch, dass man den gemeinschaftlichen Factor z^2 weglässt.

Diess giebt

$$\Theta = \frac{V^2 R^2}{2\nu^2}\left[A + \left(B - \frac{J}{z}\right)^2\right] \quad \text{(a)}$$

Sucht man das Minimum hiervon in Bezug auf z, so wird

$$\frac{1}{z} = \frac{B}{J} \quad \text{(b)}$$

woraus folgt, dass die in Nro. 83 erhaltenen Resultate auch allgemein gültig sind, wenn der Ort des Bildes nach den Winkelabweichungen bestimmt wird.

Wir können jedoch hierbei noch einige Bemerkungen machen, welche uns in der Folge nützlich seyn werden. Wir haben nämlich aus der Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z'} - \nu\left[\left(\frac{O+N}{2} + 4QK^2R^2\right)\left(\frac{y''}{z}\right)^2 + \frac{3\nu^2 QK^4}{V^2}\left(\frac{y''}{z}\right)^4\right]. \quad \text{(c)}$$

welche wir in (i) von Nro. 83 für die erzeugende Curve der Bildfläche gefunden haben, geschlossen, dass diese Fläche zum Theil diesseits, zum Theil jenseits einer durch ihren Scheitel gelegten, auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehenden Ebene liegt und dem Auge theils ihre convexe, theils ihre concave Seite zukehrt, wenn die Coefficienten von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ und $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ in der vorhergehenden Gleichung entgegengesetzte Zeichen haben. Diese Gestalt der Bildfläche bringt in dem Auge einen sehr unangenehmen Eindruck hervor, indem dadurch ein ähnliches Gefühl erregt wird, als wenn man die Gegenstände durch nicht geschliffene, wellenförmige Fensterscheiben betrachtet. So oft daher dieser Fall vorkommt, muss man zur Beseitigung des erwähnten Nachtheiles die Dimensionen des Instrumentes so bestimmen, dass der Coefficient von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ verschwindet, wenn der von $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ nicht $= 0$ werden kann.

Hierdurch erhält man die Gleichung

$$0 = \frac{O+N}{2} + 4QK^2R^2 \quad \text{(d)}$$

und die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche wird

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z'} - \frac{3\nu^3 QK^4}{V^2}\left(\frac{y''}{z}\right)^4 \quad \text{(e)}$$

so dass nunmehr jene Fläche in allen ihren Theilen dem Auge entweder nur ihre Convexität oder nur ihre Concavität zukehrt.

Kann dagegen der Coefficient von $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ in der Gleichung (c) verschwinden, so ist entweder

$$Q = 0$$

oder

$$K = 0$$

und die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z'} - \nu\left(\frac{O+N}{2}\right)\left(\frac{y''}{z}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

Diese Gleichung stimmt mit (k) von Nro. 83 überein; jene Curve wird daher, wie wir daselbst gesehen haben, ein Kegelschnitt und der erwähnte Nachtheil ist nicht vorhanden.

Der letztere Fall tritt bei allen Instrumenten ein, welche mit einem gewöhnlichen achromatischen Objective versehen sind, wofern die Hauptblendung an diesem angebracht ist. Vermöge (d) und (f) von Nro. 22 ist nämlich alsdann K, oder K_1 nach der dortigen Bezeichnung, eine Grösse von derselben Ordnung, wie die Entfernungen der zum Objective gehörigen brechenden Flächen von einander, welche in den Gliedern der dritten Ordnung = 0 gesetzt werden können. Bei jenen Instrumenten ist daher der angeführte Nachtheil nie zu besorgen.

Vergleichung der in Bezug auf die Undeutlichkeit und den Ort der Bilder erhaltenen Resultate.

87) Stellen wir jetzt die Resultate zusammen, welche wir in Bezug auf die Undeutlichkeit und den daraus abgeleiteten Ort der Bilder erhalten haben, so sind es die folgenden:

1) Die Undeutlichkeit kann zuerst nach der Summe der Quadrate der in absolutem Maasse ausgedrückten Entfernungen geschätzt werden, welche zwischen der Axe des Strahlenbündels und den verschiedenen dazu gehörigen Strahlen an derjenigen Stelle stattfinden, wo die Undeutlichkeit bestimmt werden soll. Die auf diese Weise bestimmte Undeutlichkeit haben wir die *absolute* genannt; sie ist durch die Formel (k) von Nro. 81 unmittelbar gegeben.

2) Dividirt man die absolute Undeutlichkeit durch das Quadrat der absoluten Vergrösserung, so entsteht das, was wir die *relative* Undeutlichkeit genannt haben. Bei unveränderter Grösse des Gegenstandes giebt sie das Resultat an, welches erhalten wird, wenn man die in 1) erwähnten Entfernungen nicht in absolutem Maasse, sondern in aliquoten Theilen von dem Halbmesser des ganzen durch das Instrument hervorgebrachten Bildes ausdrückt, im Uebrigen aber ebenso wie bei der absoluten Undeutlichkeit verfährt. Die Formel (k) von Nro. 81

ist auf die relative Undeutlichkeit ebenfalls anwendbar, wenn man darin den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{v}\right)^2$ mit c_1^2 verwechselt.

3) Untersucht man bei den Instrumenten der zweiten Art unmittelbar das nach der letzten Brechung entstehende Bild, welches von dem Auge betrachtet wird, und schätzt die Fehler nicht nach ihrer absoluten Grösse, sondern nach derjenigen, unter welcher sie dem Auge erscheinen, d. h. nach der Grösse der Winkelabweichungen, so drückt auch bei dieser Voraussetzung die Formel (k) von Nro. 81 die Undeutlichkeit aus, wenn man darin den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{v}\right)^2$ mit $\left(\frac{V}{v}\right)^2$ verwechselt.

4) Was das, einem Punkte des Gegenstandes entsprechende Bild betrifft, so kann statt desselben diejenige Stelle des dazu gehörigen Strahlenbündels genommen werden, wo die Undeutlichkeit, wenn sie nach einer der drei vorhergehenden Methoden geschätzt wird, so klein als möglich ist. Bei mässigen Entfernungen des Bildes geben jene Methoden in Bezug auf die Bestimmung der Lage desselben sämmtlich einerlei Resultate, welche in Nro. 83 entwickelt sind. Bei sehr grossen Entfernungen stimmen die Resultate der beiden letzten Methoden ebenfalls hiermit überein. Die erste Methode dagegen liefert ein abweichendes Resultat, welches die Nachtheile hat, dass die Entfernung des Bildes nicht nach Willkühr vergrössert werden kann, sondern in gewissen Grenzen eingeschlossen ist, dass ferner auf die Absonderung der den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entsprechenden Bilder keine Rücksicht genommen wurde, daher sich dieselben in diesem Falle mit einander confundiren. Hiernach verdienen die in Nro. 83 erhaltenen Bestimmungen in allen Fällen den Vorzug.

Undeutlichkeit und Ort der Bilder bei homogenem Lichte.

88) Die vorhergehenden Formeln sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass jeder in das Instrument fallende Lichtstrahl aus einer unzähligen Menge verschieden gefärbter Strahlen zusammengesetzt sey. Es kann jedoch die Frage entstehen, welche Aenderungen die erhaltenen Resultate erleiden würden, wenn man das einfallende Licht als homogen, d. h. von einerlei Brechbarkeit und Farbe annähme. Die Beantwortung dieser Frage ist um desswillen von Interesse, weil sie uns eine deutliche Einsicht von der Wirkung verschafft, welche die verschiedenen, von der Farbenzerstreuung abhängigen Glieder auf die Undeutlichkeit äussern. Wir könnten die dazu erforderlichen Formeln nach derselben Methode entwickeln, welche wir in den vorhergehenden Nummern angewandt haben; da jedoch hierdurch ziemlich weitläuftige Rechnungen veranlasst werden, so ist es einfacher, sich dabei einer anderen Methode zu bedienen.

Berechnen wir zu dem Ende zuerst die Formeln für die Axe des Strahlenbündels und für die absolute Undeutlichkeit unter der Voraussetzung, dass das sämmtliche einfallende Licht von mittlerer Brechbarkeit sey. Dieser Fall lässt sich aus dem oben betrachteten sehr leicht ableiten. Wir hatten nämlich angenommen, dass sich bei demjenigen Körper, welcher zur Vergleichung der übrigen diente, das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles von dem mittleren Brechungsverhältnisse ν nur durch das dem letzteren hinzugefügte Glied $\delta\nu$ unterschiede, und dass dadurch bei allen übrigen Körpern analoge Veränderungen im Brechungsverhältnisse entständen, welche als Functionen von $\delta\nu$ angesehen wurden.

Setzt man daher in den gefundenen Formeln

$$\delta\nu = 0$$

so führt man sie auf die Hypothese zurück, dass das sämmtliche einfallende Licht von mittlerer Brechbarkeit seyn soll. Vermöge (c) von Nro. 79 und (h) von Nro. 80 erhält man aber hieraus ferner

$$\begin{aligned} \delta_m &= \int \lambda \, \delta\nu^m \, d\delta\nu \\ &= 0^m \int \lambda \, d\delta\nu \\ &= 0^m \, \delta_0 \end{aligned}$$

folglich, da δ_0 die in einem einfallenden Strahle enthaltene Lichtmenge bezeichnet, mithin eine Constante ist,

$$\varepsilon = \eta = \theta = 0$$

welche Werthe in den Formeln von Nro. 81 substituirt werden müssen.

Da der Hauptstrahl schon bei den früheren Rechnungen von mittlerer Brechbarkeit angenommen wurde, mithin die Ordinate desselben $(\overset{''}{y})$ ungeändert bleibt, so geben die Formeln (d), (g) und (i) jener Nummer die Gleichungen für die Axe des Strahlenbündels, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \overset{''}{y} &= (\overset{''}{y}) + \frac{Vz}{\nu}\left[\frac{MR^2\varphi}{2} + Q(R^4K\varphi + 3R^2K^3\varphi^3)\right] \\ &= \frac{V_i z_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &1 + \frac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ &+ \left[\frac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1\right]\Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2\left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ &+ \frac{D V_i z_i}{V_i z_i} - \frac{\nu_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} \end{aligned}\right\}\varphi_1 \\ &+ \left[P_i + 3Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^3 \\ &+ Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{aligned}\right. \\ \overset{''}{x} &= 0 \end{aligned}\right\}(a)$$

Ferner erhalten wir aus (k) derselben Nummer die absolute Undeutlichkeit

$$\Theta = \left(\frac{V\mathfrak{z}}{\nu}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 6K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{R^4\varphi^2}{6}\left[M + 3QK(R^2 + 2K^2\varphi^2)\right]^2 \\ & + \frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2} + 2QK^2(R^2 + K^2\varphi^2)\right]^2 \\ & + Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8K^2\varphi^2}{10} + \frac{R^6K^4\varphi^4}{2} + \frac{R^4K^6\varphi^6}{3}\right] \\ & + \frac{R^2}{2}\left\{ \begin{aligned} & J\mathfrak{z} + \frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ & + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) \end{aligned} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Endlich ist vermöge (b) von Nro. 83 die Abscisse des Bildes durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{ \begin{aligned} & \frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ & + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; (c)$$

Diese Formeln beziehen sich nach der bisherigen Annahme auf Strahlen von mittlerer Brechbarkeit; da sich jedoch diese von anderen homogenen Lichtstrahlen bloss durch ein verändertes Brechungsverhältniss unterscheiden, so können jene Formeln auch unmittelbar auf jedes homogene Licht angewandt werden, wenn man nur die in denselben enthaltenen Brechungsverhältnisse so bestimmt, dass sie dem letzteren entsprechen. Um jedoch den Unterschied deutlich sehen zu können, welcher bei homogenem Lichte durch ein verändertes Brechungsverhältniss hervorgebracht wird, ist es vortheilhaft, die obigen Formeln bloss auf Licht von mittlerer Brechbarkeit zu beziehen, dagegen die Veränderungen zu berechnen, welche sie bei einem anderen homogenen Lichte erleiden. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als in denselben ν mit $\nu + \delta\nu$ zu verwechseln und bei allen übrigen Brechungsverhältnissen die analogen Veränderungen eintreten zu lassen. Die bei den übrigen Grössen dadurch entstehenden Veränderungen haben wir früher mit der Characteristik δ bezeichnet, welche Bezeichnung ich beibehalte. Ausserdem müssen wir bemerken, dass nach den angenommenen Grundsätzen jene Veränderungen in den von Q abhängigen Gliedern vernachlässigt werden, dass ferner L, M, N und O, obgleich ursprünglich von der zweiten Ordnung, durch die Wirkung des Objectivs auf kleine Grössen reducirt sind, deren Producte in $\delta\nu$ nicht berücksichtigt werden. dass endlich ein Gleiches bei $\mathfrak{z}$ stattfindet, weil diese sonst zur ersten Ordnung gehörige Grösse in der Nähe des Bildes von der dritten Ordnung ist. Da wir nun in den ursprünglich zur ersten Ordnung gezählten Grössen auch noch die von $\delta\nu^2$ abhängigen Glieder beibehalten haben, welche mit der Characteristik δ^2 bezeichnet werden,

so können wir uns leicht überzeugen, dass es hinreicht, in den vorhergehenden Formeln

$$\left.\begin{array}{l} (y'') \text{ mit } (y'') + \delta(y'') + \delta^2(y'') \\ \mathfrak{z} \text{ mit } \mathfrak{z} + \delta\mathfrak{z} + \delta^2\mathfrak{z} \\ \frac{1}{g} \text{ mit } \frac{1}{g} + \delta\frac{1}{g} + \delta^2\frac{1}{g} \\ L \text{ mit } L + \delta L \\ M \text{ mit } M + \delta M \\ N \text{ mit } N + \delta N \\ O \text{ mit } O + \delta O \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (d)$$

zu verwechseln. Entwickeln wir daher diese Grössen.

Nach der früher gemachten Annahme bezeichnet (y'') die Ordinate des Hauptstrahles oder diejenigen Glieder in dem Ausdrucke von y_i, welche von φ_1 allein abhängen. Dabei wurden jedoch die mit $\delta\nu$ multiplicirten Glieder weggelassen, weil wir den Hauptstrahl von mittlerer Brechbarkeit vorausgesetzt hatten, um in Θ alle Glieder zu vereinigen, welche auf die Undeutlichkeit Einfluss haben. Gegenwärtig aber, wo sämmtliche Strahlen von einerlei Brechbarkeit angenommen werden, müssen wir die letzteren Glieder in dem Ausdrucke von (y'') beibehalten, wo sie die oben mit $\delta(y'') + \delta^2(y'')$ bezeichneten Veränderungen bilden. Hiernach werden dieselben leicht aus (a) von Nro. 31 erhalten, wenn man darin nur die von φ_1 und $\delta\nu$ zugleich abhängigen Glieder berücksichtigt. Diess giebt

$$\delta(y'') + \delta^2(y'') = \frac{V_i z_i}{\nu_i}\left\{\begin{array}{l}\left[T_i - (u)_i\, \Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1\ \delta\nu \\ + t_i\ \varphi_1\ \delta\nu^2 + W_i\ \varphi_1^3\ \delta\nu\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (e)$$

oder nach der in (b) von Nro. 68 angenommenen Bezeichnung

$$\delta(y'') + \delta^2(y'') = \frac{Vz}{\nu}\left[T\varphi\,\delta\nu + t\varphi\,\delta\nu^2 + W\varphi^3\,\delta\nu\right] \quad . \quad (f)$$

Vermöge (d) von Nro. 78 ist ferner

$$\mathfrak{z} = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i + D\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right)_i$$

z_i bezeichnet aber die willkührliche Entfernung, für welche die Lage der Strahlen bestimmt werden soll, und ist mithin von $\delta\nu$ unabhängig; sodann werden in den mit der Characteristik D bezeichneten Grössen die durch $\delta\nu$ hervorgebrachten Veränderungen vernachlässigt; der vorhergehende Ausdruck von $\mathfrak{z}$ giebt daher

$$\delta\mathfrak{z} + \delta^2\mathfrak{z} = \delta\frac{1}{g_i} + \delta^2\frac{1}{g_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Nach der in Nro. 26 gemachten Zusammenstellung ist

$$\delta\frac{1}{g_i} = -\frac{V_i^2}{\nu_i}\,S_i\ \delta\nu$$

$$\delta^2\frac{1}{g_i} = -\frac{V_i^2}{\nu_i}\,s_i\ \delta\nu^2$$

Bei diesen Formeln ist jedoch die nachher eingeführte Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes noch nicht berücksichtigt. Vermöge (i) von Nro. 30 kommt hierdurch zu S_i noch das Glied

$$\mathfrak{D} S_i = 2\,(S)_e\, \Delta \frac{1}{c_1} = -\,2\,T_e\, \Delta \frac{1}{c_1}$$

Setzt man es S_i zu, substituirt sodann die Werthe von $\delta \frac{1}{g_i}$ und $\delta^2 \frac{1}{g_i}$ in (g), so wird

$$\delta \mathfrak{z} + \delta^2 \mathfrak{z} = \delta \frac{1}{g_i} + \delta^2 \frac{1}{g_i} = -\,\frac{V_i^2}{v_i}\left[\left(S_i + 2\,(S)_e\, \Delta \frac{1}{c_1}\right) \delta v + s_i\, \delta v^2\right]. \text{(h)}$$

oder nach der Bezeichnung von Nro. 68

$$\delta \mathfrak{z} + \delta^2 \mathfrak{z} = \delta \frac{1}{g} + \delta^2 \frac{1}{g} = \frac{1}{J}\,[S\, \delta v + s\, \delta v^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

Bei der Berechnung der von der Abweichung wegen der Gestalt und der Farbenzerstreuung zugleich abhängigen Glieder, wozu die mit δL etc. multiplicirten gehören, sind wir in Nro. 19 von der Voraussetzung ausgegangen, dass alle Glieder vernachlässigt werden, welche den Ocularen angehören, und überdiess noch diejenigen, die sich auf das Objectiv beziehen und ursprünglich mit $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{f}$ multiplicirt waren; wir müssen daher jetzt nach demselben Grundsatze verfahren. Hiernach sind die Formeln (b) von Nro. 11 anwendbar.

Sie geben

$$\begin{aligned} M^{(m)} &= 2\,K_1\, L^{(m)} \\ N^{(m)} &= K_1^2\, L^{(m)} \\ O^{(m)} &= 3\,K_1^2\, L^{(m)} \end{aligned}$$

Da die von den Ocularen herrührenden Glieder vernachlässigt werden, so braucht man die Summen jener Grössen nur bis zur letzten Fläche des Objectivs auszudehnen, deren Index früher mit e bezeichnet wurde. Diess giebt

$$\begin{aligned} L_i &= L_e \\ M_i &= 2\,K_1\, L_e \\ N_i &= K_1^2\, L_e \\ O_i &= 3\,K_1^2\, L_e \end{aligned}$$

Bemerken wir ferner, dass L_e durch die Wirkung des Objectivs auf eine kleine Grösse reducirt ist, deren Product in δv vernachlässigt wird, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta L_i &= \delta L_e \\ \delta M_i &= 2\,K_1\, \delta L_e \\ \delta N_i &= K_1^2\, \delta L_e \\ \delta O_i &= 3\,K_1^2\, \delta L_e \end{aligned}$$

Den Werth von δL_e findet man aus (f) von Nro. 19, wenn man darin i mit e verwechselt. Hierdurch wird

$$\left.\begin{aligned} \delta L_i &= U_e\,\delta\nu \\ \delta M_i &= 2K_1\,U_e\,\delta\nu \\ \delta N_i &= K_1^2\,U_e\,\delta\nu \\ \delta O_i &= 3K_1^2\,U_e\,\delta\nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{k})$$

Bezeichnen wir nun durch

$\delta y''$, $\delta\, tg\,\omega''$ und $\delta\frac{1}{z}$ die Aenderungen welche y'', $tg\,\omega''$ und $\frac{1}{z}$ bei homogenem Lichte erleiden, wenn das Brechungsverhältniss des zur Vergleichung dienenden Körpers um $\delta\nu$ zunimmt,

so ist vermöge (a)

$$\delta y'' = \delta(y'') + \delta^2(y'') + \frac{V z\,R^2\,\varphi}{\nu}\,\frac{\delta M}{2}$$

folglich, wenn man die vorhergehenden Werthe substituirt,

$$\left.\begin{aligned} \delta y'' &= \frac{V_i\,z_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\left[T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1\,\delta\nu + t_i\,\varphi_1\,\delta\nu^2 \\ &+ W_i\,\varphi_1^3\,\delta\nu + U_e\,K_1\,R^2\,\varphi_1\,\delta\nu \end{aligned}\right. \\ &= \frac{V z\,\varphi\,\delta\nu}{\nu}\left[T + t\,\delta\nu + W\varphi^2 + U K R^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{l})$$

Da $tg\,\omega''$ der Coefficient von z in dem Ausdrucke von y'' ist, so erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned} \delta\, tg\,\omega'' &= \frac{V_i}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\left[T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1\,\delta\nu + t_i\,\varphi_1\,\delta\nu^2 \\ &+ W_i\,\varphi_1^3\,\delta\nu + U_e\,K_1\,R^2\,\varphi_1\,\delta\nu \end{aligned}\right. \\ &= \frac{V\varphi\,\delta\nu}{\nu}\left[T + t\,\delta\nu + W\varphi^2 + U K R^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{m})$$

Ferner giebt die Gleichung (c)

$$\delta\frac{1}{z} = \delta\frac{1}{g} + \delta^2\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left[\frac{2}{3}R^2\,\delta L + \frac{\varphi^2}{2}(\delta O + \delta N)\right]$$

welcher Ausdruck sich durch Substitution der vorhergehenden Werthe in den folgenden verwandelt:

$$\left.\begin{aligned} \delta\frac{1}{z} &= -\frac{V_i^2}{\nu_i}\left\{\begin{aligned} &\left(S_i - 2T_e\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)\delta\nu + s_i\,\delta\nu^2 \\ &+ \left(\frac{2}{3}R^2 + 2K_1^2\,\varphi_1^2\right)U_e\,\delta\nu \end{aligned}\right. \\ &= \frac{\delta\nu}{J}\left[S + s\,\delta\nu + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\varphi^2\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{n})$$

Endlich erhalten wir aus (b) vermittelst der in (d) angegebenen Verwechselungen denjenigen Werth von Θ, welcher bei homogenem Lichte dem Brechungsverhältnisse $(\nu + \delta\nu)$ entspricht, nämlich

$$\Theta = \left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 6K^2\varphi^2\right) + U\delta\nu\right]^2 \\ & + \frac{R^4\varphi^2}{6}\left[M + 3QK(R^2 + 2K^2\varphi^2) + 2UK\delta\nu\right]^2 \\ & + \frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2} + 2QK^2(R^2 + K^2\varphi^2) + UK^2\delta\nu\right]^2 \\ & + Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8K^2\varphi^2}{10} + \frac{R^6K^4\varphi^4}{2} + \frac{R^4K^6\varphi^6}{3}\right] \\ & + \frac{R^2}{2}\left\{ \begin{aligned} & J_{\mathfrak{z}} + \frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ & + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4R^2K^2\varphi^2 + 3K^4\varphi^4\right) \\ & + \left[S + s\delta\nu + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\varphi^2\right)\right]\delta\nu \end{aligned} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad . \text{(o)}$$

Bedeutung der verschiedenen Glieder, welche in dem Ausdrucke der Undeutlichkeit vorkommen.

89) Nachdem wir in den vorhergehenden Nummern die Formeln entwickelt haben, welche sowohl bei gewöhnlichem, als bei homogenem Lichte die Undeutlichkeit und den Ort der Bilder bestimmen, können wir die Bedeutung der verschiedenen Glieder des Ausdruckes aufsuchen, der in (k) von Nro. 81 für die Undeutlichkeit gefunden wurde.

Wir haben in Nro. 68 gesehen, dass die bedeutendsten Glieder, welche in den Ausdrücken (d) der Seitenabweichungen vorkommen und sich auf die Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung in und ausser der Axe beziehen, diejenigen sind, die von L, M, N, O, S und T abhängen, dass dagegen die mit Q, s, U, t und W multiplicirten Glieder kleine Correctionen enthalten, welche an den ersteren angebracht werden müssen, um die Grössen der dritten Ordnung zu berücksichtigen. Vergleicht man nun jene Ausdrücke der Seitenabweichungen mit dem von Θ, so sieht man, dass in dem letzteren analoge Glieder mit quadratischen Factoren vorkommen, welche sich im Wesentlichen auf eine der Abweichungen besonders beziehen, und aus den Coefficienten der correspondirenden Glieder der Seitenabweichungen durch Combinationen und Anbringung von Correctionen abgeleitet werden.

Hiernach beziehen sich die Glieder

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 6K^2\varphi^2\right)\right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe,

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^4\varphi^2}{6}\left[M + 3QK(R^2 + 2K^2\varphi^2)\right]^2 \\ & + \frac{R^2\varphi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2} + 2QK^2(R^2 + K^2\varphi^2)\right]^2 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \quad \text{(b)}$$

auf die Abweichung wegen der Gestalt ausser der Axe,

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+{}_\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+2K^2\varphi^2\right)\right]^2 \ldots \quad (c)$$

auf die Farbenzerstreuung in der Axe,

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \varepsilon\varphi^2\left[T+{}_\eta t+W\varphi^2+UKR^2\right]^2 \ldots\ldots \quad (d)$$

auf den farbigen Rand.

Diese Glieder sind die bedeutendsten, da sie von den Grössen der zweiten Ordnung abhängen, an denen nur Correctionen vermittelst der Grössen der dritten Ordnung angebracht sind. Dazu kommen ferner die folgenden Glieder der dritten Ordnung:

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\varphi^2}{10}+\frac{R^6K^4\varphi^4}{2}+\frac{R^4K^6\varphi^6}{3}\right]. \quad (e)$$

welche Correctionen enthalten, die von den Abweichungen wegen der Gestalt in und ausser der Axe herrühren,

$$\left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \left\{\begin{array}{l}\frac{\theta s^2 R^2}{2}+\theta t^2\varphi^2 \\ +\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{2}{3}R^4K^2\varphi^2+\frac{R^2K^4\varphi^4}{2}\right]\end{array}\right\} \ldots \quad (f)$$

wodurch Correctionen ausgedrückt werden, die sich auf die Farbenzerstreuung beziehen und aus denjenigen Grössen der dritten Ordnung entstehen, welche den Einfluss des Quadrates von δv und der Abweichung wegen der Gestalt auf die Farbenzerstreuung bestimmen.

Das letzte Glied

$$\left(\frac{Vz}{2}\right)^2 \frac{R^2}{2}\left\{\begin{array}{l}J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ +Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\varphi^2+3K^4\varphi^4\right)+\varepsilon s\end{array}\right\}^2 \ldots \quad (g)$$

endlich hängt von den in $\mathfrak{z}$ enthaltenen, mit der Characteristik D bezeichneten Veränderungen im Instrumente und Auge ab.

Obgleich nach dieser Auseinandersetzung die Bedeutung der verschiedenen Glieder in dem Ausdrucke von Θ keinem Zweifel unterliegt, so wird es doch nicht am unrechten Orte seyn, noch einige Bemerkungen hinzuzufügen, wozu die in den vorhergehenden Nummern gefundenen Resultate Veranlassung geben, da uns dieselben in den Stand setzen, zu einer genaueren Kenntniss in dieser Sache zu gelangen.

Zuerst zeigt uns die Formel (n) der vorhergehenden Nummer, dass die Entfernung z des Bildes nicht ungeändert bleibt, wenn man von demjenigen homogenen Lichte, welchem das Brechungsver-

hältniss ν entspricht, zu einem anderen übergeht, bei dem sich ν in $(\nu+\delta\nu)$ verwandelt; vielmehr nimmt in dem letzteren Falle $\frac{1}{z}$ um

$$\delta\frac{1}{z}=\frac{\delta\nu}{J}\left[S+s\delta\nu+U\left(\frac{2}{3}R^2+2K^2\varphi^2\right)\right]\ .\ .\ .\ (h)$$

zu.

Setzen wir einstweilen voraus, dass die Farbenzerstreuung keine andere Wirkung hervorbringt, als diejenige, welche wir so eben betrachtet haben, so liegen bei dieser Annahme zwar die Bilder der verschiedenen farbigen Strahlen in verschiedenen Entfernungen, ihre Mittelpunkte aber sämmtlich in der Axe des Strahlenbündels, weil die in (a) der vorhergehenden Nummer erhaltene Gleichung dieser Axe keine Abänderung erleidet, mithin für alle farbige Strahlen einerlei ist.

Befindet sich daher in der Nähe der Bilder eine Projectionsfläche, worunter bei den Instrumenten der zweiten Art auch die Netzhaut des Auges begriffen wird, so fallen auf derselben die Mittelpunkte der Bilder von allen farbigen Strahlen in denjenigen Punkt, wo die Axe des Strahlenbündels die Projectionsfläche durchschneidet, weil, wie wir in Nro. 81 gesehen haben, jene Axe die Eigenschaft hat, dass die sämmtlichen Strahlen zusammengenommen näher bei ihr liegen, als bei jeder anderen Linie, mithin ihr Durchschnitt mit der Projectionsfläche als der Mittelpunkt des Bildes betrachtet werden kann.

Hierdurch compensiren sich die verschiedenen in den Bildern enthaltenen Farben zum Theil; vollständig ist jedoch dieses nicht der Fall, weil jene Bilder nicht vollkommen gleich sind und das Licht in ihnen auf verschiedene Weise vertheilt ist. Eine Folge davon ist also, dass das aus den sämmtlichen farbigen Bildern zusammengesetzte Bild nur schwach gefärbt, aber wegen der Abweichungen nicht vollkommen deutlich erscheint. Diese Schlüsse behalten ihre Gültigkeit, welche Lage auch der leuchtende Punkt hat, von dem das Bild entworfen wird; nur hängen die Resultate in so fern von jener Lage ab, als die Undeutlichkeit eine Function von φ ist, mithin für die verschiedenen Punkte des Gegenstandes nicht einerlei Grösse hat.

Zu einem ähnlichen Resultate gelangt man, wenn man bei den Instrumenten der zweiten Art das letzte von ihnen entworfene Bild unmittelbar untersucht. Da nämlich, wie wir in Nro. 81 gesehen haben, die Axe des Strahlenbündels diejenige Linie ist, welche von dem Mittelpunkte des Bildes nach dem Auge gezogen werden kann, da ferner diese Linie bei der gemachten Voraussetzung für alle farbige Strahlen einerlei Lage hat, so befinden sich in diesem Falle die Mittelpunkte der sämmtlichen farbigen Bilder in einer durch das Auge gezogenen geraden Linie und decken sich daher wechselseitig, vom Auge aus gesehen. In Bezug auf die Bilder selbst findet aber ein Gleiches nur in so fern nicht statt, als diese wegen der Abweichungen nicht die dazu erforderliche Grösse und Gestalt haben.

Der mittlere im Auge hervorgebrachte Eindruck ist daher mit dem eines mittleren, schwach gefärbten und nicht vollkommen deutlichen Bildes einerlei.

Soll nun die hierdurch veranlasste Undeutlichkeit wegfallen, so kann diess nur geschehen, wenn das Instrument eine solche Einrichtung erhält, dass $\delta\frac{1}{z}$ verschwindet, woraus vermöge (h) die Gleichung folgt:

$$0 = S + s\,\delta\nu + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\varphi^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

Wären in dem gewöhnlichen Lichte nur zweierlei Gattungen von homogenem Lichte vorhanden, denen die Brechungsverhältnisse ν und $(\nu + \delta\nu)$ entsprechen, so hätte $\delta\nu$ einen bestimmten Werth und der vorhergehenden Gleichung könnte vollkommen Genüge geleistet werden. Das gewöhnliche Licht besteht aber aus unzähligen Gattungen von homogenem Lichte, die sich dadurch von einander unterscheiden, dass für jede derselben $\delta\nu$ einen anderen Werth erhält. Die Gleichung (i) kann daher nicht für alle Gattungen von Licht zugleich erfüllt werden, man muss vielmehr statt $\delta\nu$ einen gewissen mittleren Werth nehmen, um ihr im Mittel so gut als möglich Genüge zu leisten. Die Methode der kleinsten Quadrate lässt uns dadurch zu diesem Zwecke gelangen, dass sie in dem oben allegirten Ausdrucke von Θ das Glied (c) nebst der dazu gehörigen, in (f) enthaltenen Correction einführt. In dem inclavirten Factor des ersten Gliedes ist S die einzige Grösse, welche bedeutende Werthe erhalten kann, indem die übrigen zur dritten Ordnung gehören. Soll daher Θ in Bezug auf jene Glieder so klein als möglich werden, so muss man S einen solchen Werth beilegen, dass es von derselben Ordnung wie jene Grösse wird und das entgegengesetzte Zeichen erhält, um sie, so viel es geschehen kann, aufzuheben. Innerhalb der engen Grenzen, welchen hiernach die Veränderungen von S unterworfen sind, kann man aber sehr nahe die übrigen Grössen als constant betrachten, und unter dieser Voraussetzung erhält man für das Minimum von Θ in Bezug auf S die Gleichung:

$$0 = S + \eta s + U\left(\frac{2}{3}R^2 + 2K^2\varphi^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

welche weiter nichts ist, als die Gleichung (i), in der $\delta\nu$ statt seines veränderlichen Werthes den mittleren Werth η erhalten hat.

Das Glied (c) mit der dazu gehörigen Correction drückt daher aus, dass die Bilder, welche den verschiedenen farbigen Strahlen entsprechen, so viel es geschehen kann, einerlei Entfernung erhalten, wenn jene Glieder so klein als möglich werden.

Die oben gemachte Voraussetzung, dass die Farbenzerstreuung keine andere Wirkung, als die bereits betrachtete, habe, findet jedoch in der Natur keineswegs statt. Wir haben nämlich in (l)

der vorhergehenden Nummer gefunden, dass ausser der Aenderung, welche die Abscisse des Bildes durch die verschiedene Brechbarkeit der farbigen Strahlen erleidet, hierdurch auch eine analoge Aenderung in der Ordinate eines beliebigen, in der Axe des Strahlenbündels liegenden Punktes hervorgebracht wird, welche durch den Ausdruck

$$\delta y'' = \frac{Vz\varphi\,\delta\nu}{\nu}\left[T + t\,\delta\nu + W\varphi^2 + UKR^2\right] \quad . \;\; . \;\; . \quad (l)$$

gegeben ist.

Werden jetzt die Strahlen durch eine Projectionsfläche aufgefangen, so fallen die Mittelpunkte der verschiedenen farbigen Bilder nicht mehr in einem Punkte zusammen, wie es bei der obigen Voraussetzung der Fall seyn würde, sondern sie liegen neben einander und ihre Entfernung von demjenigen, welchem das Brechungsverhältniss ν entspricht, wird durch die Formel (l) ausgedrückt. Hieraus folgt daher, dass die farbigen Bilder selbst ebenfalls neben einander liegen, wegen ihrer bemerkbaren Grösse aber in einander theilweise eingreifen, so dass von ihnen zusammengenommen ein längliches Bild entsteht, welches an den beiden Enden verschieden gefärbt ist, im Innern aber durch allmählige Abstufungen von der einen jener Farben zu der anderen übergeht, ungefähr so, wie es bei dem Spectrum der Fall ist, nur mit dem Unterschiede, dass die Farben wegen des Ineinandergreifens der einzelnen farbigen Bilder nicht die reinen Farben des Spectrums sind, sondern aus Mischungen derselben bestehen.

Es lässt sich leicht einsehen, dass wir auch hier zu demselben Resultate gelangen, wenn wir bei den Instrumenten der zweiten Art das letzte von denselben entworfene Bild unmittelbar untersuchen. Wir haben nämlich in Nro. 81 gesehen, dass der Mittelpunkt jenes Bildes von dem Auge nach einer Linie gesehen wird, welche mit der Axe des Instrumentes den Winkel ω'' bildet. Vermöge (m) der vorhergehenden Nummer nimmt aber die Tangente dieses Winkels um die Grösse

$$\delta\, tg\, \omega'' = \frac{V\varphi\,\delta\nu}{\nu}\left[T + t\,\delta\nu + W\varphi^2 + UKR^2\right] \quad . \;\; . \;\; . \quad (m)$$

zu, wenn sich das Brechungsverhältniss ν um $\delta\nu$ verändert. Hieraus folgt also, dass die verschiedenen farbigen Bilder nicht nach derselben Richtung von dem Auge gesehen werden, sondern nach Richtungen, welche die vorhergehende Gleichung bestimmt, wenn man darin statt $\delta\nu$ den jeder Farbentinte entsprechenden Werth nimmt. Jene Bilder werden daher neben einander zu liegen scheinen und zusammengenommen im Auge denselben Eindruck hervorbringen, welchen ein längliches, an beiden Enden verschieden gefärbtes Bild verursachen würde.

Besteht der Gegenstand aus einer gleichförmig gefärbten und erleuchteten Ebene, so bringt die hier betrachtete Abweichung im

Inneren keine bemerkbare Färbung hervor, weil das Bild eines jeden Punktes in die Bilder der benachbarten Punkte eingreift und hierdurch eine Mischung und Compensation der Farben entsteht. An den Rändern des Gegenstandes aber ragen die farbigen Bilder der letzten Punkte vor den übrigen theilweise hervor, ohne von folgenden Bildern vollständig compensirt zu werden. Es entstehen daher farbige Ränder an dem Gegenstande.

Da die Ordinate x'' bei allen farbigen Bildern $= 0$ ist, so zeigen sich die farbigen Ränder stets an denjenigen Seiten des Gegenstandes, welche dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes zu- und von ihm abgekehrt sind. Auf welcher Seite aber jedes der einzelnen farbigen Bilder liegt und welche Färbung durch die Vermischung derselben entsteht, hängt von dem Zeichen und der Grösse der in den Formeln (l) und (m) enthaltenen Coefficienten ab. Ausserdem ist aus diesen Formeln ersichtlich, dass der farbige Rand eine Function von φ ist, welche mit dieser Grösse zugleich verschwindet und ihr sehr nahe proportional ist, wofern nicht T so klein wird, dass es als eine Grösse der dritten Ordnung zu betrachten ist. Hiernach fällt der farbige Rand in der Mitte des Gesichtsfeldes weg und nimmt von da nach dem Rande desselben beständig zu.

Wir können jetzt in Bezug auf den farbigen Rand ähnliche Betrachtungen wie bei der Farbenzerstreuung in der Axe anstellen. Wären nämlich nur zweierlei Gattungen von homogenem Lichte vorhanden, welchen die Brechungsverhältnisse ν und $(\nu + \delta\nu)$ entsprechen, so würde der farbige Rand wegfallen, wenn $\delta y''$ oder $\delta\, tg\, \omega''$ verschwände, wodurch die Gleichung entstände:

$$0 = T + t\delta\nu + W\varphi^2 + UKR^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Wegen der unzähligen Menge der farbigen Strahlen kann aber auch diese Gleichung nicht für sie alle zugleich erfüllt werden, daher statt $\delta\nu$ ein gewisser mittlerer Werth genommen werden muss. Zu diesem Ende wurde durch die Methode der kleinsten Quadrate in dem Ausdrucke der Undeutlichkeit, das Glied (d) nebst der dazu gehörigen in (f) enthaltenen Correction eingeführt. Sie geben, wenn man bei ihnen ebenso verfährt wie bei (c), sehr nahe die Gleichung

$$0 = T + \eta t + W\varphi^2 + UKR^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

welche aus der Gleichung (n) entsteht, wenn man darin $\delta\nu$ mit η verwechselt. Wird daher jene Gleichung erfüllt, so ist der farbige Rand für diejenige Gattung von farbigen Strahlen vollkommen gehoben, bei denen

$$\delta\nu = \eta$$

ist. Bei allen übrigen Strahlen dagegen findet dieses nur näherungsweise und so gut es bei ihnen zusammengenommen im Mittel geschehen kann statt. Hiernach drückt also das Glied (d) mit der dazu gehörigen Correction aus, dass die verschiedenen farbigen Bilder,

welche einem und demselben leuchtenden Punkte zugehören, so nahe wie möglich bei einer durch das Auge gezogenen geraden Linie, der Axe des Strahlenbündels, liegen, wenn jene Glieder einen möglichst kleinen Werth erhalten.

Ich gehe jetzt zu der Abweichung wegen der Gestalt über, auf welche sich die Glieder (a), (b) und (e) beziehen.

Die Vergleichung dieser Glieder mit (b) und (o) der vorhergehenden Nummer zeigt, dass dieselben eigentlich nur für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit gültig sind und dass für andere farbige Strahlen in den inclavirten Factoren der drei ersten Glieder kleine Correctionen hinzukommen, welche mit $U\delta\nu$ multiplicirt sind. Da nun $\delta\nu$ für jede Farbentinte einen besonderen Werth erhält, so ist es nicht möglich, die willkührlichen Grössen so zu bestimmen, dass jene Glieder für alle Gattungen von farbigen Strahlen so klein als möglich werden. Diess kann vielmehr, ebenso wie in den vorhergehenden Fällen, nur für einen gewissen mittleren Werth von $\delta\nu$ geschehen. Die Methode der kleinsten Quadrate thut dieses, indem sie in den erwähnten Gliedern $\delta\nu = 0$ setzt, dem Ausdrucke von Θ dagegen das von U abhängige Glied in (f) hinzufügt. Dieses giebt daher den Einfluss an, den die Abweichung wegen der Gestalt und die Farbenzerstreuung auf einander ausüben, wie oben bereits erwähnt wurde.

Es bleibt endlich noch übrig, das letzte Glied (g) in dem Ausdrucke von Θ zu betrachten. Wir haben in den vorhergehenden Nummern gesehen, dass dieses Glied dazu dient, diejenige Stelle des Strahlenbündels zu finden, wo die Undeutlichkeit so klein als möglich wird und welche wir als das Bild des leuchtenden Punktes angenommen haben.

Werden nun die Strahlen von einer Projectionsfläche aufgefangen, so ist ihre Entfernung z nach demjenigen, was wir in Nro. 78 angeführt haben, als unveränderlich zu betrachten, indem etwa stattfindende kleine Verschiebungen derselben in der mit $\mathfrak{z}$ bezeichneten Grösse begriffen wurden.

Untersucht man dagegen bei den Instrumenten der zweiten Art das letzte von ihnen entworfene Bild unmittelbar mit Rücksicht auf die Winkelabweichungen, so fällt in (g) der gemeinschaftliche Factor z^2 weg.

In beiden Fällen wird daher Θ in Bezug auf das in (g) angegebene Glied ein Minimum, wenn die in $\mathfrak{z}$ enthaltenen willkührlichen Veränderungen so bestimmt werden, dass der inclavirte Factor desselben verschwindet, wodurch man die Gleichung erhält:

$$\left.\begin{aligned} 0 = J\mathfrak{z} + \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 4 R^2 K^2 \varphi^2 + 3 K^4 \varphi^4\right) + \varepsilon s \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (p)$$

Hieraus folgt ferner, wenn man statt $\mathfrak{z}$ seinen Werth aus (d) von Nro. 78 substituirt und die in (d) von Nro. 82 eingeführte Bezeichnung gebraucht,

$$\frac{1}{z} + D\frac{1}{z} = \frac{B}{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

Je nachdem die Lage der Strahlen auf eine Projectionsfläche bezogen oder bei den Instrumenten der zweiten Art das letzte Bild unmittelbar untersucht wird, zeigt die Gleichung (q), verglichen mit (a) von Nro. 83, dass, zur Erhaltung der grösstmöglichen Deutlichkeit, das nach den Formeln dieser Nummer bestimmte Bild durch die im Instrumente vorzunehmenden Veränderungen an diejenige Stelle gebracht werden muss, wo sich entweder die Projectionsfläche nach einer zur genauen Einstellung etwa erforderlichen Verschiebung derselben befindet, oder wo das letzte von dem Instrumente entworfene Bild, dessen Entfernung als gegeben betrachtet wird, liegen soll. In beiden Fällen verschwindet das in (g) angegebene Glied und braucht daher in dem Ausdrucke von Θ nicht weiter berücksichtigt zu werden.

Achtes Kapitel.

Undeutlichkeit in dem Bilde des ganzen Gegenstandes.

Von der in dem vorhergehenden Kapitel betrachteten Undeutlichkeit in dem Bilde eines einzelnen Punktes können wir nunmehr zu der Undeutlichkeit übergehen, welche in dem Bilde des ganzen Gegenstandes stattfindet. Die Untersuchung hierüber wird uns später in den Stand setzen, die Mittel anzugeben, wodurch jenes Bild so vollkommen als möglich gemacht werden kann. Vorher ist es jedoch nothwendig, auf einige Nebenumstände Rücksicht zu nehmen, welche hierbei in Betracht kommen, und die Formeln so auszudrücken, dass sie in allen Fällen mit Leichtigkeit angewendet werden können.

Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes.

90) Der Ausdruck von Θ kann dazu gebraucht werden, diejenigen Grössen, welche bei der Construction des Instrumentes der Willkühr überlassen bleiben, so zu bestimmen, dass das Bild, welches von dem den Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 zugehörigen Punkte entworfen wird, die grösstmögliche Deutlichkeit bekommt. Da jedoch jener Ausdruck die Grösse φ enthält, so sind die dadurch gefundenen Werthe der willkührlichen Grössen ebenfalls von φ abhängig und gelten daher nur für die dem angenommenen Werthe von φ entsprechenden Punkte des Gegenstandes. Das Instrument soll jedoch bei unveränderter Einrichtung nicht bloss für eine beschränkte Anzahl von Punkten, sondern für das ganze Gesichtsfeld gebraucht werden. Hiernach wird also diejenige Einrichtung desselben die beste seyn, bei welcher die Summe der Quadrate der Fehler nicht für einen bestimmten Punkt, sondern für sämmtliche Punkte des Gegenstandes so klein als möglich wird. Suchen wir daher diese Summe.

Der durch den Ausdruck (k) von Nro. 81 gegebene Werth von Θ enthält die Summe der Quadrate der Fehler für alle Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten Punkte des Gegenstandes ausgehen, dividirt durch die Anzahl dieser Strahlen und mit Rücksicht auf ihre verschiedene Wirksamkeit. Bei der anfänglichen Entwickelung war zwar zur

Erleichterung der Rechnung die Lage der Coordinatenaxen so angenommen worden, dass die Ebene der yz durch jenen Punkt gieng; durch die spätere Rechnung ist aber Θ von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig geworden, so wie es in der Natur der Sache liegt, da hier die Abweichungen der Strahlen nicht nach Richtungen bestimmt werden, welche mit gewissen Coordinatenaxen parallel laufen, sondern nach der jedesmaligen Richtung des Radius vector, der zwischen den Durchschnittspunkten des allgemeinen Strahles und der Axe des Strahlenbündels gezogen, mithin von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig ist. Hieraus folgt also, dass Θ für alle Punkte des Gegenstandes einerlei ist, bei welchen φ denselben Werth hat, ohne Rücksicht darauf, welche Lage dieselben gegen die Anfangs gewählten Coordinatenaxen haben.

Denken wir uns den Gegenstand, wie bisher, als eine kreisförmige Ebene, welche senkrecht auf der Axe des Instrumentes steht und gleichförmig mit leuchtenden Punkten übersäet ist, so ist der Abstand eines dieser Punkte von der Axe nach (k) von Nro. 4 =

$$b_1 = c_1 \varphi$$

Da nun c_1 oder die Abscisse des leuchtenden Punktes bei derselben Lage des Gegenstandes unveränderlich ist, so ist φ für alle Punkte einerlei, welche gleich weit von der Axe entfernt sind. Beschreibt man daher mit dem Halbmesser b_1 einen Kreis, so hat in allen Punkten seines Umfanges φ und folglich auch Θ denselben Werth.

Nennen wir, wie in Nro. 65, $\mathfrak{B}$ die Anzahl von leuchtenden Punkten, die in der Einheit des Flächenmaasses enthalten sind, so ist die Anzahl derjenigen, welche in dem unendlich schmalen Ringe des Gegenstandes $2\pi b_1\, db_1$ liegen =

$$= \mathfrak{B} \cdot 2\pi b_1\, db_1 = \mathfrak{B}\, c_1^2 \pi \cdot 2\varphi\, d\varphi = \mathfrak{B}\, c_1^2 \pi\, d \cdot \varphi^2$$

Jedem dieser Punkte gehört ein Θ zu; folglich ist die jenem Ringe zugehörige Summe der Θ

$$= \mathfrak{B}\, c_1^2 \pi\, \Theta\, d \cdot \varphi^2$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $\varphi = 0$ bis zu demjenigen Werthe, welcher der Grenze des Gesichtsfeldes entspricht, so erhält man die Summe der Θ für den ganzen Gegenstand. Wird daher diese Summe mit $r^{\text{IV}\,2}$ bezeichnet, so ist

$$r^{\text{IV}\,2} = \mathfrak{B}\, c_1^2 \pi \int_0^{\varphi} \Theta\, d \cdot \varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

worin φ nach der Integration den der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechenden Werth, d. h. die Tangente des halben Gesichtsfeldes bezeichnet.

Statt der Grösse $r^{\text{IV}\,2}$ können wir jedoch eine andere einführen, welche von dem unbekannten Factor $\mathfrak{B}$ unabhängig ist, ebenso wie es oben in Bezug auf $\mathfrak{A}$ geschehen ist. Dividiren wir nämlich $r^{\text{IV}\,2}$ durch die Anzahl der in dem Gegenstande enthaltenen leuchtenden

Punkte d. h. durch $\mathfrak{B}\, c_1^2\, \pi\, \varphi^2$, so erhalten wir das arithmetische Mittel aus den verschiedenen Werthen von Θ, welche den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes zugehören. Dieses arithmetische Mittel hat jedoch noch eine andere Bedeutung, welche wir aufsuchen wollen.

Zuerst müssen wir uns erinnern, dass Θ die Summe der Quadrate der r'^2 für die zu einem Strahlenbündel gehörigen Strahlen, dividirt durch die Anzahl derselben, bezeichnet. Vermöge (l) von Nro. 79 ist aber diese Anzahl =

$$= \mathfrak{A}\, R^2 . 2\pi\, \delta_0$$

Ferner ist aus (e) jener Nummer ersichtlich, dass der äusserste Werth von R, welcher in dem vorhergehenden Ausdrucke unter R verstanden wird, von φ unabhängig, mithin der Divisor von Θ bei der in der Formel (a) angedeuteten Integration als eine Constante zu betrachten ist.

Dividiren wir daher noch $r^{\mathrm{IV}2}$ durch die Anzahl der Strahlenbündel oder der in dem Gegenstande enthaltenen leuchtenden Punkte, so ist jene Grösse zuerst durch die Anzahl der zu einem Strahlenbündel gehörigen Strahlen und dann durch die Anzahl der Strahlenbündel, mithin durch die Anzahl sämmtlicher Strahlen dividirt worden, welche von allen Punkten des Gegenstandes in das Instrument fallen; $r^{\mathrm{IV}2}$ enthält aber im Zähler die Summe der r'^2 für dieselben Strahlen. Der durch die Division erhaltene Quotient ist daher das arithmetische Mittel aus den r'^2, welche den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes zugehören, mit Rücksicht auf die verschiedene Wirksamkeit der Strahlen. Dieses arithmetische Mittel soll, um es von demjenigen zu unterscheiden, welches mit Θ bezeichnet wurde und sich nur auf einen einzigen Punkt des Gegenstandes bezog, die *mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes* genannt und durch Π bezeichnet werden.

Hiernach erhalten wir die letztere Grösse aus dem in (a) gefundenen Ausdrucke von $r^{\mathrm{IV}2}$, wenn wir denselben durch $\mathfrak{B}\, c_1^2\, \pi\, \varphi^2$ dividiren. Diess giebt

$$\Pi = \frac{\int_0^\Phi \Theta\, d.\varphi^2}{\varphi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Der allegirte Ausdruck von Θ zeigt, dass darin nur gerade Potenzen von φ vorkommen. Denken wir uns daher die darin enthaltenen Quadrate entwickelt, so besteht jener Ausdruck aus lauter Gliedern von der Form

$$A\, \varphi^{2m}$$

Vermöge (b) folgt aber aus jedem dieser Glieder das correspondirende Glied von Π, nämlich

$$\frac{A \int_0^\Phi \varphi^{2m}\, d.\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{A\, \varphi^{2m}}{m+1}$$

Um daher von Θ auf Π überzugehen, ist weiter nichts erforderlich, als in ersterer Grösse, wenn sie in Bezug auf φ in einfache Glieder entwickelt ist, welche jedesmal nur eine Potenz von φ enthalten, alle Potenzen φ^{2m} durch $(m+1)$ zu dividiren.

Um jedoch dem Ausdrucke von Π eine ähnliche Gestalt zu geben, wie es hinsichtlich des Ausdruckes von Θ geschehen ist, ohne nöthig zu haben, nochmals analoge Reductionen vorzunehmen, ist es zweckmässig, zu untersuchen, welche Aenderungen in dem reducirten Ausdrucke von Θ vorgenommen werden müssen, um daraus einen ähnlichen für Π zu erhalten. Ausser den Gliedern, welche in Bezug auf φ entwickelt sind, enthält die Formel (k) von Nro. 81 nur Grössen von einer der nachstehenden Formen:

$$(A+B\varphi^2)^2$$
$$\varphi^2(A+B\varphi^2)^2$$
$$\varphi^4(A+B\varphi^2)^2$$
$$(A+B\varphi^2+C\varphi^4)^2$$

Entwickeln wir die Quadrate, dividiren die Potenzen von φ durch die angegebenen Grössen und verwandeln die so erhaltenen Ausdrücke nach der oben gebrauchten Methode in vollständige Quadrate, so entsteht

aus $(A+B\varphi^2)^2$

$$A^2+2AB\frac{\varphi^2}{2}+B^2\frac{\varphi^4}{3}=\left(A+\frac{B\varphi^2}{2}\right)^2+\frac{B^2\varphi^4}{12},$$

aus $\varphi^2(A+B\varphi^2)^2$

$$\frac{A^2\varphi^2}{2}+\frac{2AB\varphi^4}{3}+\frac{B^2\varphi^6}{4}=\frac{\varphi^2}{2}\left(A+\frac{2B\varphi^2}{3}\right)^2+\frac{B^2\varphi^6}{36},$$

aus $\varphi^4(A+B\varphi^2)^2$

$$\frac{A^2\varphi^4}{3}+\frac{2AB\varphi^6}{4}+\frac{B^2\varphi^8}{5}=\frac{\varphi^4}{3}\left(A+\frac{3B\varphi^2}{4}\right)^2+\frac{B^2\varphi^8}{80},$$

aus $(A+B\varphi^2+C\varphi^4)^2$

$$A^2+2A\frac{B\varphi^2}{2}+2A\frac{C\varphi^4}{3}+\frac{B^2\varphi^4}{3}+\frac{2BC\varphi^6}{4}+\frac{C^2\varphi^8}{5}=$$
$$=\left(A+\frac{B\varphi^2}{2}+\frac{C\varphi^4}{3}\right)^2+\frac{\varphi^4}{3}\left(\frac{B+C\varphi^2}{2}\right)^2+\frac{C^2\varphi^8}{180}.$$

Hierdurch verwandeln sich die nachstehenden Glieder des inclavirten Factors von Θ in die folgenden:

$$\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+6K^2\varphi^2\right)\right]^2 \text{ in}$$
$$\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+3K^2\varphi^2\right)\right]^2+\frac{Q^2R^6K^4\varphi^4}{12},$$
$$\frac{R^4\varphi^2}{6}[M+3QK(R^2+2K^2\varphi^2]^2 \text{ in}$$
$$\frac{R^4\varphi^2}{12}[M+QK(3R^2+4K^2\varphi^2)]^2+\frac{Q^2R^4K^6\varphi^6}{6},$$

$$\frac{R^2\phi^4}{2}\left[\frac{O-N}{2}+2QK^2(R^2+K^2\phi^2)\right]^2 \text{ in}$$

$$\frac{R^2\phi^4}{6}\left[\frac{O-N}{2}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2+\frac{Q^2R^2K^8\phi^8}{40},$$

$$\frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+2K^2\phi^2\right)\right]^2 \text{ in}$$

$$\frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+K^2\phi^2\right)\right]^2+\frac{\varepsilon U^2R^2K^4\phi^4}{6},$$

$$\varepsilon\phi^2[T+\eta t+W\phi^2+UKR^2]^2 \text{ in}$$

$$\frac{\varepsilon\phi^2}{2}\left[T+\eta t+\frac{2}{3}W\phi^2+UKR^2\right]^2+\frac{\varepsilon W^2\phi^6}{36},$$

$$Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\phi^2}{10}+\frac{R^6K^4\phi^4}{2}+\frac{R^4K^6\phi^6}{3}\right] \text{ in}$$

$$Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\phi^2}{20}+\frac{R^6K^4\phi^4}{6}+\frac{R^4K^6\phi^6}{12}\right].$$

$\frac{\theta R^2 s^2}{2}$ bleibt ungeändert. Ferner verwandeln sich

$$\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{2}{3}R^4K^2\phi^2+\frac{R^2K^4\phi^4}{2}\right] \text{ in}$$

$$\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{R^4K^2\phi^2}{3}+\frac{R^2K^4\phi^4}{6}\right],$$

$$\theta\phi^2t^2 \text{ in } \frac{\theta\phi^2t^2}{2},$$

$$\frac{R^2}{2}\left\{\begin{matrix}J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{2}\right)\phi^2\\+Q\left(\frac{R^4}{2}+4R^2K^2\phi^2+3K^4\phi^4\right)+\varepsilon s\end{matrix}\right\}^2 \text{ in}$$

$$\frac{R^2}{2}\left\{\begin{matrix}J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{4}\right)\phi^2\\+Q^2\left(\frac{R^4}{2}+2R^2K^2\phi^2+K^4\phi^4\right)+\varepsilon s\end{matrix}\right\}^2+$$

$$+\frac{R^2\phi^4}{6}\left[\frac{O+N}{4}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2+\frac{Q^2R^2K^8\phi^8}{40}.$$

Vereinigt man die mit Q^2 multiplicirten Glieder, so ist ihre Summe =

$$Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\phi^2}{20}+\frac{R^6K^4\phi^4}{4}+\frac{R^4K^6\phi^6}{4}+\frac{R^2K^8\phi^8}{20}\right].$$

Ferner ist die Summe der mit U^2 multiplicirten Glieder =

$$\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{R^4K^2\phi^2}{3}+\frac{R^2K^4\phi^4}{3}\right].$$

Endlich können die von O und N abhängigen Glieder unter eine einfachere Gestalt gebracht werden; es ist nämlich, wie man sich durch die Entwickelung der Quadrate leicht überzeugen kann,

$$\frac{R^2\phi^4}{6}\left[\frac{O-N}{2}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2+$$
$$+\frac{R^2\phi^4}{6}\left[\frac{O+N}{4}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2=$$
$$=\frac{R^2\phi^4}{3}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{3O-N}{8}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2\\+\left(\frac{O-3N}{8}\right)^2\end{array}\right.$$

Die vorhergehenden Werthe zusammengenommen geben den folgenden Ausdruck für die mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes:

$$\Pi=\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2\left\{\begin{array}{l}\frac{R^6}{36}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+6K^2\phi^2\right)\right]^2\\+\frac{R^4\phi^2}{12}\left[M+QK(3R^2+4K^2\phi^2)\right]^2\\+\frac{R^2\phi^4}{3}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{3O-N}{8}+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\phi^2\right)\right]^2\\+\left(\frac{O-3N}{8}\right)^2\end{array}\right.\\+\frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+K^2\phi^2\right)\right]^2\\+\frac{\varepsilon\phi^2}{2}\left[T+\eta t+\frac{2}{3}W\phi^2+UKR^2\right]^2\\+Q^2\left[\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\phi^2}{20}+\frac{R^6K^4\phi^4}{4}+\frac{R^4K^6\phi^6}{4}+\frac{R^2K^8\phi^8}{20}\right]\\+\frac{\theta s^2R^2}{2}\\+\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{R^4K^2\phi^2}{3}+\frac{R^2K^4\phi^4}{3}\right]\\+\frac{\theta t^2\phi^2}{2}+\frac{\varepsilon W^2\phi^6}{36}\\+\frac{R^2}{2}\left\{\begin{array}{l}J\mathfrak{z}+\frac{2}{3}LR^2+\left(\frac{O+N}{4}\right)\phi^2\\+Q\left(\frac{R^4}{2}+2R^2K^2\phi^2+K^4\phi^4\right)+\varepsilon s\end{array}\right\}^2\end{array}\right\}\quad\text{(c)}$$

Bei dieser Formel gelten dieselben Bemerkungen, welche wir oben in Bezug auf den Ausdruck von Θ gemacht haben und deren Resultate in Nro. 87 zusammengestellt worden sind. Da nämlich die Aenderung, welche Θ in den verschiedenen Fällen erleidet, bloss in der Verwechselung des gemeinschaftlichen Factors $\left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2$ mit einem anderen, ebenfalls von ϕ unabhängigen Factor besteht, so hat diese Aenderung auf die Integration nach ϕ, durch welche man von Θ auf Π übergeht, keinen Einfluss und die letztere Grösse hat jedesmal denselben gemeinschaftlichen Factor, welcher bei der ersteren angenommen wird.

Hiernach bezieht sich die Formel (c) unmittelbar auf die absolute Undeutlichkeit und es muss der gemeinschaftliche Factor $\left(\frac{Vz}{v}\right)^2$ mit c_1^2 oder $\left(\frac{V}{v}\right)^2$ verwechselt werden, je nachdem die relative oder die nach den Winkelabweichungen geschätzte Undeutlichkeit dabei zu Grund gelegt werden soll.

Mittlerer Ort des Bildes.

91) Wir haben in Nro. 85 und 86 gesehen, dass man zur Bestimmung des Ortes der Bilder, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören, entweder die relative Undeutlichkeit oder diejenige gebrauchen muss, wobei die Fehler nach den Winkelabweichungen geschätzt werden. Aus den in Nro. 83 enthaltenen Resultaten dieser Bestimmung ist aber ersichtlich, dass die hierdurch gefundene Entfernung des Bildes von φ abhängt, mithin für die verschiedenen Punkte des Gegenstandes nicht einerlei ist. Suchen wir daher den mittleren Werth von $\frac{1}{z}$ in Bezug auf jene Entfernungen.

Wir erhalten denselben sehr leicht aus (b) von Nro. 83, wenn wir damit ebenso verfahren, wie es in der vorhergehenden Nummer geschehen ist, um von Θ auf Π überzugehen, d. h. wenn wir φ^2 durch 2 und φ^4 durch 3 dividiren. Diess giebt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{matrix} \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{4}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 2R^2K^2\varphi^2 + K^4\varphi^4\right) + \varepsilon s \end{matrix}\right\} . \quad \text{(a)}$$

In der Formel (a) drückt $\frac{1}{z}$ das arithmetische Mittel aus allen Werthen dieser Grösse aus, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören.

Man gelangt übrigens zu demselben Resultate, wenn man in (c) der vorhergehenden Nummer zuerst den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{Vz}{v}\right)^2$ in c_1^2 verwandelt, um die Formel auf die relative Deutlichkeit zu beziehen, dann statt $\mathfrak{z}$ seinen Werth

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} - \frac{1}{z}$$

aus (d) von Nro. 78 substituirt und endlich das Minimum von Π in Bezug auf z sucht, so wie in Nro. 85 mit Θ' verfahren wurde. Hieraus folgt also, dass man den in (a) gefundenen Werth von $\frac{1}{z}$ auch erhält, wenn man die Entfernung des Bildes für einen Strahlenbündel sucht, bei welchem Θ' das arithmetische Mittel aus sämmtlichen, den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entsprechenden Werthen dieser Grösse ist. Den durch die Formel (a) gegebenen Werth von z werde ich die *mittlere Entfernung des Bildes* nennen.

Vergleichen wir jetzt den Werth von $\frac{1}{z}$ mit dem von $\frac{1}{z_{\prime\prime\prime}}$, welchen wir in (d) von Nro. 83 gefunden haben. Bei dem letzteren bezog sich φ auf einen beliebigen Punkt des Gegenstandes, statt dass es bei dem ersteren denjenigen Werth bezeichnet, welcher der Grenze des Gesichtsfeldes zugehört. Verwechseln wir daher in dem Ausdrucke von $\frac{1}{z_{\prime\prime\prime}}$ zur Unterscheidung beider Werthe φ mit φ', so giebt die allegirte Formel

$$\frac{1}{z_{\prime\prime\prime}} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{2}\right)\varphi'^2 \\ + Q\left(\frac{4}{9}R^4 + 4R^2K^2\varphi'^2 + 3K^4\varphi'^4\right)\end{array}\right.$$

Setzt man hierin

$$\varphi' = \varphi\sqrt{\frac{1}{2}}$$

so wird

$$\frac{1}{z_{\prime\prime\prime}} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{3}LR^2 + \left(\frac{O+N}{4}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{4}{9}R^4 + 2R^2K^2\varphi^2 + \frac{3}{4}K^4\varphi^4\right)\end{array}\right\} \quad . \text{(b)}$$

Der Unterschied zwischen den in (a) und (b) gefundenen Grössen ist

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z_{\prime\prime\prime}} = \frac{1}{J}\left[Q\left(\frac{R^4}{18} + \frac{K^4\varphi^4}{4}\right) + \varepsilon s\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(c)}$$

Die drei in dieser Formel enthaltenen Glieder sind kleine Grössen der dritten Ordnung, von denen sich die beiden ersten auf die Abweichung wegen der Gestalt in und ausser der Axe, die letzte dagegen auf die Farbenzerstreuung beziehen.

Nehmen wir daher einen Punkt des Gegenstandes, für welchen

$$\varphi' = \varphi\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist, bestimmen wir sodann die Durchschnittspunkte zweier von jenem Punkte ausgehenden Paare von Strahlen von mittlerer Brechbarkeit, welche in der Entfernung

$$R' = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

von der Axe auf die erste brechende Fläche fallen, und für die einmal

$$\Psi = 0 \text{ und } \Psi = \pi$$

und dann

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \text{ und } \Psi = \frac{3\pi}{2}$$

ist, so ist das arithmetische Mittel aus den Werthen von $\frac{1}{z}$, welche den erwähnten Durchschnittspunkten zugehören, sehr nahe derjenige Werth, welcher der mittleren Entfernung des Bildes entspricht.

Bedeutung der verschiedenen Glieder, welche in dem Ausdrucke der mittleren Undeutlichkeit vorkommen.

92) Die Glieder, welche in dem Ausdrucke von Θ vorkommen, haben, wie in Nro. 89 gezeigt wurde, besondere Bedeutungen. Da nun durch die Methode, vermittelst welcher wir von Θ zu Π übergegangen sind, jene Glieder im Wesentlichen beibehalten wurden und nur Modificationen erlitten, um statt des Werthes, welcher sich auf einen bestimmten Punkt des Gegenstandes bezog, ihren mittleren Werth zu erhalten, so ist es leicht, die Bedeutung der in dem Ausdrucke von Π enthaltenen Glieder auf ähnliche Weise anzugeben, wie es in Bezug auf den Ausdruck von Θ geschehen ist.

Hiernach sind die bedeutendsten Glieder diejenigen, welche die zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen L, M, N, O, S und T enthalten, und von denen sich

das erste, von L abhängige, auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe,

die drei folgenden, M, N und O enthaltenden, auf die Abweichung wegen der Gestalt ausser der Axe,

das vierte, von S abhängige, auf die Farbenzerstreuung in der Axe,

das fünfte, T enthaltende, auf den farbigen Rand beziehen.

Ferner kommen in dem Ausdrucke von Π die kleinen zur dritten Ordnung gehörigen Correctionen vor, welche mit Q^2, s^2, t^2, U^2 und W^2 multiplicirt sind, und deren erste von der Abweichung wegen der Gestalt, die übrigen von der Farbenzerstreuung herrühren.

Das letzte Glied endlich hängt von den in $\mathfrak{z}$ enthaltenen, mit der Characteristik D bezeichneten Veränderungen im Instrumente und Auge ab. Diese Veränderungen sind uns zwar nicht mit der zur Rechnung erforderlichen Genauigkeit bekannt; die folgende Betrachtung zeigt aber, dass demungeachtet $\mathfrak{z}$ für die in der Ausübung vorkommenden Fälle durch bekannte Grössen ausgedrückt werden kann.

Die Instrumente werden nämlich, ebenso wie das Auge, bei dem jedesmaligen Gebrauche so gestellt, dass man die grösstmögliche Deutlichkeit erhält; es ist daher anzunehmen, dass hierbei $\mathfrak{z}$ durch Tâtonnement so bestimmt wird, wie es die grösste Deutlichkeit erfordert. Wir müssen jedoch in dieser Beziehung zwei Fälle unterscheiden, je nachdem das Einstellen des Instrumentes so vorgenommen wird, dass man entweder das ganze Gesichtsfeld im Mittel oder den in der Axe liegenden Punkt des Gegenstandes mit der grösstmöglichen Deutlichkeit sieht. Beschäftigen wir uns daher mit diesen beiden Fällen.

Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes, wenn dasselbe für das ganze Gesichtsfeld im Mittel eingestellt ist.

93) Setzen wir voraus, dass das Instrument für das ganze Gesichtsfeld im Mittel so gut wie möglich eingestellt worden ist, so müssen wir annehmen, dass hierdurch $\mathfrak{z}$ vermöge der darin enthaltenen willkührlichen Veränderungen einen Werth bekommen hat, welcher jener mittleren Deutlichkeit so vollkommen als möglich entspricht. Da nun Π die Undeutlichkeit für sämmtliche Punkte des Gesichtsfeldes im Mittel angiebt, so wird offenbar die grösste mittlere Deutlichkeit durch denjenigen Werth von $\mathfrak{z}$ erhalten, welcher Π zu einem Minimum macht. Suchen wir daher das letztere in Bezug auf $\mathfrak{z}$, so wird dadurch

$$\left.\begin{array}{l} J\mathfrak{z} + \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{4}\right)\varphi^2 \\ \quad + Q\left(\frac{R^4}{2} + 2R^2K^2\varphi^2 + K^4\varphi^4\right) + {}_8s = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (a)$$

Hieraus folgt ferner, wenn man statt $\mathfrak{z}$ seinen Werth aus (d) von Nro. 78 substituirt,

$$\frac{1}{z} + D\frac{1}{z} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3} L R^2 + \left(\frac{O+N}{4}\right)\varphi^2 \\ + Q\left(\frac{R^4}{2} + 2R^2K^2\varphi^2 + K^4\varphi^4\right) + {}_8s \end{array}\right\} \quad (b)$$

Wenden wir jetzt auf diese Gleichung dasselbe Raisonnement an, welches wir am Ende von Nro. 89 gebraucht haben, so zeigt uns jene Gleichung, dass die durch die Formel (a) der vorhergehenden Nummer bestimmte mittlere Entfernung des Bildes derjenigen gleich seyn muss, in welcher sich entweder die Projectionsfläche nach einer zur genauen Einstellung etwa erforderlichen Verschiebung derselben befindet, oder in welcher das letzte von dem Instrumente entworfene Bild, dessen Entfernung als gegeben betrachtet wird, liegen soll. Substituiren wir ferner den in (a) gefundenen Werth in dem Ausdrucke von Π, so fällt dadurch das letzte Glied desselben weg.

Setzt man daher zur Abkürzung, da der Buchstabe G in seiner früheren Bedeutung nicht mehr gebraucht wird,

$$\left.\begin{array}{l} G = \frac{3\,O - N}{8} \\ H = \frac{O - 3\,N}{8} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

so verwandelt sich die Formel (c) von Nro. 90 unter der gegenwärtigen Voraussetzung in die folgende, welche daher *die mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes in dem Falle* ausdrückt, *wenn dasselbe für das ganze Gesichtsfeld im Mittel so gut wie möglich eingestellt wird:*

$$\Pi = \left(\frac{Vz}{v}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 3K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{R^4\varphi^2}{12}\left[M + QK\left(3R^2 + 4K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{R^2\varphi^4}{3}\left\{\left[G + QK^2\left(2R^2 + \frac{3}{2}K^2\varphi^2\right)\right]^2 + H^2\right\} \\ & + \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + {}_\eta s + U\left(\frac{2}{3}R^2 + K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{\varepsilon\varphi^2}{2}\left[T + {}_\eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 + UKR^2\right]^2 \\ & + Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8K^2\varphi^2}{20} + \frac{R^6K^4\varphi^4}{4} + \frac{R^4K^6\varphi^6}{4} + \frac{R^2K^8\varphi^8}{20}\right] \\ & + \frac{\theta s^2 R^2}{2} \\ & + \varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36} + \frac{R^4K^2\varphi^2}{3} + \frac{R^2K^4\varphi^4}{3}\right] \\ & + \frac{\theta t^2\varphi^2}{2} + \frac{\varepsilon W^2\varphi^6}{36} \end{aligned} \right\} \quad \text{(d)}$$

In Bezug auf die Berechnung der in (c) eingeführten Grössen G und H müssen wir noch folgendes bemerken. Vermöge (b) von Nro. 68 ist

$$N = N_i + (N)_0\, \Delta\frac{1}{c_1}$$

$$O = O_i + 3(N)_0\, \Delta\frac{1}{c_1}$$

folglich

$$G = \frac{3O_i - N_i}{8} + (N)_0\, \Delta\frac{1}{c_1}$$

$$H = \frac{O_i - 3N_i}{8}$$

Setzt man daher

$$G^{(m)} = \frac{3O^{(m)} - N^{(m)}}{8}$$

$$H^{(m)} = \frac{O^{(m)} - 3N^{(m)}}{8}$$

und substituirt statt $N^{(m)}$ und $O^{(m)}$ ihre Werthe aus Nro. 37, so erhält man die folgenden Formeln zur Berechnung von G und H:

$$\left. \begin{aligned} G^{(m)} &= \left(\frac{A\nu K^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{3D - C}{8\nu}\right)_m \\ H^{(m)} &= \left(\frac{D - 3C}{8\nu}\right)_m \\ G &= G_i + (N)_0\, \Delta\frac{1}{c_1} \\ H &= H_i \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

wobei nach der eingeführten Bezeichnung G_i und H_i die von 1 bis i genommenen Summen der Grössen $G^{(m)}$ und $H^{(m)}$ ausdrücken.

Mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes, wenn dasselbe für einen in der Axe liegenden Punkt eingestellt wird.

94) Sehr häufig werden die Instrumente nicht auf die Weise gestellt, wie es in der vorhergehenden Nummer angenommen wurde, sondern so, dass der in der Axe liegende Punkt des Gegenstandes mit der grössten Deutlichkeit gesehen werden kann. Es entsteht daher die Frage, welche Aenderung der in (c) von Nro. 90 gefundene Ausdruck von Π bei der letzteren Voraussetzung erleidet. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir bei der Bestimmung von $\mathfrak{z}$

$$\varphi = 0$$

setzen, um bloss denjenigen Punkt zu berücksichtigen, welcher sich in der Axe befindet. Hierdurch wird die in (a) der vorhergehenden Nummer erhaltene Gleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{z}$:

$$J\mathfrak{z} + \frac{2}{3} L R^2 + \frac{Q R^4}{2} + \varepsilon s = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

Um nun die mittlere Undeutlichkeit in Bezug auf sämmtliche Punkte des Gegenstandes zu erhalten, müssen wir den aus der vorhergehenden Gleichung resultirenden Werth von $\mathfrak{z}$ in dem Ausdrucke von Π substituiren. Das letzte Glied desselben reducirt sich alsdann auf

$$\left(\frac{V z}{v}\right)^2 \frac{R^2 \varphi^4}{2} \left[\frac{O+N}{4} + Q K^2 (2 R^2 + K^2 \varphi^2)\right]^2$$

Es kann mit den beiden anderen von O und N abhängigen Gliedern vereinigt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{R^2 \varphi^4}{3} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3O-N}{8} + Q K^2 \left(2R^2 + \frac{3}{2} K^2 \varphi^2\right)\right]^2 \\ + \left(\frac{O-3N}{8}\right)^2 \end{array} \right.$$
$$+ \frac{R^2 \varphi^4}{2} \left[\frac{O+N}{4} + Q K^2 (2R^2 + K^2 \varphi^2)\right]^2 =$$
$$= \frac{5}{6} R^2 \varphi^4 \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{3O+N}{10} + Q K^2 \left(2R^2 + \frac{6}{5} K^2 \varphi^2\right)\right]^2 \\ + \left[\frac{O-3N}{10} + \frac{3}{20} Q K^4 \varphi^2\right]^2 \end{array} \right.$$
$$+ \frac{Q^2 R^2 K^8 \varphi^8}{32}$$

Vereinigt man das letzte, mit Q^2 multiplicirte Glied mit dem correspondirenden, welches bereits in dem Ausdrucke von Π vorkommt, so geben beide

$$\frac{Q^2 R^2 K^8 \varphi^8}{20} + \frac{Q^2 R^2 K^8 \varphi^8}{32} = \frac{13 . Q^2 R^2 K^8 \varphi^8}{160}$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} G' &= \frac{3\,O + N}{10} \\ H' &= \frac{O - 3\,N}{10} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

so erhalten wir den folgenden Ausdruck für die *mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes unter der Voraussetzung, dass dasselbe so gut wie möglich für den in der Axe befindlichen Punkt des Gegenstandes eingestellt ist:*

$$\Pi = \left(\frac{V z}{v}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 3K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{R^4\varphi^2}{12}\left[M + QK\,(3R^2 + 4K^2\varphi^2)\right]^2 \\ & + \frac{5}{6}R^2\varphi^4 \left\{ \begin{aligned} & \left[G' + QK^2\left(2R^2 + \frac{6}{5}K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \left[H' + \frac{3}{20}QK^4\varphi^2\right]^2 \end{aligned} \right. \\ & + \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + {}_\eta s + U\left(\frac{2}{3}R^2 + K^2\varphi^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{\varepsilon\varphi^2}{2}\left[T + {}_\eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 + UKR^2\right]^2 \\ & + Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8K^2\varphi^2}{20} + \frac{R^6K^4\varphi^4}{4} + \frac{R^4K^6\varphi^6}{4} + \frac{13R^2K^8\varphi^8}{160}\right] \\ & + \frac{\theta s^2 R^2}{2} \\ & + \varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36} + \frac{R^4K^2\varphi^2}{3} + \frac{R^2K^4\varphi^4}{3}\right] \\ & + \frac{\theta t^2\varphi^2}{2} + \frac{\varepsilon W^2\varphi^6}{36} \end{aligned} \right\} \quad \text{(c)}$$

Zur Berechnung von G' und H' können ähnliche Bezeichnungen eingeführt werden, wie es in der vorhergehenden Nummer hinsichtlich der Grössen G und H geschehen ist, indem man nämlich

$$G'^{(m)} = \frac{3\,O^{(m)} + N^{(m)}}{10}$$

$$H'^{(m)} = \frac{O^{(m)} - 3\,N^{(m)}}{10}$$

setzt. Durch diese Bezeichnungen geben die daselbst allegirten Formeln in Verbindung mit den in (b) angenommenen Werthen von G' und H' die folgenden Formeln zur Berechnung jener Grössen:

$$\left.\begin{aligned} G'^{(m)} &= \left(\frac{A\,v\,K^2}{V^4} + \frac{B\,K}{V^2} + \frac{3D + C}{10\,v}\right)_m \\ H'^{(m)} &= \left(\frac{D - 3\,C}{10\,v}\right)_m \\ G' &= G'_1 + (N)_0\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ H' &= H'_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Die Vergleichung der Formel (c) mit derjenigen, welche wir in (d) der vorhergehenden Nummer gefunden haben, zeigt, dass sich die letztere in die erstere verwandelt, wenn man die Glieder

$$\frac{R^2\varphi^4}{3}\left\{\left[G+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\varphi^2\right)\right]^2+H^2\right\}$$

mit

$$\frac{5}{6}R^2\varphi^4\left\{\begin{aligned}&\left[G'+QK^2\left(2R^2+\frac{6}{5}K^2\varphi^2\right)\right]^2\\&+\left[H'+\frac{3}{20}QK^4\varphi^2\right]^2\end{aligned}\right\}$$

sodann

$$\frac{Q^2R^2K^8\varphi^8}{20} \text{ mit } \frac{13\,Q^2R^2K^8\varphi^8}{160}$$

verwechselt.

Hieraus folgt, dass beide hauptsächlich nur durch die von G, H, G' und H' abhängigen Glieder von einander verschieden sind. Wir werden aber in der Folge sehen, dass D und C, welche in den Ausdrücken jener Grössen vorkommen, bei den verschiedenen Einrichtungen eines Instrumentes, die einerlei Zweck erfüllen und daher bei dem Gebrauche der allegirten Formeln allein mit einander verglichen werden können, sehr wenig von einander abweichen. H und H' sind daher beinahe als unveränderlich zu betrachten, die Veränderungen von G und G' dagegen werden hauptsächlich durch die mit A und B multiplicirten Glieder hervorgebracht, welche bei beiden einerlei sind. Da nun die von G' und H' abhängigen Glieder in der obigen Formel (c) mit $\frac{5}{6}$ multiplicirt sind, statt dass der correspondirende Factor in (d) der vorhergehenden Nummer nur $\frac{1}{3}$ beträgt, so müssen wir daraus schliessen, dass durch die Anwendung der letzteren Formel die Abweichung wegen der Gestalt ausser der Axe, deren beträchtlichster Theil die erwähnten Glieder ausdrücken, weniger berücksichtigt wird, als es bei dem Gebrauche der Formel (c) der Fall seyn würde, vorausgesetzt, dass zwischen den willkührlichen Grössen des Instrumentes keine Relationen stattfinden, welche es erlauben, die verschiedenen Abweichungen abgesondert zu behandeln und jede für sich so klein zu machen, als es nach den Umständen möglich ist.

Im entgegengesetzten Falle geben die beiden Formeln sehr nahe einerlei Resultat, weil die bedeutendsten von A und B abhängigen Glieder in ihnen gleich sind, beständige Factoren aber bei dieser abgesonderten Behandlung der Abweichungen nicht in Betracht kommen.

Da übrigens jede der allegirten Formeln durch die oben angegebenen Verwechselungen leicht in die andere verwandelt werden kann, so reicht es hin, bei den ferneren Entwickelungen eine derselben zu Grund zu legen und ich werde mich hierzu der Formel (d)

der vorhergehenden Nummer bedienen, welche um desswillen den Vorzug verdient, weil die Rücksicht, welche die Abweichungen ausserhalb der Axe erfordern, höchstens nur darin bestehen kann, dass sie bei einer mittleren Einstellung des Instrumentes den Abweichungen in der Axe gleich geachtet werden, was bei jener Formel vorausgesetzt ist. Wird alsdann ein darnach construirtes Instrument so eingestellt, dass der in der Axe befindliche Punkt mit der grösstmöglichen Deutlichkeit erscheint, so wird man diesen Punkt etwas besser, die ausserhalb der Axe liegenden Punkte dagegen etwas schlechter sehen, als es der Fall seyn würde, wenn die obige Formel (c) zu Grund gelegt worden wäre. Dieses ist aber mit keinem Nachtheile verbunden, da die Einstellung auf die letztere Weise bloss in der Absicht geschieht, die grösste Deutlichkeit in der Axe zu erhalten.

Hiernach ist die Formel (d) der vorhergehenden Nummer als die Grundformel zu betrachten, welche bei der Construction der optischen Instrumente angewendet werden muss, in so fern man nur ihre Deutlichkeit berücksichtigt; es ist jedoch nothwendig, noch die Modificationen anzugeben, welche dieselbe in manchen Fällen erleidet.

Ungleiche Berücksichtigung der verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes.

95) Der Ausdruck von $\varPi$ ist unter der Voraussetzung berechnet, dass alle Punkte des Gesichtsfeldes gleich geachtet werden. Soll diese Voraussetzung nicht stattfinden, soll z. B. mehr Rücksicht auf die Mitte des Gesichtsfeldes als auf den Rand desselben genommen werden, so ist weiter nichts erforderlich, als den Zähler und Nenner von $\varPi$ vor der Integration nach φ mit einem Factor (φ) zu multipliciren, welcher eine Function von φ ist und das Gewicht ausdrückt, welches man den verschiedenen Punkten des Gesichtsfeldes beilegt.

Nach Nro. 90 besteht der Ausdruck von $\varPi$ aus Gliedern von der Form

$$\frac{A\int_0^{\Phi} \varphi^{2m}\, d\,.\,\varphi^2}{\int_0^{\Phi} d\,.\,\varphi^2}$$

Multipliciren wir diess im Zähler und Nenner unter dem Integrationszeichen mit (φ), so entsteht daraus

$$\frac{A\int_0^{\Phi} (\varphi)\,\varphi^{2m}\, d\,.\,\varphi^2}{\int_0^{\Phi} (\varphi)\, d\,.\,\varphi^2}$$

Bei der vorhergehenden Rechnung, bei welcher $(\varphi) = 1$ angenommen war, wurde das correspondirende Glied

$$= \frac{A\,\varphi^{2m}}{m+1}$$

gefunden. Wenn daher auf das veränderliche Gewicht (φ) Rücksicht genommen werden soll, so kann diess dadurch geschehen, dass man in dem Ausdrucke von Π nach der Entwickelung der von φ abhängigen Glieder jede Potenz φ^{2m} mit

$$\frac{(m+1)\int_0^{\Phi}(\varphi)\,\varphi^{2m}\,d.\varphi^2}{\int_0^{\Phi}(\varphi)\,d.\varphi^2}$$

verwechselt.

Da jedoch die Function (φ) der Willkühr überlassen bleibt, und es nicht sowohl darauf ankommt, welche Gewichte den verschiedenen Punkten beigelegt werden, als darauf, dass die Deutlichkeit so gross wird, als es die Umstände gestatten, so gelangt man auf einem einfacheren und sichereren Wege zum Ziele, wenn man den Ausdruck von Π ungeändert beibehält und bei der Bestimmung der willkührlichen Grössen desselben darauf Bedacht nimmt, dass die Coefficienten der verschiedenen Glieder keine bedeutende Werthe erhalten, wobei es leicht ist, nach Willkühr entweder die Mitte oder den Rand des Gesichtsfeldes mehr zu berücksichtigen.

Corrigirtes Zerstreuungsverhältniss.

96) Die Grössen ${}_\eta s$ und ${}_\eta t$ enthalten Glieder, welche von γ_m abhängen. Statt diese Glieder abgesondert zu berechnen, ist es bequemer, sie mit den correspondirenden Gliedern von S und T zu vereinigen, wodurch nur eine an α_m anzubringende Correction entsteht.

Nach (b) von Nro. 68 ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} S &= S_i - T_e\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ s &= s_i \\ T &= T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ t &= t_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Ferner ist nach den früher gefundenen Werthen der Coefficienten, welche in Nro. 37 zusammengestellt sind,

$$\left.\begin{aligned} S_i &= \Sigma_1^i S^{(m)} = \Sigma_{1\,m}^i - \frac{k_m}{V_m^2\,n_m}(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \\ s_i &= \Sigma_1^i s^{(m)} = \Sigma_{1\,m}^i (S^{(m)}\gamma_m - K^{(m)} S_{m-1}^2) \\ T_i &= \Sigma_1^i T^{(m)} = \Sigma_{1\,m}^i - \left(\frac{K_m\,k_m}{V_m^2\,n_m} + \frac{1}{\nu_m}\right)(\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}) \\ t_i &= u_j\,S_i + \Sigma_{1\,m}^i\left[T^{(m)}\gamma_m + K^{(m)}\,T_{m-1}(S_i - S_{m-1})\right] \\ \gamma_m &= \frac{\beta_m - n_m\,\beta_{m-1}}{\alpha_m - n_m\,\alpha_{m-1}} \end{aligned}\right\} (b)$$

Hiernach enthalten $(S + {}_\eta s)$ und $(T + {}_\eta t)$ die folgenden Glieder, welche in $(S_i + {}_\eta s_i)$ und $(T_i + {}_\eta t_i)$ vorkommen:

$$S + {}_\eta s = \Sigma_1^i S^{(m)} (1 + {}_\eta \gamma_m) =$$
$$= \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^i - \frac{k_m}{V^2 n_m} \left[\alpha_m + {}_\eta \beta_m - n_m (\alpha_{m-1} + {}_\eta \beta_{m-1})\right]$$
$$T + {}_\eta t = \Sigma_1^i T^{(m)} (1 + {}_\eta \gamma_m) =$$
$$= \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^i - \left(\frac{K_m k_m}{V_m^2 n_m} + \frac{1}{\nu_m}\right) \left[\alpha_m + {}_\eta \beta_m - n_m (\alpha_{m-1} + {}_\eta \beta_{m-1})\right]$$

oder wenn man

$$\sigma_m = \alpha_m + {}_\eta \beta_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} S + {}_\eta s &= \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^i - \frac{k_m}{V_m^2 n_m} (\sigma_m - n_m \sigma_{m-1}) \\ T + {}_\eta t &= \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^i - \left(\frac{K_m k_m}{V_m^2 n_m} + \frac{1}{\nu_m}\right) (\sigma_m - n_m \sigma_{m-1}) \end{aligned}\right\} \ldots \quad (d)$$

Die Vergleichung dieser Werthe mit denen von S_i und T_i zeigt, dass sich die letzteren in die ersteren verwandeln, wenn darin α_m mit σ_m verwechselt wird. Wir können daher bei der Berechnung von $(S + {}_\eta s)$ und $(T + {}_\eta t)$ so verfahren, dass wir S_i und T_i zwar nach den früher gegebenen Formeln berechnen, darin aber σ_m statt α_m gebrauchen, sodann in s_i und t_i die von γ_m abhängigen Glieder weglassen. Hierdurch wird

$$\left.\begin{aligned} s^{(m)} &= - K^{(m)} S_{m-1}^2 \\ t_i &= u_i S_i + \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^i K^{(m)} T_{m-1} (S_i - S_{m-1}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (e)$$

In den Gliedern der dritten Ordnung kann die Verwechselung von α_m mit σ_m ebenfalls vorgenommen werden, da durch dieselbe nur Grössen entstehen, welche wir nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigen.

Dagegen müssen wir in den Gliedern $\frac{\theta s^2 R^2}{2}$ und $\frac{\theta t^2 \varphi^2}{2}$, welche in dem Ausdrucke von Π vorkommen, die von γ_m abhängigen Glieder beibehalten, mithin die in (b) gegebenen Werthe von s_i und t_i gebrauchen.

Wir können jedoch dabei die Bemerkung machen, dass die Glieder ${}_\eta s$ und $\frac{\theta s^2 R^2}{2}$ nur dann ihre Anwendung finden, wenn das Instrument mit einem achromatischen Objective versehen ist. In diesem Falle werden aber durch die Wirkung des letzteren sowohl S_i als S_{m-1} in Bezug auf die Flächen der Oculare so vermindert, dass sie nach den angenommenen Grundsätzen in den Gliedern der dritten Ordnung vernachlässigt werden können. Dasselbe gilt von $S^{(m)}$, welches von einerlei Ordnung mit $(S_i - S_{m-1})$ ist. Es ist daher erlaubt, die in s enthaltenen Summen allein auf die Flächen des Objectivs zu beschränken, so wie bei anderen Gliedern der dritten Ordnung verfahren wurde. Mithin ist zur Berechnung von $(S + {}_\eta s)$

$$s = \Sigma_{\,\mathrm{m}}{}_1^e - K^{(m)} S_{m-1}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

und zur Berechnung von $\frac{\theta s^2 R^2}{2}$

$$s = \Sigma_{1\,\mathrm{m}}^{0} (S^{(m)} \gamma_m - K^{(m)} S^2_{m-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Bei den gewöhnlichen achromatischen Objectiven, deren Flächen sich so nahe bei einander befinden, dass ihre Entfernungen in den Gliedern der dritten Ordnung vernachläsigt werden können, ist

$$K^{(m)} = 0$$

folglich wird der erste Werth

$$s = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

der zweite dagegen

$$s = \Sigma_1^0 S^{(m)} \gamma_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Was den Werth von t betrifft, so muss er im Allgemeinen nach den Formeln (b) und (e) berechnet werden, da wir die Producte von S_i und S_{m-1} in den Gliedern der dritten Ordnung, welche sich auf den farbigen Rand beziehen, beibehalten haben. Nur bei denjenigen Instrumenten mit achromatischen Objectiven, bei welchen die von den Ocularen herrührenden Glieder auch in Bezug auf den farbigen Rand vernachlässigt werden können, reducirt sich t vermöge der angegebenen Werthe

bei dem Gliede $(T + \eta t)$ auf

$$t = \Sigma_{1\,\mathrm{m}}^{0} K^{(m)} T_{m-1} (S_i - S_{m-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (k)$$

bei dem Gliede $\frac{\theta t^2 \varphi^2}{2}$ dagegen auf

$$t = \Sigma_1^i T^{(m)} \gamma_m + \Sigma_{1\,\mathrm{m}}^{0} K^{(m)} T_{m-1} (S_i - S_{m-1}) \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

Bei Instrumenten mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, für welche $K^{(m)} = 0$ ist, verwandelt sich der erste Werth in

$$t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

der zweite dagegen in

$$t = \Sigma_1^i T^{(m)} \gamma_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

In Nro. 17 haben wir die Grösse

$$\frac{\delta \nu_m}{\delta \nu} = \alpha_m + \beta_m \delta \nu$$

das Zerstreuungsverhältniss in Bezug auf denjenigen farbigen Strahl genannt, welchem $\delta \nu$ zugehört. Der vorhergehende Ausdruck von σ_m zeigt daher, dass σ_m das Zerstreuungsverhältniss desjenigen Strahles ausdrückt, für welchen

$$\delta \nu = \eta$$

ist. Ohne Rücksicht auf die Grössen der dritten Ordnung würde das Zerstreuungsverhältniss für alle farbige Strahlen $= \alpha_m$ seyn. Da nun σ_m hieraus durch Anbringung der kleinen Correction $\eta \beta_m$ erhalten wird, so werde ich σ_m das *corrigirte Zerstreuungsverhältniss* nennen, welches nach dem Vorhergehenden stets bei der Berechnung der Instrumente gebraucht werden muss.

Einfluss der verschiedenen Entfernung des Gegenstandes auf die Deutlichkeit.

97) Bei Fernröhren kommt in Bezug auf die Deutlichkeit ein Umstand in Betracht, auf welchen zuerst Herschel aufmerksam gemacht hat.[1] Die Fernröhre werden nämlich gewöhnlich so berechnet, wie es ihr Gebrauch in der Astronomie erfordert, dass die Entfernung des Gegenstandes, welche wir mit c_1 bezeichnet haben, als unendlich angesehen wird. Soll nun ein solches Fernrohr zu terrestrischen Gegenständen gebraucht werden, so sind die Abweichungen, deren Coefficienten Functionen von c_1 sind, nicht so genau aufgehoben, als bei unendlich entfernten Gegenständen, für welche das Fernrohr berechnet ist. Andere Fernröhre werden zwar nicht zu astronomischen Gegenständen verwendet; demungeachtet tritt auch bei diesen derselbe Fall ein, weil die Entfernung der irdischen Gegenstände sehr verschieden ist, das Fernrohr aber nur für eine bestimmte Entfernung berechnet werden kann.

Es entsteht daher die Frage, ob man dem Instrumente nicht eine solche Einrichtung geben kann, dass jener Fehler wenigstens grösstentheils wegfällt. Wir haben in den vorhergehenden Formeln bereits auf diesen Umstand Rücksicht genommen, es bleibt daher nur noch übrig, dass wir die nöthigen Folgerungen daraus ziehen, um den Einfluss besser beurtheilen zu können, welchen eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes auf den Ausdruck von π hat.

Wir müssen uns zu dem Ende an die Voraussetzungen erinnern, von welchen wir in Nro. 27 ausgegangen sind, wo wir die bei dieser Untersuchung zu Grund gelegten Formeln ausführlich entwickelt haben. Es wurde nämlich daselbst angenommen, dass das Instrument ursprünglich für eine gewisse, durch c_1 bezeichnete Entfernung des Gegenstandes berechnet sey, über deren Grösse jedoch keine Bestimmung gemacht wurde, dass sodann $\frac{1}{c_1}$ um eine ebenfalls unbestimmte Grösse $\Delta\frac{1}{c_1}$ zunehme. Hierdurch kamen zu den Coefficienten in den Ausdrücken der Seitenabweichungen noch Glieder, welche mit $\Delta\frac{1}{c_1}$ multiplicirt sind. Diese Glieder haben wir nachher mit den correspondirenden, von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Gliedern vereinigt, wodurch die in (b) von Nro. 68 und (e) von Nro. 93 angegebenen Coefficienten entstanden, welche in den Ausdruck von π übergiengen, nämlich

$$L = L_{\text{i}} + (L)_{\text{o}}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$M = M_{\text{i}} + (M)_{\text{o}}\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

[1]) Phil. transact. 1821, part II. pag. 222. Herschel, vom Licht, übers. von Schmidt, pag. 229.

$$G = G_i + (N).\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$S = S_i + 2\,(S)_\circ\,\Delta\frac{1}{c_1} = S_i - 2\,T.\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

$$T = T_i - (u)_i\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Die Coefficienten in dem Ausdrucke von Π sind demnach ursprünglich für die Entfernung c_1 berechnet, durch angebrachte Correctionen aber auf diejenige Entfernung angewendet worden, bei welcher sich $\frac{1}{c_1}$ in $\left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1}{c_1}\right)$ verwandelt.

Ich nehme nun an, dass das für c_1 berechnete Instrument bei verschiedenen Entfernungen gebraucht werden soll, für welche $\Delta\frac{1}{c_1}$ innerhalb der Grenzen $\Delta\frac{1'}{c_1}$ und $\Delta\frac{1''}{c_1}$ liegt. Jeder dieser Entfernungen gehört ein Werth von Π zu, den man aus dem allgemeinen Ausdrucke jener Grösse erhält, wenn man statt $\Delta\frac{1}{c_1}$ den besonderen Werth nimmt, welcher der jedesmaligen Entfernung entspricht. Verfahren wir daher hier nach demselben Grundsatze, welchen wir oben bei der Berechnung von Π angewandt haben, so müssen wir zuerst das einem jeden Werthe von $\Delta\frac{1}{c_1}$ zugehörige Π mit einem Factor multipliciren, welcher das demselben beigelegte Gewicht ausdrückt und als eine Function von $\Delta\frac{1}{c_1}$ zu betrachten ist. Sodann müssen wir das arithmetische Mittel aus allen Werthen jenes Productes nehmen, welche den sämmtlichen Entfernungen zugehören und auf die angegebene Weise gefunden werden können.

Zur Abkürzung schreibe ich $\mathfrak{c}$ statt $\Delta\frac{1}{c_1}$ und bezeichne durch $(\mathfrak{c})$ das zu $\mathfrak{c}$ gehörige Gewicht.

Hierdurch wird das erwähnte arithmetische Mittel nach der oben gebrauchten Methode =

$$\frac{\int (\mathfrak{c})\,\Pi\,d\,\mathfrak{c}}{\int (\mathfrak{c})\,d\,\mathfrak{c}}$$

innerhalb der angegebenen Grenzen, d. h.

von $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'' = \Delta\frac{1''}{c_1}$ bis zu $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = \Delta\frac{1'}{c_1}$ genommen.

Substituirt man darin statt Π seinen Werth aus (d) von Nro. 93, so bleiben die von $\Delta\frac{1}{c_1}$ unabhängigen Glieder ungeändert, so dass es nur nöthig ist, diejenigen Glieder weiter zu entwickeln, in welchen $\Delta\frac{1}{c_1}$ vorkommt. Sie haben in dem Ausdrucke von Π sämmtlich die Gestalt $(A + B\,\mathfrak{c})^2$; aus jedem derselben entsteht folglich in dem arithmetischen Mittel eines von der Form

$$\frac{\int (\mathfrak{c})\,(A + B\,\mathfrak{c})^2\,d\mathfrak{c}}{\int (\mathfrak{c})\,d\mathfrak{c}}$$

Durch die Entwickelung des zweitheiligen Quadrates kann dieser Ausdruck unter die Gestalt gebracht werden:

$$A^2 + 2AB\frac{\int (c)\, c\, dc}{\int (c)\, dc} + B^2\frac{\int (c)\, c^2\, dc}{\int (c)\, dc}$$
$$= \left(A + B\frac{\int (c)\, c\, dc}{\int (c)\, dc}\right)^2 + B^2\left[\frac{\int (c)\, c^2 dc}{\int (c)\, dc} - \left(\frac{\int (c)\, c\, dc}{\int (c)\, dc}\right)^2\right]$$

Die angedeuteten Integrale lassen sich dann erst berechnen, wenn (c) in Function von c gegeben ist. Setzt man daher einstweilen

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \frac{\int (c)\, c\, dc}{\int (c)\, dc} \\ \Delta^2 &= \frac{\int (c)\, c^2\, dc}{\int (c)\, dc} - \Delta'^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

so wird

$$\frac{\int (c)\,(A + B\,c)^2\, dc}{\int (c)\, dc} = (A + B\Delta')^2 + B^2\,\Delta^2$$

woraus folgt, dass es zur Berechnung des mittleren Werthes von Π in Bezug auf sämmtliche Entfernungen des Gegenstandes hinreicht, in jedem von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängigen Gliede, welches die Form $\left(A + B\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2$ hat, die Grösse $\Delta\frac{1}{c_1}$ mit Δ' zu verwechseln und das correspondirende Glied $B^2\,\Delta^2$ zuzusetzen.

Um dieses zu realisiren, ändere ich die früher gebrauchte Bezeichnung dahin ab, dass nunmehr

$$\left.\begin{aligned} L &= L_i \\ M &= M_i \\ G &= G_i \\ H &= H_i \\ S &= S_i \\ T &= T_i \\ (L) &= (L)_e \\ (M) &= (M)_e \\ (N) &= (N)_e \\ (S) &= (S)_e = -T_e \\ (u) &= (u)_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

bezeichnet.

Ausserdem ist es der ferneren Entwickelung wegen zweckmässig, den Buchstaben V und v von jetzt an eine andere Bedeutung zu geben. Nach Nro. 68 bezeichneten nämlich V und v bisher die Grössen V_i und v_i, welche nach Nro. 73 und 75 bei den Instrumenten der zweiten Art für das Instrument und Auge zusammengenommen berechnet werden müssen, wenn die Abweichungen auf die Netzhaut des hinter dem Instrumente befindlichen Auges bezogen werden. Setzen wir daher, um diejenigen Grössen abzusondern, welche sich auf das Instrument beziehen,

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} V = V_i \\ \nu = \nu_i \end{array}\right\} & \text{für die letzte Fläche des Instrumentes berechnet} \\ \left.\begin{array}{l} V_{,} = \dfrac{g_i V_i}{c_I} \\ \nu_{,} = \nu_i \end{array}\right\} & \text{nach den in Nro. 75 gebrauchten Bezeichnungen,} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(c)}$$

so muss das bisherige V nunmehr mit $V\,V_{,}$, das bisherige ν mit $\nu\,\nu_{,}$ verwechselt und $V_{,} = \nu_{,} = 1$ gesetzt werden, wenn sich die Abweichungen auf das letzte von dem Instrumente hervorgebrachte Bild beziehen.

Vermittelst der in (b) und (c) angenommenen Werthe erhalten wir nach der oben gemachten Bemerkung aus (d) von Nro. 93 den folgenden Ausdruck für die mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes, im Mittel für die verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes:

$$\varPi = \left(\frac{VV_{,}z}{\nu\nu_{,}}\right)^2 \left\{\begin{array}{l} \dfrac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\dfrac{6}{5}R^2 + 3K^2\varphi^2\right) + (L)\Delta'\right]^2 + \dfrac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} \\ + \dfrac{R^4\varphi^2}{12}\left[M + QK(3R^2 + 4K^2\varphi^2) + (M)\Delta'\right]^2 + \dfrac{(M)^2 R^4 \varphi^2 \Delta^2}{12} \\ + \dfrac{R^2\varphi^4}{3}\left\{\left[G + QK^2\left(2R^2 + \dfrac{3}{2}K^2\varphi^2\right) + (N)\Delta'\right]^2 + H^2\right\} \\ + \dfrac{(N)^2 R^2 \varphi^4 \Delta^2}{3} \\ + \dfrac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + {}_{\eta}s + U\left(\dfrac{2}{3}R^2 + K^2\varphi^2\right) + 2(S)\Delta'\right]^2 + 2\varepsilon(S)^2 R^2 \Delta^2 \\ + \dfrac{\varepsilon\varphi^2}{2}\left[T + {}_{\eta}t + \dfrac{2}{3}W\varphi^2 + UKR^2 - (u)\Delta'\right]^2 + \dfrac{\varepsilon(u)^2\varphi^2\Delta^2}{2} \\ + Q^2\left[\dfrac{R^{10}}{600} + \dfrac{R^8K^2\varphi^2}{20} + \dfrac{R^6K^4\varphi^4}{4} + \dfrac{R^4K^6\varphi^6}{4} + \dfrac{R^2K^8\varphi^8}{20}\right] \\ + \dfrac{\theta s^2 R^2}{2} \\ + \varepsilon\, U^2\left[\dfrac{R^6}{36} + \dfrac{R^4K^2\varphi^2}{3} + \dfrac{R^2K^4\varphi^4}{3}\right] \\ + \dfrac{\theta t^2 \varphi^2}{2} + \dfrac{\varepsilon W^2 \varphi^6}{36} \end{array}\right\} \quad \text{(d)}$$

Hierbei kann jedoch die folgende Bemerkung gemacht werden. Die Coefficienten L etc. sind unter der Voraussetzung berechnet, dass sich der Gegenstand in der Entfernung c_1 befindet. Dagegen drücken $(L)\Delta'$ etc. die Correctionen aus, welche an jenen Coefficienten angebracht werden müssen, um sie auf diejenige Entfernung zu reduciren, welcher Δ' entspricht. Für diese Entfernung verwandelt sich aber $\dfrac{1}{c_1}$ in $\left(\dfrac{1}{c_1} + \Delta'\right)$.

Berechnet man daher gleich Anfangs die Coefficienten L etc. für diesen Werth von $\dfrac{1}{c_1}$, so fallen die von Δ' abhängigen Glieder in dem Ausdrucke von $\varPi$ weg.

Es bleibt jetzt noch übrig, zu überlegen, welche Werthe den Gewichten zu geben sind.

Sollen zuerst alle Entfernungen, bei denen das Instrument gebraucht wird, gleiche Berücksichtigung finden, so ist (c) constant und kann = 1 gesetzt werden, da alle beständige Factoren dieser Grösse sich im Zähler und Nenner von Δ' und Δ^2 wegstreichen.

Diess giebt

$$\int (c)\, d\, c = c' - c''$$

$$\int (c)\, c\, d\, c = \frac{c'^2 - c''^2}{2}$$

$$\int (c)\, c^2\, d\, c = \frac{c'^3 - c''^3}{3}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \frac{c' + c''}{2} = \frac{1}{2}\left[\Delta\frac{1'}{c_1} + \Delta\frac{1''}{c_1}\right] \\ \Delta^2 &= \frac{(c' - c'')^2}{12} = \frac{1}{12}\left[\Delta\frac{1'}{c_1} - \Delta\frac{1''}{c_1}\right]^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Ferner ist derjenige Werth von $\frac{1}{c_1}$, für welchen die Coefficienten L etc. berechnet werden müssen, wenn die von Δ' abhängigen Glieder wegfallen sollen,

$$\left(\frac{1}{c_1} + \Delta'\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1'}{c_1}\right) + \left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1''}{c_1}\right)\right] \quad \ldots \quad (f)$$

Er ist folglich das arithmetische Mittel aus den beiden Werthen von $\frac{1}{c_1}$, welche der grössten und der kleintsen Entfernung entsprechen. Ausserdem kann der Ausdruck von Δ^2 unter die Gestalt gebracht werden:

$$\Delta^2 = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1'}{c_1}\right) - \left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1''}{c_1}\right)\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

Δ^2 ist daher der zwölfte Theil von dem Quadrate des Unterschiedes zwischen denjenigen Werthen von $\frac{1}{c_1}$, welche sich auf die kleinste und die grösste Entfernung des Gegenstandes beziehen.

Sind die Coefficienten L etc. für die in (f) angegebene Entfernung berechnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{1''}{c_1} &= -\Delta\frac{1'}{c_1} \\ \Delta' &= 0 \\ \Delta^2 &= \frac{1}{3}\left(\Delta\frac{1'}{c_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Sind dagegen jene Coefficienten für die grösste Entfernung berechnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} \Delta\frac{1''}{c_1} &= 0 \\ \Delta' &= \frac{1}{2}\,\Delta\frac{1'}{c_1} \\ \Delta^2 &= \frac{1}{12}\left(\Delta\frac{1'}{c_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

Will man diejenige Entfernung, für welche das Instrument ursprünglich berechnet worden ist, am meisten berücksichtigen, die übrigen Entfernungen dagegen desto weniger, je mehr sie von jener unterschieden sind, so muss man statt (c) eine Function von c nehmen, welche für $c = 0$ ihren grössten Werth erhält und von da an zu beiden Seiten fortwährend abnimmt. Eine solche Function ist z. B.

$$(c) = c'^2 - c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (k)$$

deren grösster Werth c'^2 bei $c = 0$ stattfindet und welche für $c = c'$, d. h. für die letzte Entfernung, bei der das Instrument noch gebraucht werden soll, verschwindet, so dass dieser gar kein Gewicht beigelegt wird.

Substituiren wir jene Function statt (c), so erhalten wir dadurch

$$\int (c)\, dc = c'^2 (c' - c'') - \left(\frac{c'^3 - c''^3}{3}\right)$$

$$= (c' - c'')^2 \left(\frac{2c' + c''}{3}\right)$$

$$\int (c)\, c\, dc = \frac{c'^2 (c'^2 - c''^2)}{2} - \left(\frac{c'^4 - c''^4}{4}\right)$$

$$= (c' - c'')^2 \, \frac{(c' + c'')^2}{4}$$

$$\int (c)\, c^2\, dc = c'^2 \left(\frac{c'^3 - c''^3}{3}\right) - \left(\frac{c'^5 - c''^5}{5}\right)$$

$$= (c' - c'')^2 \left[\frac{2c'^3 + 4c'^2 c'' + 6c' c''^2 + 3c''^3}{15}\right]$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \frac{3(c' + c'')^2}{4(2c' + c'')} \\ \Delta^2 &= \frac{(c' - c'')^2 \left[19c'^2 + 18c' c'' + 3c''^2\right]}{80(2c' + c'')^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

Für $\Delta\frac{1''}{c_1} = -\Delta\frac{1'}{c_1}$ oder $c'' = -c'$ wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= 0 \\ \Delta^2 &= \frac{1}{5}\, c'^2 = \frac{1}{5}\left(\Delta\frac{1'}{c_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

Für

$$\Delta\frac{1''}{c_1} = c'' = 0$$

dagegen wird

$$\left.\begin{aligned} \Delta' &= \frac{3}{8}\, c' = \frac{3}{8}\,\Delta\frac{1'}{c_1} \\ \Delta^2 &= \frac{19}{320}\, c'^2 = \frac{19}{320}\left(\Delta\frac{1'}{c_1}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

so dass diese Grössen selbst bei der bedeutenden Abnahme der Gewichte, welche die Formel (i) mit sich bringt, nur um weniges kleiner geworden sind, als in dem Falle, wo den sämmtlichen Entfernungen gleiche Gewichte gegeben werden.

Mittlere Undeutlichkeit, durch die Tangente des halben vergrösserten Gesichtsfeldes ausgedrückt.

98) Wir haben bereits in Nro. 66 angeführt, dass die Grösse φ, welche die Tangente des halben Gesichtsfeldes ausdrückt, oft nicht unmittelbar gegeben ist, sondern von dem vergrösserten Gesichtsfelde abhängt, welches nach dem letzten von dem Instrumente entworfenen Bilde bestimmt wird und gewöhnlich eine bekannte Grösse ist. Es ist daher zweckmässig, in der für die Undeutlichkeit gefundenen Formel die erstere Grösse durch die letztere auszudrücken. Nennt man demnach

Φ die Tangente des halben vergrösserten Gesichtsfeldes, so ist vermöge (b) der allegirten Nummer

$$\varphi = \frac{\nu \Phi}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich der in (d) von Nro. 97 für die mittlere Undeutlichkeit erhaltene Ausdruck in den folgenden:

$$\Pi = \left(\frac{V_{,} z}{\nu_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{V^2 R^6}{36 \nu^2} \left[L + Q \left(\frac{6}{5} R^2 + \frac{3 \nu^2 K^2 \Phi^2}{V^2} \right) + (L) \Delta' \right]^2 \\ & + \frac{V^2 (L)^2 R^6 \Delta^2}{36 \nu^2} \\ & + \frac{R^4 \Phi^2}{12} \left[M + Q K \left(3 R^2 + \frac{4 \nu^2 K^2 \Phi^2}{V^2} \right) + (M) \Delta' \right]^2 \\ & + \frac{(M)^2 R^4 \Phi^2 \Delta^2}{12} \\ & + \frac{\nu^2 R^2 \Phi^4}{8 V^2} \left\{ \left[G + Q K^2 \left(2 R^2 + \frac{3 \nu^2 K^2 \Phi^2}{2 V^2} \right) + (N) \Delta' \right]^2 + H^2 \right\} \\ & + \frac{\nu^2 (N)^2 R^2 \Phi^4 \Delta^2}{3 V^2} \\ & + \frac{\varepsilon V^2 R^2}{2 \nu^2} \left[S + \eta s + U \left(\frac{2}{3} R^2 + \frac{\nu^2 K^2 \Phi^2}{V^2} \right) + 2 (S) \Delta' \right]^2 \\ & + \frac{2 \varepsilon V^2 (S)^2 R^2 \Delta^2}{\nu^2} \\ & + \frac{\varepsilon \Phi^2}{2} \left[T + \eta t + \frac{2 \nu^2 W \Phi^2}{3 V^2} + U K R^2 - (u) \Delta' \right]^2 \\ & + \frac{\varepsilon (u)^2 \Phi^2 \Delta^2}{2} \\ & + Q^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{V^2 R^{10}}{600 \nu^2} + \frac{R^8 K^2 \Phi^2}{20} + \frac{\nu^2 R^6 K^4 \Phi^4}{4 V^2} \\ & + \frac{\nu^4 R^4 K^6 \Phi^6}{4 V^4} + \frac{\nu^6 R^2 K^8 \Phi^8}{20 V^6} \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{\theta V^2 s^2 R^2}{2 \nu^2} \\ & + \varepsilon U^2 \left[\frac{V^2 R^6}{36 \nu^2} + \frac{R^4 K^2 \Phi^2}{3} + \frac{\nu^2 R^2 K^4 \Phi^4}{3 V^2} \right] \\ & + \frac{\theta t^2 \Phi^2}{2} + \frac{\varepsilon \nu^4 W^2 \Phi^6}{36 V^4} \end{aligned} \right\} \quad \text{(b)}$$

Mittlere Undeutlichkeit, durch die Tangente des halben vergrösserten Gesichtsfeldes und den Oeffnungshalbmesser der letzten brechenden Fläche ausgedrückt.

99) Bei denjenigen Instrumenten, welche eine so grosse Oeffnung haben, dass die durch dieselben gehenden Strahlen nicht alle durch die Pupille des hinter ihnen befindlichen Auges gelassen werden, vertritt, wie schon in Nro. 22 erwähnt wurde, die Pupille die Stelle der Hauptblendung. In diesem Falle ist es bequem, in dem Ausdrucke von π statt R den correspondirenden Halbmesser in Bezug auf die letzte brechende Fläche des Instrumentes einzuführen, da dieser aus dem bekannten Halbmesser der Pupille leicht gefunden werden kann.

Nennen wir daher

r den Oeffnungshalbmesser der letzten brechenden Fläche des Instrumentes wegen der Helligkeit, oder R'_1 nach der früheren Bezeichnung,

ϱ_1 den Halbmesser der Pupille,

so ist vermöge (a) von Nro. 58 und (f) von Nro. 62, da das dortige R'_1 hier mit R bezeichnet ist,

$$\left.\begin{aligned} R &= Vr \\ r &= \left(\frac{g}{g-g''}\right)_1 \frac{n_1 c''_1}{g''_1} \varrho_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Fallen die Strahlen parallel in das Auge, wie es bei der Berechnung der optischen Werkzeuge gewöhnlich angenommen wird, so ist $g_1 = \infty$ und die vorhergehende Formel giebt nach den in Nro. 61 angenommenen Werthen

$$r = 1{,}1\ \varrho_1$$

mithin ist r in diesem Falle nur wenig von dem Halbmesser der Pupille verschieden.

Verträgt das Instrument der Deutlichkeit wegen keine so grosse Oeffnung, als sie nach der Pupille möglich wäre, so dass es nothwendig wird, vor dem Auge eine Blendung anzubringen, so muss r nach der Stellung und Oeffnung der letzteren berechnet werden, welche in diesem Falle als Hauptblendung zu betrachten ist.

Substituiren wir nun den vorhergehenden Werth von R in (b) der vorhergehenden Nummer, so erhalten wir

$$
\mathfrak{n}=\left(\frac{V_{,}z}{\nu_{,}}\right)^2\left\{\begin{array}{l}
\frac{V^8 r^6}{36\,\nu^2}\left[L+Q\left(\frac{6}{5}V^2r^2+\frac{3\,\nu^2K^2\Phi^2}{V^2}\right)+(L)\Delta'\right]^2\\
+\frac{V^8(L)^2r^6\Delta^2}{36\,\nu^2}\\
+\frac{V^4r^4\Phi^2}{12}\left[M+QK\left(3V^2r^2+\frac{4\,\nu^2K^2\Phi^2}{V^2}\right)+(M)\Delta'\right]^2\\
+\frac{V^4(M)^2r^4\Phi^2\Delta^2}{12}\\
+\frac{\nu^2r^2\Phi^4}{3}\left\{\left[G+QK^2\left(2V^2r^2+\frac{3\nu^2K^2\Phi^2}{2\,V^2}\right)+(N)\Delta'\right]^2+H^2\right\}\\
+\frac{\nu^2(N)^2r^2\Phi^4\Delta^2}{3}\\
+\frac{\varepsilon V^4r^2}{2\,\nu^2}\left[S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}V^2r^2+\frac{\nu^2K^2\Phi^2}{V^2}\right)+2(S)\Delta'\right]^2\\
+\frac{2\,\varepsilon V^4(S)^2r^2\Delta^2}{\nu^2}\\
+\frac{\varepsilon\,\Phi^2}{2}\left[T+\eta t+\frac{2\,\nu^2W\Phi^2}{3\,V^2}+V^2UKr^2-(u)\Delta'\right]^2\\
+\frac{\varepsilon\,(u)^2\Phi^2\Delta^2}{2}\\
+Q^2\left\{\begin{array}{l}\frac{V^{12}r^{10}}{600\,\nu^2}+\frac{V^8r^8K^2\Phi^2}{20}+\frac{\nu^2V^4r^6K^4\Phi^4}{4}\\
+\frac{\nu^4r^4K^6\Phi^6}{4}+\frac{\nu^6r^2K^8\Phi^8}{20\,V^4}\end{array}\right\}\\
+\frac{\theta\,V^4s^2r^2}{2\,\nu^2}\\
+\varepsilon\,U^2\left[\frac{V^8r^6}{36\,\nu^2}+\frac{V^4r^4K^2\Phi^2}{3}+\frac{\nu^2r^2K^4\Phi^4}{3}\right]\\
+\frac{\theta\,\mathfrak{l}^2\Phi^2}{2}+\frac{\varepsilon\,\nu^4W^2\Phi^6}{36\,V^4}
\end{array}\right\}\quad\text{(b)}
$$

Die Coefficienten K, L etc. bestehen aus Summen mehrerer Glieder, welche theils im Zähler, theils im Nenner eine gewisse Anzahl von den mit V_m und ν_m bezeichneten Grössen als Factoren enthalten, wobei der Index m alle Werthe von 1 bis i haben kann. Untersucht man nun, welche Dimensionen die erwähnten Coefficienten in Bezug auf jene Grössen, ohne Rücksicht auf den Index derselben, haben, so ist aus der in Nro. 37 enthaltenen Zusammenstellung und aus (e) von Nro. 93 ersichtlich, dass diese Dimensionen diejenigen sind, welche die folgende Tafel angiebt. Da es ausserdem, wie wir später sehen werden, auch nöthig ist, die Dimensionen jener Coefficienten in Ansehung der darin vorkommenden linearischen Grössen a_m, c_m, g_m und d_m zu kennen, so füge ich auch diese hinzu, indem ich eine der letzteren Grössen mit $\mathfrak{l}$ bezeichne.

Hiernach ist

K von der Dimension	$\frac{V_m^2\,\mathfrak{l}}{v_m}$	
L	$\frac{v_m}{V_m^4\,\mathfrak{l}^3}$	
M	$\frac{1}{V_m^2\,\mathfrak{l}^2}$	
N, O, G und H	$\frac{1}{v_m\,\mathfrak{l}}$	
P	$\frac{V_m^2}{v_m^2}$	
l und L'	$\frac{1}{V_m^2\,\mathfrak{l}^2}$	
(L)	$\frac{1}{V_m^2\,\mathfrak{l}^2}$	
(M)	$\frac{1}{v_m\,\mathfrak{l}}$	
(N)	$\frac{V_m^2}{v_m^2}$	
(P) und $[P]$	$\frac{V_m^4\,\mathfrak{l}}{v_m^3}$	
$[P']$, $[P'']$ und $[P''']$	$\frac{V_m^2}{v_m^3}$	
Q	$\frac{v_m}{V_m^6\,\mathfrak{l}^5}$	. . (c)
S	$\frac{1}{V_m^2\,\mathfrak{l}}$	
T	$\frac{1}{v_m}$	
s — das von γ_m abhängige Glied . .	$\frac{1}{V_m^2\,\mathfrak{l}}$	
s — das andere Glied	$\frac{1}{v_m\,V_m^2\,\mathfrak{l}}$	
t — das von γ_m abhängige Glied . .	$\frac{1}{v_m}$	
t — die übrigen Glieder	$\frac{1}{v_m^2}$	
(S)	$\frac{1}{v_m}$	
(T), u und (u)	$\frac{V_m^2\,\mathfrak{l}}{v_m^2}$	
U	$\frac{1}{V_m^4\,\mathfrak{l}^3}$	
w	$\frac{V_m^4\,\mathfrak{l}}{v_m^3}$	
W	$\frac{V_m^2}{v_m^3}$	

Dividirt man daher sämmtliche V_m einschliesslich V_1, welches $= 1$ ist, durch $V_i = V$ und sämmtliche v_m durch $v_i = v$, gebraucht sodann diese Werthe von V_m und v_m statt der früheren bei der Berechnung der Coefficienten K, L etc. und bezeichnet die hierdurch erhaltenen neuen Werthe, indem man die früher gebrauchten Buchstaben unterstreicht, so wird

$$K = \frac{V^2 \underline{K}}{v}$$

$$L = \frac{v \underline{L}}{V^4}$$

und ebenso erhalten alle übrige Coefficienten einen Factor, welcher aus der vorhergehenden Tafel gefunden wird, wenn man V_m und v_m mit V und v verwechselt und $\iota = 1$ setzt. Multiplicirt man endlich

Δ und Δ' mit $\frac{V^2}{v}$,

γ_m mit v,

η mit $\frac{1}{v}$,

ε mit $\frac{1}{v^2}$,

θ mit $\frac{1}{v^4}$,

so wird

$$\Delta = \frac{v \underline{\Delta}}{V^2}$$

$$\Delta' = \frac{v \underline{\Delta'}}{V^2}$$

$$\gamma_m = \frac{\underline{\gamma_m}}{v}$$

$$\eta = v \underline{\eta}$$

$$\varepsilon = v^2 \underline{\varepsilon}$$

$$\theta = v^4 \underline{\theta}$$

Durch Substitution dieser Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von $\varPi$ fallen alle V und v weg und derselbe erhält einerlei Form mit (d) von Nro. 97; nur sind darin

$\left(\frac{V V_{,z}}{v v_{,}}\right)^2$ mit $\left(\frac{V_{,z}}{v_{,}}\right)^2$

R mit r

φ mit Φ

K, L etc., Δ, Δ', γ_m, η, ε und θ mit ihren neuen Werthen verwechselt.

Wir können hieraus die folgenden Regeln abstrahiren, um den Ausdruck (d) von Nro. 97 unmittelbar auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden. Zuerst müssen statt der früheren Grössen V_m und ν_m die folgenden gebraucht werden:

$$\left.\begin{aligned} V_m &= \frac{c_{m+1} \ldots c_i}{g_m \ldots g_{i-1}} \\ \nu_m &= \frac{1}{n_{m+1} \ldots n_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

woraus man V_m und ν_m für sämmtliche Werthe des Index leicht erhält, wenn man von V_i und ν_i ausgeht; denn es ist

$$\left.\begin{aligned} V_i &= 1 \\ V_{m-1} &= \frac{V_m c_m}{g_{m-1}} \\ \nu_i &= 1 \\ \nu_{m-1} &= \frac{\nu_m}{n_m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Mit den so erhaltenen Werthen berechnet man sodann die sämmtlichen Coefficienten K, L etc. nach den früheren Formeln.

Endlich verwechselt man

$\left(\frac{V V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2$ mit $\left(\frac{V_, z}{\nu_,}\right)^2$

R mit r

φ mit Φ

Δ mit $\frac{\nu_0 \Delta}{V_1^2}$

Δ' mit $\frac{\nu_0 \Delta'}{V_1^2}$

γ_m mit $\frac{\gamma_m}{\nu_0}$

η mit $\nu_0 \eta$

ε mit $\nu_0^2 \varepsilon$

θ mit $\nu_0^4 \theta$

wobei V_1 und ν_0 in der neuen Bedeutung genommen sind, nach welcher sie den früheren $\frac{1}{V_i}$ und $\frac{1}{\nu_i}$ correspondiren.

Mittlere Undeutlichkeit, durch die Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit und des Gesichtsfeldes ausgedrückt.

100) Die in dem Ausdrucke der Undeutlichkeit mit R bezeichnete Grösse ist in Bezug auf die erste brechende Fläche dasjenige, was wir in Nro. 58 den Oeffnungshalbmesser wegen der Helligkeit genannt haben. Es ist leicht, auch den zweiten Theil, welcher in Verbindung mit R den gesammten Oeffnungshalbmesser jener Fläche bildet und am angeführten Orte der Oeffnungshalbmesser wegen des

Gesichtsfeldes genannt und mit $\overset{\prime\prime}{Y}_1$ bezeichnet wurde, in dem erwähnten Ausdrucke einzuführen.

Da die zur Unterscheidung beigesetzten Zeichen gegenwärtig nicht mehr nöthig sind, so lasse ich sie weg, wie es in Ansehung der übrigen Buchstaben geschehen ist und nenne demnach

Y den Oeffnungshalbmesser wegen des Gesichtsfeldes in Bezug auf die erste brechende Fläche.

Vermöge (a) der allegirten Nummer ist derselbe nach den gegenwärtigen Bezeichnungen

$$Y = K\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

woraus umgekehrt

$$\varphi = \frac{Y}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

folgt.

Substituirt man diese Werthe in (d) von Nro. 97, so wird

$$\Pi = \left(\frac{VV_{,}z}{\nu\nu_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{R^6}{36}\left[L + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 3Y^2\right) + (L)\Delta'\right]^2 + \frac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} \\ &+ \frac{R^4 Y^2}{12}\left[\frac{M}{K} + Q\,(3R^2 + 4Y^2) + \frac{(M)\,\Delta'}{K}\right]^2 \\ &+ \frac{(M)^2 R^4 Y^2 \Delta^2}{12 K^2} \\ &+ \frac{R^2 Y^4}{3}\left\{\left[\frac{G}{K^2} + Q\left(2R^2 + \frac{3}{2}Y^2\right) + \frac{(N)\Delta'}{K^2}\right]^2 + \frac{H^2}{K^4}\right\} \\ &+ \frac{(N)^2 R^2 Y^4 \Delta^2}{3 K^4} \\ &+ \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + \bar{\eta} s + U\left(\frac{2}{3}R^2 + Y^2\right) + 2\,(S)\,\Delta'\right]^2 \\ &+ 2\,\varepsilon\,(S)^2 R^2 \Delta^2 \\ &+ \frac{\varepsilon Y^2}{2}\left[\frac{T + \eta t}{K} + \frac{2 W Y^2}{3 K^3} + U R^2 + \frac{(u)\,\Delta'}{K}\right]^2 \\ &+ \frac{\varepsilon\,(u)^2 Y^2 \Delta^2}{2 K^2} \\ &+ Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8 Y^2}{20} + \frac{R^6 Y^4}{4} + \frac{R^4 Y^6}{4} + \frac{R^2 Y^8}{20}\right] \\ &+ \frac{\theta s^2 R^2}{2} \\ &+ \varepsilon\,U^2\left[\frac{R^6}{36} + \frac{R^4 Y^2}{3} + \frac{R^2 Y^4}{3}\right] \\ &+ \frac{\theta t^2 Y^2}{2 K^2} + \frac{\varepsilon W^2 Y^6}{36 K^6} \end{aligned} \right\} \quad \text{(c)}$$

Hat das Instrument die in der vorhergehenden Nummer angegebene Einrichtung, so muss R nach der dortigen Formel berechnet werden.

Instrumente, welche aus zwei Systemen bestehen.

101) Bei zusammengesetzten Instrumenten wird die Rechnung oft bedeutend erleichtert, wenn man das Instrument in mehrere Systeme, z. B. Objectiv und Oculare, theilt und jedes System abgesondert berechnet; wir müssen daher untersuchen, wie man die Resultate dieser abgesonderten Rechnungen verbinden und dadurch zu dem ganzen Instrumente übergehen kann.

Zu dem Ende nehme ich an, dass das Instrument aus zwei Systemen besteht, deren erstes bis zur m^{ten} Fläche einschliesslich geht. Denken wir uns nun an der Stelle, wo die Hauptstrahlen nach der m^{ten} Brechung die Axe des Instrumentes durchschneiden, eine brechende Fläche, deren Brechungsverhältniss $= 1$ ist, so wird die Lage der Strahlen durch diese hypothetische Fläche durchaus nicht abgeändert und wir können dieselbe als zum zweiten Systeme gehörig betrachten.

Berechnet man jetzt das zweite System abgesondert, so ist die hypothetische Fläche die erste desselben; wird dagegen das ganze Instrument zusammengenommen berechnet und die hypothetische Fläche mitgezählt, so ist sie die $(m+1)^{te}$ Fläche des Instrumentes. Hieraus folgt, dass allgemein die $\mathfrak{m}^{te}$ Fläche des zweiten Systems die $(m+\mathfrak{m})^{te}$ des ganzen Instrumentes bildet.

Wir haben in Nro. 51 mit $\overset{''}{g}_m$ die Vereinigungsweite der Hauptstrahlen nach der m^{ten} Brechung, *vor* der m^{ten} brechenden Fläche angenommen, bezeichnet.

Da sich nun der Voraussetzung nach die hypothetische, $(m+1)^{te}$ Fläche an der Stelle befinden soll, wo die Hauptstrahlen die Axe und folglich auch sich wechselseitig durchschneiden, die Entfernung der $(m+1)^{ten}$ Fläche von der m^{ten} aber in den allgemeinen Formeln d_m genannt und *hinter* der m^{ten} Fläche vorausgesetzt wurde, so ist

$$d_m = -\overset{''}{g}_m \quad \ldots \quad (a)$$

Bezeichnet man ferner alle Grössen, welche sich auf das ganze Instrument beziehen, auf die bisherige Weise, diejenigen dagegen, welche dem zweiten Systeme, abgesondert berechnet, entsprechen, mit eckigen Parenthesen, den dem letzteren Systeme zugehörigen Index mit römischen Ziffern und deutschen Buchstaben, und nennt

d die Entfernung der $(m+II)^{ten}$ Fläche von der m^{ten}, welche die auf einander folgenden wirklichen Flächen des Instrumentes sind,

so erhält man nach der bereits in Nro. 62 gebrauchten Methode die folgenden Relationen zwischen den beiderlei Grössen.

Zuerst ist, da der Voraussetzung nach die hypothetische Fläche keine Brechung verursacht,

$$\left.\begin{aligned} y_{m+I} &= [g]_I = c_{m+I} = g_m + d_m = (g-\overset{''}{g})_m \\ d_{m+I} &= [d]_I = \overset{''}{g}_m + d \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Sodann ist allgemein

$$\left.\begin{aligned} c_{m+\mathfrak{m}} &= [c]_{\mathfrak{m}} \\ g_{m+\mathfrak{m}} &= [g]_{\mathfrak{m}} \\ d_{m+\mathfrak{m}} &= [d]_{\mathfrak{m}} \\ a_{m+\mathfrak{m}} &= [a]_{\mathfrak{m}} \\ n_{m+\mathfrak{m}} &= [n]_{\mathfrak{m}} \\ \nu_{m+\mathfrak{m}} &= \nu_m\,[\nu]_{\mathfrak{m}} \\ V_{m+\mathfrak{m}} &= \frac{g_1 \cdots g_m\, g_{m+\mathrm{I}} \cdots g_{m+\mathfrak{m}-1}}{c_2 \cdots c_{m+\mathrm{I}}\, c_{m+\mathrm{II}} \cdots c_{m+\mathfrak{m}}} \\ &= V_{m+\mathrm{I}}\,[V]_{\mathfrak{m}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Zur Berechnung von $K_{m+\mathfrak{m}}$ geben die Formeln (q) von Nro. 4, wenn man den laufenden Index mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet und $K_{m+\mathrm{I}}$ als bekannt annimmt,

$$K_{m+\mathfrak{m}} = K_{m+\mathrm{I}} - \underset{\mathfrak{n}}{\sum\nolimits_{\mathrm{II}}^{\mathfrak{m}}} \frac{V_{m+\mathfrak{n}-1}\, V_{m+\mathfrak{n}}\, d_{m+\mathfrak{n}-1}}{\nu_{m+\mathfrak{n}-1}}$$

Vermöge (q) von Nro. 51 ist aber, da sich die Hauptstrahlen im Scheitel der $(m+I)^{ten}$ brechenden Fläche schneiden, mithin $g''_{m+\mathrm{I}} = 0$ ist,

$$K_{m+\mathrm{I}} = -\frac{V^2_{m+\mathrm{I}}\, g_{m+\mathrm{I}}\, g''_{m+\mathrm{I}}}{\nu_{m+\mathrm{I}}\,(g - g'')_{m+\mathrm{I}}} = 0$$

Der vorhergehende Ausdruck von $K_{m+\mathfrak{m}}$ verwandelt sich daher durch Substitution der in (c) gefundenen Werthe in den folgenden:

$$K_{m+\mathfrak{m}} = -\frac{V^2_{m+\mathrm{I}}}{\nu_m} \underset{\mathfrak{n}}{\sum\nolimits_{\mathrm{II}}^{\mathfrak{m}}} \frac{[V]_{\mathfrak{n}-1}\,[V]_{\mathfrak{n}}\,[d]_{\mathfrak{n}-1}}{[\nu]_{\mathfrak{n}-1}}$$

Bei dem zweiten Systeme liegt der Durchschnittspunkt der Hauptstrahlen im Scheitel der ersten Fläche, folglich ist

$$\left.\begin{aligned} [K]_{\mathrm{I}} &= 0 \\ [K]_{\mathfrak{m}} &= -\underset{\mathfrak{n}}{\sum\nolimits_{\mathrm{II}}^{\mathfrak{m}}} \frac{[V]_{\mathfrak{n}-1}\,[V]_{\mathfrak{n}}\,[d]_{\mathfrak{n}-1}}{[\nu]_{\mathfrak{n}-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Die Vergleichung der beiden Ausdrücke von $K_{m+\mathfrak{m}}$ und $[K]_{\mathfrak{m}}$ giebt

$$K_{m+\mathfrak{m}} = \frac{V^2_{m+\mathrm{I}}}{\nu_m}\,[K]_{\mathfrak{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Aus den in (b), (c) und (e) erhaltenen Formeln ist ersichtlich, dass alle Grössen, welche sich auf das zweite System abgesondert beziehen, mit Ausnahme von $[\nu]_{\mathfrak{m}}$, $[V]_{\mathfrak{m}}$ und $[K]_{\mathfrak{m}}$, dieselben Werthe haben, die sie bekommen würden, wenn sie als zu dem gesammten Instrumente gehörig betrachtet würden, und dass sie sich in beiden Fällen nur durch den veränderten Index unterscheiden, dass dagegen $[\nu]_{\mathfrak{m}}$ mit ν_m, $[V]_{\mathfrak{m}}$ mit $V_{m+\mathrm{I}}$ und $[K]_{\mathfrak{m}}$ mit $\frac{V^2_{m+\mathrm{I}}}{\nu_m}$ multiplicirt werden müssen, um daraus die correspondirenden Werthe in Bezug auf das ganze Instrument zu erhalten.

Diese Resultate geben uns ein Mittel an die Hand, wodurch wir in den Stand gesetzt werden, in den Formeln (d) von Nro. 97, (b) von Nro. 98 und (c) von Nro. 100 diejenigen Grössen, welche dem ersten und zweiten Systeme zugehören, abgesondert zu berechnen und daraus die correspondirenden Grössen in Bezug auf das ganze Instrument abzuleiten.

Zuerst müssen wir bemerken, dass v und V, so oft sie in jenen Formeln explicite vorkommen, für die letzte Fläche, K dagegen für die erste Fläche des Instrumentes berechnet sind. Bezieht man daher $\mathfrak{m}$ auf die letzte Fläche des zweiten Systems, so ist

$$\left.\begin{array}{l} v = v_{m+\mathfrak{m}} = v_m\,[v]_{\mathfrak{m}} \\ V = V_{m+\mathfrak{m}} = V_{m+1}\,[V]_{\mathfrak{m}} \\ K = K_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{f})$$

Was sodann die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten L etc. betrifft, so besteht jeder von ihnen aus der Summe der Glieder, welche sich auf das erste und zweite System beziehen, oder es ist, wenn $\mathfrak{n}$, wie oben, den laufenden Index bezeichnet, nach der in Nro. 37 enthaltenen Zusammenstellung

$$L^{(m+\mathfrak{n})} = \frac{A_{m+\mathfrak{n}}\,v_{m+\mathfrak{n}}}{V^4_{m+\mathfrak{n}}}$$

$$L = L_{m+\mathfrak{m}} = L_m + (L_{m+\mathfrak{m}} - L_m) = L_m + \Sigma_{\mathfrak{n}}{}_{1}^{\mathfrak{m}}\, L^{(m+\mathfrak{n})}$$

$A_{m+\mathfrak{n}}$ hängt bloss von $n_{m+\mathfrak{n}}$, $a_{m+\mathfrak{n}}$ und $c_{m+\mathfrak{n}}$ ab und bleibt mithin ungeändert, mag es auf das ganze Instrument oder auf das letzte System bezogen werden, d. h. es ist

$$A_{m+\mathfrak{n}} = [A]_{\mathfrak{n}}$$

Ferner ist vermöge (c)

$$\frac{v_{m+\mathfrak{n}}}{V^4_{m+\mathfrak{n}}} = \frac{v_m}{V^4_{m+1}}\,\frac{[v]_{\mathfrak{n}}}{[V]^4_{\mathfrak{n}}}$$

folglich

$$L^{(m+\mathfrak{n})} = \frac{v_m}{V^4_{m+1}} \cdot \frac{[A]_{\mathfrak{n}}\,[v]_{\mathfrak{n}}}{[V]^4_{\mathfrak{n}}}$$

$$L = L_m + \frac{v_m}{V^4_{m+1}} \cdot \sum_{\mathfrak{n}}{}_{1}^{\mathfrak{m}} \frac{[A]_{\mathfrak{n}}\,[v]_{\mathfrak{n}}}{[V]^4_{\mathfrak{n}}}$$

Wird das zweite System abgesondert berechnet, so ist auf gleiche Weise

$$[L]^{(\mathfrak{n})} = \frac{[A]_{\mathfrak{n}}\,[v]_{\mathfrak{n}}}{[V]^4_{\mathfrak{n}}}$$

$$[L]_{\mathfrak{m}} = \sum_{\mathfrak{n}}{}_{1}^{\mathfrak{m}}\,[L]^{(\mathfrak{n})} = \sum_{\mathfrak{n}}{}_{1}^{\mathfrak{m}} \frac{[A]_{\mathfrak{n}}\,[v]_{\mathfrak{n}}}{[V]^4_{\mathfrak{n}}}$$

Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von L in den folgenden:

$$L = L_m + \frac{v_m}{V^4_{m+1}} \cdot [L]_{\mathfrak{m}}$$

L_m und $[L]_m$ bezeichnen die Werthe von L, welche für das erste und zweite System abgesondert berechnet sind, $[L]_m$ ist ferner mit einem Factor multiplicirt, welcher mit dem in (c) von Nro. 99 angegebenen übereinstimmt, wenn man das dortige V_m mit V_{m+1} verwechselt und $\mathfrak{l} = 1$ setzt. Die Summe von diesem Producte und L_m bildet sodann den für das ganze Instrument berechneten Werth von L. Dasselbe gilt von allen ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten, wonach wir die folgenden Werthe derselben erhalten:

$$\left.\begin{aligned} L &= L_m + \frac{v_m}{V^4_{m+1}} \cdot [L]_m \\ M &= M_m + \frac{1}{V^2_{m+1}} \cdot [M]_m \\ G &= G_m + \frac{1}{v_m} \cdot [G]_m \\ &\text{ebenso } H,\ N \text{ und } O \\ P &= P_m + \frac{V^2_{m+1}}{v^2_m} \cdot [P]_m \\ S &= S_m + \frac{1}{V^2_{m+1}} \cdot [S]_m \\ T &= T_m + \frac{1}{v_m} \cdot [T]_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Hierbei muss bemerkt werden, dass die hypothetische Fläche nichts zu den Werthen von $[L]_m$ etc. beiträgt, weil sie der Voraussetzung nach keine Brechung verursacht, mithin $[L]^{(I)}$ etc. $= 0$ sind. Die in $[L]_m$ etc. enthaltenen Summen können daher von $\mathfrak{n} = II$ bis $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ genommen, d. h. auf die *wirklichen* Flächen des zweiten Systems, mit Weglassung der hypothetischen, beschränkt werden.

Die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Coefficienten lassen keine so leichte Reduction zu, da sie nicht bloss aus der Summe der den verschiedenen brechenden Flächen entsprechenden Glieder bestehen, sondern dergleichen Summen schon in den jeder einzelnen Fläche zugehörigen Gliedern als Factoren enthalten und von neuem Summationen erfordern, um endlich zu dem Werthe jener Coefficienten zu gelangen. Es ist daher nothwendig, jeden Factor nach der angegebenen Methode zu reduciren und dann die Summationen vorzunehmen. Ich unterlasse, die hierdurch entstehenden weitläuftigen Formeln zu schreiben, weil es zweckmässig erscheint, diess bis zu den speciellen Anwendungen zu verschieben, um alsdann sogleich diejenigen Abkürzungen der Formeln eintreten zu lassen, welche die besonderen Relationen möglich machen.

Besteht das zweite System lediglich aus Ocularen, so fallen in Bezug auf dasselbe alle Coefficienten der dritten Ordnung, mit Ausnahme der dem farbigen Rande entsprechenden, weg, weil die übrigen bloss für das Objectiv entwickelt wurden und bei den Ocularen nach den angenommenen Grundsätzen vernachlässigt werden.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Relationen aufzusuchen, welche in Bezug auf R, r, φ und Φ bei den zwei Systemen stattfinden.

Für die $(m+I)^{te}$ Fläche ist vermöge (a) von Nro. 98 und (a) von Nro. 99

$$r_{m+I} = \frac{R}{V_{m+I}}$$

$$\Phi_{m+I} = \frac{V_{m+I}\,\varphi}{\nu_{m+I}} = \frac{V_{m+I}\,\varphi}{\nu_m}$$

weil $n_{m+I} = 1$, mithin $\nu_{m+I} = \nu_m$ ist.

Bei dem zweiten Systeme ist die $(m+I)^{te}$ Fläche die erste und das derselben zugehörige Bild als der Gegenstand zu betrachten, wenn jenes System abgesondert berechnet wird; man hat daher

$$\left.\begin{aligned}[R] &= r_{m+I} = \frac{R}{V_{m+I}}\\ [\varphi] &= \Phi_{m+I} = \frac{V_{m+I}\,\varphi}{\nu_m}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

Ferner ist in Bezug auf die letzte Fläche des zweiten Systems

$$\left.\begin{aligned}[r] &= \frac{[R]}{[V]_m}\\ [\Phi] &= \frac{[V]_m}{[\nu]_m}\,[\varphi]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

wodurch jene Grössen wechselseitig durch einander ausgedrückt werden können.

In den Ausdrücken von Π beziehen sich R und φ auf die erste Fläche und sind folglich einerlei mit den Grössen, welche hier mit denselben Buchstaben bezeichnet werden. Dagegen entsprechen r und Φ in jenen Ausdrücken der letzten Fläche des Instrumentes; daher man sie nach der obigen Bezeichnung mit $[r]$ und $[\Phi]$ verwechseln muss.

Wir werden bei den speciellen Anwendungen sehen, dass es oft bequem ist, bei der abgesonderten Berechnung des zweiten Systems eine Einheit des Längenmaasses zu Grund zu legen, welche von der bei dem ersten Systeme gebrauchten verschieden ist, und ausserdem die sämmtlichen zum zweiten Systeme gehörigen V durch eine beständige Grösse zu dividiren. Bezeichnen wir daher durch

$\mathfrak{l}$ den Factor, womit die dem zweiten Systeme zugehörigen linearischen Grössen multiplicirt werden müssen, um sie auf die bei dem ersten Systeme gebrauchte Einheit des Längenmaasses zu reduciren,

$\mathfrak{v}$ die Constante, durch welche die zum zweiten Systeme gehörigen V dividirt worden sind,

so müssen wir die Coefficienten des zweiten Systems mit Factoren multipliciren, welche aus (c) von Nro. 99 erhalten werden, wenn man darin V_m mit $\mathfrak{v}$ verwechselt und $\nu_m = 1$ setzt.

Hiernach werden vermöge (g) die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}
L &= L_m + \frac{\nu_m}{V^4_{m+I}\mathfrak{v}^4\mathfrak{l}^3}\cdot[L]_m \\
M &= M_m + \frac{1}{V^2_{m+I}\mathfrak{v}^2\mathfrak{l}^2}\cdot[M]_m \\
G &= G_m + \frac{1}{\nu_m\,\mathfrak{l}}\cdot[G]_m \\
&\text{ebenso } H,\ N \text{ und } O \\
P &= P_m + \frac{V^2_{m+I}\mathfrak{v}^2}{\nu_m^2}\cdot[P]_m \\
S &= S_m + \frac{1}{V^2_{m+I}\mathfrak{v}^2\mathfrak{l}}\cdot[S]_m \\
T &= T_m + \frac{1}{\nu_m}\cdot[T]_m
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

In Ansehung der ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Coefficienten gelten auch hier die oben gemachten Bemerkungen.

Den Coefficienten $\mathfrak{l}$ findet man, wenn er nicht ohnehin bekannt ist, sehr leicht dadurch, dass man eine den beiden Systemen gemeinschaftliche Grösse für jedes derselben berechnet und die auf diese Weise erhaltenen Werthe in einander dividirt. Eine solche Grösse ist $g_{m\,I} = (g - \overset{''}{g})_m$, welche in Bezug auf das zweite System mit $[g]_I$ bezeichnet wurde. Wählt man daher diese zur Bestimmung von $\mathfrak{l}$, so wird

$$\mathfrak{l} = \frac{g_{m+I}}{[g]_I} = \frac{(g - \overset{''}{g})_m}{[g]_I} \quad \ldots\ldots \quad (l)$$

Vergleichung der Undeutlichkeit bei mehreren Instrumenten mit gleichen und verschiedenen Vergrösserungen.

102) Am Ende von Nro. 90 haben wir bereits bemerkt, dass die für die mittlere Undeutlichkeit gefundene Formel durch Veränderung ihres gemeinschaftlichen Factors auf die verschiedenen Methoden, die Deutlichkeit zu schätzen, angewandt werden kann. Es ist jedoch einleuchtend, dass der Unterschied, welchen wir früher zwischen absoluter und relativer Deutlichkeit zu machen genöthigt waren, um eine in allen Fällen brauchbare Bestimmung über die Lage des Bildes zu erhalten, nicht berücksichtigt zu werden braucht, sobald wir mehrere Einrichtungen eines Instrumentes mit einander vergleichen, welche einerlei Vergrösserung hervorbringen, um die vortheilhafteste derselben auszuwählen.

Wir haben nämlich in (k) von Nro. 85 gefunden, dass die relative Undeutlichkeit erhalten wird, wenn man die absolute Undeutlichkeit durch das Quadrat der absoluten Vergrösserung dividirt, welche bei dem letzten Bilde stattfindet. Wird nun dieses Bild von den Instrumenten, welche mit einander verglichen werden sollen,

auf einer Projectionsfläche entworfen, worunter bei den Instrumenten der zweiten Art auch die Netzhaut des hinter ihnen befindlichen Auges begriffen wird, so zeigen die Formeln (g) und (u) von Nro. 64, dass die absolute Vergrösserung des Bildes unveränderlich ist, wenn bei jenen Instrumenten eine gleiche Vergrösserung vorausgesetzt wird, mag darunter die absolute oder die scheinbare verstanden werden. Hieraus folgt, dass es in dem gegenwärtigen Falle gleichgültig ist, ob man die erwähnte Division vornimmt oder nicht, weil der Divisor eine beständige Grösse ist, welche bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nicht in Betracht kommt.

Untersuchen wir ferner bei den Instrumenten der zweiten Art das letzte von ihnen hervorgebrachte Bild unmittelbar, ohne es auf die Netzhaut zu reduciren, so kommt nichts darauf an, ob wir uns hierzu der Winkelabweichungen bedienen, oder das Bild auf einer Projectionsebene entworfen denken, welche sich in der nach Nro. 91 bestimmten mittleren Entfernung von der letzten brechenden Fläche befindet. Beide Voraussetzungen unterscheiden sich nämlich nur dadurch, dass bei der letzteren der Ausdruck von Π mit z^2 multiplicirt ist, welcher Factor bei der ersteren Voraussetzung wegfällt; da aber derselbe eine beständige Grösse ist, so braucht er nicht berücksichtigt zu werden.

Sobald wir daher nur solche Einrichtungen eines Instrumentes vergleichen, welche einerlei Vergrösserung hervorbringen, können wir in allen Fällen die oben gefundenen Ausdrücke von Π ungeändert beibehalten; dabei ist es jedoch gestattet, alle beständige Grössen wegzulassen, welche in den gemeinschaftlichen Factoren derselben vorkommen.

Anders verhält sich dagegen die Sache, wenn verschiedene Instrumente, oder verschiedene Einrichtungen desselben Instrumentes mit einander verglichen werden sollen, bei denen die Vergrösserung nicht einerlei ist. Wir haben nämlich in Nro. 85 auseinander gesetzt, dass man bei einer stärkeren Vergrösserung, abgesehen von der Grösse des Bildes, nur dann an demselben mehr erkennen kann, als bei einer schwächeren Vergrösserung, wenn sich bei der ersteren die den einzelnen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder verhältnissmässig mehr von einander absondern, mithin die relative Undeutlichkeit kleiner ist, als bei der schwächeren Vergrösserung. Um daher zu untersuchen, ob eine stärkere Vergrösserung in Vergleichung mit einer als brauchbar befundenen schwächeren von Nutzen seyn kann, muss man bei beiden die relative Undeutlichkeit berechnen und als eine nothwendige Forderung, welche an die stärkere Vergrösserung gemacht werden muss, die ansehen, dass die relative Undeutlichkeit bei derselben kleiner als bei der schwächeren Vergrösserung ist; es reicht jedoch hin, im höchsten Falle eine gleiche absolute Deutlichkeit zu verlangen. Soll dagegen eine stärkere Vergrösserung zu Grund gelegt und danach eine schwächere construirt

werden, so ist eine gleiche absolute Deutlichkeit die geringste Forderung und eine gleiche relative Deutlichkeit die höchste Forderung, welche an die schwächere Vergrösserung gemacht werden kann. Demnach sind also die gleiche relative und die gleiche absolute Undeutlichkeit als die Grenzen zu betrachten, innerhalb welcher die Undeutlichkeit bei verschiedenen Vergrösserungen fallen muss, wenn dieselben brauchbar seyn sollen.

Uebrigens dürfen wir nicht vergessen, dass bei den Instrumenten ausser der Deutlichkeit noch andere Dinge in Betracht kommen, z. B. eine den Vergrösserungen angemessene Lichtstärke etc., welche daher benutzt werden müssen, um zu überlegen, wie weit man sich in jedem einzelnen Falle von den angegebenen Grenzen entfernen darf.

Instrumente mit mehreren Oculareinsätzen.

103) Die Fernröhre und zusammengesetzten Microscope haben oft die Einrichtung, dass bei unverändertem Objective mehrere Oculareinsätze gebraucht werden sollen. In diesem Falle ist es nicht möglich, die Dimensionen des Objectives so zu bestimmen, dass der Ausdruck von π für jeden Oculareinsatz besonders zu einem Minimum wird, weil die von den Ocularen herrührenden Grössen für jeden Oculareinsatz andere Werthe bekommen, daher auch das Objectiv für jeden derselben eine andere Einrichtung erhalten müsste, um dem Minimum zu entsprechen. Es bleibt mithin nichts Anderes übrig, als das Objectiv so zu construiren, dass π für sämmtliche Oculareinsätze zusammengenommen zu einem Minimum wird. Nach der Methode der kleinsten Quadrate gelangt man dazu, wenn man das einem jeden Oculareinsatze zugehörige π mit einem Factor multiplicirt, welcher das demselben beigelegte Gewicht ausdrückt und als eine Function der Vergrösserung betrachtet werden kann, wenn man ferner die Summe der so erhaltenen Producte zu einem Minimum macht.

Hierzu ist es nothwendig, in den ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten L, M, G, H, S und T, in denen die von den Ocularen herrührenden Glieder allein vorkommen, die letzteren von denjenigen abzusondern, welche sich auf das Objectiv beziehen. Nennt man daher

(V) das einem jeden Oculareinsatze beigelegte Gewicht,

L den dem Objective zugehörigen Theil von L_{I},

$L_{\prime}$ den von den Ocularen herrührenden Theil von L_{I}

und ebenso in Bezug auf die übrigen Coefficienten, wobei jedoch $V_{\prime}$ und $v_{\prime}$ die bisherige Bedeutung behalten, bezeichnet man ferner durch

Σ die Summe aller ähnlichen Grössen für sämmtliche Oculareinsätze,

so muss man in (d) von Nro. 97 L, M etc. mit $(L + L_{\prime})$, $(M + M_{\prime})$ etc. verwechseln, sodann den ganzen Ausdruck mit (V) multipliciren

und die durch Σ angedeutete Summe nehmen, um die Summe der n für sämmtliche Oculareinsätze mit Rücksicht auf die ihnen beigelegten Gewichte zu erhalten.

Da wir jedoch bisher stets das arithmetische Mittel aus der Summe der Quadrate der Fehler mit Rücksicht auf die ihnen beigelegten Gewichte genommen haben, so können wir auch hier so verfahren, wozu es hinreicht, den auf die vorhergehende Weise erhaltenen Ausdruck durch $\Sigma(V)$ zu dividiren.

Wir müssen aber hierbei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Hauptblendung an dem Objective oder an den Ocularen angebracht ist; ich betrachte jedoch gegenwärtig nur den ersten derselben, da bei dem zweiten zum Theil andere Principien in Anwendung kommen. In jenem Falle ist aus (d) von Nro. 22 ersichtlich, dass K_1, Y_1 und X_1 und mithin auch K und R bloss von dem Objective abhängen und daher ebenso wie L etc. in Bezug auf das Zeichen Σ constant sind. Dasselbe gilt von den Coefficienten Q, s, U, (L), (M), (N), (S), u, und von t in dem Gliede $(T+\eta t)$, da in ihnen bloss die von dem Objective herrührenden Glieder beibehalten worden sind.

Dagegen ändern sich φ, W und t in dem Gliede $\frac{\theta t^2 \varphi^2}{2}$ bei jedem Ocularеinsatze, so dass diese Grössen, ebenso wie L_r etc., in Ansehung des Zeichens Σ als veränderlich betrachtet werden müssen.

Nimmt man nun in (d) von Nro. 97 die angegebenen Substitutionen vor, multiplicirt den ganzen Ausdruck mit (V), nimmt die angedeutete Summe und dividirt dieselbe durch $\Sigma(V)$, so entstehen dadurch Glieder von zweierlei Form.

Die ersten derselben enthalten die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen L, M, G, H, S und T und haben mit Beiseitsetzung des gemeinschaftlichen beständigen Factors $\left(\frac{V_r z}{v v_r}\right)^2$ die Gestalt:

$$\frac{\Sigma A a (B+b)^2}{\Sigma(V)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wobei A und B in Bezug auf das Zeichen Σ constant, a und b dagegen veränderlich sind. Durch die Entwickelung des zweitheiligen Quadrates entstehen hieraus die Glieder:

$$\frac{A \Sigma a}{\Sigma(V)}\left[B^2 + \frac{2 B \Sigma ab}{\Sigma a} + \frac{\Sigma ab^2}{\Sigma a}\right],$$

welche durch Addition und Subtraction von $\left(\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}\right)^2$ in dem inclavirten Factor auch unter die Gestalt gebracht werden können:

$$\frac{A \Sigma a}{\Sigma(V)}\left\{\left[B + \frac{\Sigma ab}{\Sigma a}\right]^2 + \frac{\Sigma ab^2}{\Sigma a} - \left(\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}\right)^2\right\}$$

Die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks enthalten bloss Grössen, welche in Bezug auf das Objectiv constant sind. Da nun

der Zweck der gegenwärtigen Untersuchung nur der ist, die Dimensionen des Objectivs so zu bestimmen, dass es den Oculareinsätzen zusammengenommen so gut als möglich entspricht, wobei vorausgesetzt wird, dass die Dimensionen der Oculare bereits auf andere Weise bestimmt worden sind, so haben jene beständigen Glieder keinen Einfluss auf das Minimum von Π und können daher weggelassen werden. Hierdurch reducirt sich der vorhergehende Ausdruck auf

$$\frac{A\Sigma a}{\Sigma(V)}\left[B+\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

woraus ersichtlich ist, dass jedes Glied von der in (a) angenommenen Form ein correspondirendes giebt, welches daraus erhalten wird, wenn man a mit Σa, b mit $\frac{\Sigma ab}{\Sigma a}$ verwechselt und das Summationszeichen weglässt.

Behandeln wir hiernach die verschiedenen Glieder, welche in dem Ausdrucke von Π vorkommen, so giebt das erste derselben das ihm entsprechende Glied

$$\frac{R^6}{36}\frac{\Sigma(V)V^2}{\Sigma(V)}\left[L+\frac{6}{5}QR^2+(L)\Delta'+\frac{\Sigma(V)V^2(L_,+3QK^2\varphi^2)}{\Sigma(V)V^2}\right]^2$$

das zweite giebt

$$\frac{R^4}{12}\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^2}{\Sigma(V)}\left[M+3QKR^2+(M)\Delta'+\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^2(M_,+4QK^3\varphi^2)}{\Sigma(V)V^2\varphi^2}\right]^2$$

das dritte

$$\frac{R^2}{3}\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^4}{\Sigma(V)}\left[G+2QK^2R^2+(N)\Delta'+\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^4\left(G_,+\frac{3}{2}QK^4\varphi^2\right)}{\Sigma(V)V^2\varphi^4}\right]^2$$

das vierte

$$\frac{R^2}{3}\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^4}{\Sigma(V)}\left[H+\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^4 . H_,}{\Sigma(V)V^2\varphi^4}\right]^2 \qquad (c)$$

das fünfte

$$\frac{e}{2}R^2\frac{\Sigma(V)V^2}{\Sigma(V)}\left[S+{}_\eta s+\frac{2}{3}UR^2+2(S)\Delta'+\frac{\Sigma(V)V^2(S_,+UK^2\varphi^2)}{\Sigma(V)V^2}\right]^2$$

das sechste

$$\frac{e}{2}\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^2}{\Sigma(V)}\left[T+{}_\eta t+UKR^2-(u)\Delta'+\frac{\Sigma(V)V^2\varphi^2\left(T_,+\frac{2}{3}W\varphi^2\right)}{\Sigma(V)V^2\varphi^2}\right]^2$$

Der zweite Theil der in dem Ausdrucke von Π enthaltenen Glieder begreift diejenigen in sich, welche ursprünglich zur dritten Ordnung gehören und mit $(L)^2$, $(M)^2$, $(N)^2$, $(S)^2$, u^2, Q^2, s^2, U^2, t^2 oder W^2 multiplicirt sind. Sie haben mit Ausnahme der beiden

letzten und mit Beiseitsetzung des gemeinschaftlichen Factors $\left(\frac{V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2$ sämmtlich die Form:

$$\frac{\Sigma A(V) V^2 \phi^n}{\Sigma(V)}$$

wobei A in Bezug auf das Zeichen Σ constant ist. Sie geben daher die correspondirenden Glieder:

$$A \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^n}{\Sigma(V)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

In den beiden letzten jener Glieder endlich sind t^2 und W^2 veränderlich; es entstehen mithin aus denselben mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\left(\frac{V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2$ die folgenden:

$$\frac{\theta}{2} \frac{\Sigma(V) V^2 t^2 \phi^2}{\Sigma(V)} + \frac{\varepsilon}{36} \frac{\Sigma(V) V^2 W^2 \phi^6}{\Sigma(V)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Sammeln wir jetzt die in (c), (d) und (e) erhaltenen Glieder, indem wir in (d) statt A und n die ihnen entsprechenden Werthe aus (d) von Nro. 97 substituiren, setzen wir sodann $\left(\frac{V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2 \frac{\Sigma(V) V^2}{\Sigma(V)}$ als gemeinschaftlichen Factor heraus, behalten den Buchstaben n für den hiernach umgeänderten Werth dieser Grösse bei und gebrauchen zur Abkürzung die Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned}
V'^2 &= \frac{\Sigma(V) V^2}{\Sigma(V)} \\
\phi_n &= \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^n}{\Sigma(V) V^2} \\
L' &= \frac{\Sigma(V) V^2 L_,}{\Sigma(V) V^2} \\
M' &= \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^2 M_,}{\Sigma(V) V^2 \phi^2} \\
G' &= \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^4 G_,}{\Sigma(V) V^2 \phi^4} \\
H' &= \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^4 H_,}{\Sigma(V) V^2 \phi^4} \\
S' &= \frac{\Sigma(V) V^2 S_,}{\Sigma(V) V^2} \\
T' &= \frac{\Sigma(V) V^2 \phi^2 T_,}{\Sigma(V) V^2 \phi^2} \\
t' &= \frac{\Sigma(V) V^2 t^2 \phi^2}{\Sigma(V) V^2} \\
W' &= \frac{\Sigma(V) V^2 W \phi^4}{\Sigma(V) V^2 \phi^2} \\
W'' &= \frac{\Sigma(V) V^2 W^2 \phi^6}{\Sigma(V) V^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

so erhalten wir den folgenden Ausdruck für die mittlere Undeutlichkeit des Instrumentes im Mittel für die verschiedenen Entfernungen des Gegenstandes und die verschiedenen Oculareinsätze:

$$
u = \left(\frac{V'V_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \left\{
\begin{aligned}
&\frac{R^6}{36}\left[L+L'+Q\left(\frac{6}{5}R^2+3K^2\varphi_2\right)+(L)\Delta'\right]^2\\
&+\frac{(L)^2R^6\Delta^2}{36}\\
&+\frac{R^4\varphi_2}{12}\left[M+M'+QK\left(3R^2+\frac{4K^2\varphi_4}{\varphi_2}\right)+(M)\Delta'\right]^2\\
&+\frac{(M)^2R^4\varphi_2\Delta^2}{12}\\
&+\frac{R^2\varphi_4}{3}\left[G+G'+QK^2\left(2R^2+\frac{3K^2\varphi_6}{2\varphi_4}\right)+(N)\Delta'\right]^2\\
&+\frac{(N)^2R^2\varphi_4\Delta^2}{3}\\
&+\frac{R^2\varphi_4}{3}[H+H']^2\\
&+\frac{\varepsilon}{2}R^2\left[S+S'+{}_{\eta}s+U\left(\frac{2}{3}R^2+K^2\varphi_2\right)+2(S)\Delta'\right]^2\\
&+2\varepsilon(S)^2R^2\Delta^2\\
&+\frac{\varepsilon\varphi_2}{2}\left[T+T'+{}_{\eta}t+\frac{2}{3}W'+UKR^2-(u)\Delta'\right]^2\\
&+\frac{\varepsilon(u)^2\varphi^2\Delta^2}{2}\\
&+Q^2\left\{\begin{aligned}&\frac{R^{10}}{600}+\frac{R^8K^2\varphi_2}{20}+\frac{R^6K^4\varphi_4}{4}\\&+\frac{R^4K^6\varphi_6}{4}+\frac{R^2K^8\varphi_8}{20}\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{\theta s^2R^2}{2}\\
&+\varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36}+\frac{R^4K^2\varphi_2}{3}+\frac{R^2K^4\varphi_4}{3}\right]\\
&+\frac{\theta}{2}t'+\frac{\varepsilon W''}{36}
\end{aligned}
\right\} \quad (g)
$$

Die Vergleichung der vorhergehenden Formel mit (d) von Nro. 97 zeigt, dass die erstere aus der letzteren durch mehrere Verwechselungen entstanden ist.

Zuerst hat sich die Grösse V, welche für einen Oculareinsatz galt und bei Fernröhren die Vergrösserung ausdrückt, nunmehr in V' verwandelt. Sodann wurde oben vorausgesetzt, dass die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten L etc. für jeden Oculareinsatz aus den beiden Theilen L und $L_{,}$ etc. bestehen, wovon der erste sich auf das Objectiv, der zweite auf die Oculare bezieht. An die Stelle von $L_{,}$ etc. sind jetzt L' etc. getreten.

Ferner sind die Potenzen von φ mit den daraus abgeleiteten Grössen φ_{n} und zum Theil mit Quotienten von diesen vertauscht worden.

Endlich haben die auf den farbigen Rand sich beziehenden Correctionen $W\varphi^2$, $t^2\varphi^2$ und $W^2\varphi^6$ die veränderten Werthe W', t' und W'' erhalten.

Alle diese Grössen können vermittelst der Formeln (f) berechnet werden, wenn die Dimensionen eines jeden Oculareinsatzes zuvor bestimmt worden sind. Sie sind zu betrachten, als gehörten sie einem mittleren Oculareinsatze zu, welcher bei Berechnung des Objectivs gebraucht werden muss, um die Dimensionen desselben auf eine solche Weise zu bestimmen, dass es den sämmtlichen Oculareinsätzen zusammengenommen im Mittel so gut wie möglich entspricht, mit Rücksicht auf die Gewichte, welche den letzteren beigelegt werden. Macht man daher den Ausdruck (g) von Π in Bezug auf die Dimensionen des Objectivs zu einem Minimum, so wird die Undeutlichkeit, welche er ausdrückt, im Mittel für alle Oculareinsätze so klein als möglich.

Wir müssen uns dabei erinnern, dass sich jener Ausdruck unmittelbar auf die absolute Undeutlichkeit bezieht. Um ihn auf die relative Undeutlichkeit anzuwenden, muss man $\frac{V V_{,} z}{v v_{,}}$ mit c_1 verwechseln, mithin

$$V^2 = \frac{v^2 v_{,}^2 c_1^2}{V_{,}^2 z^2}$$

setzen, welcher Werth in Bezug auf das Zeichen Σ constant ist.

Sollen alle Oculareinsätze gleich berücksichtigt werden, so müssen sie einerlei Gewicht erhalten, wodurch

$$(V) = 1$$

wird.

Bezeichnen wir durch

m die Anzahl der Oculareinsätze,

so ist bei dieser Annahme

$$\Sigma(V) = m$$

Hierdurch erhalten wir aus (f) die folgenden Formeln für den Fall, dass bei gleicher Berücksichtigung der verschiedenen Oculareinsätze, die absolute Undeutlichkeit für sie zusammengenommen so klein als möglich werden soll:

$$\left.\begin{aligned} V'^2 &= \frac{\Sigma V^2}{m} \\ \varphi_{\text{n}} &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^{\text{n}}}{\Sigma V^2} \\ L' &= \frac{\Sigma V^2 L_{,}}{\Sigma V^2} \\ M' &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^2 M_{,}}{\Sigma V^2 \varphi^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

$$\left.\begin{aligned}
G' &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^4 G_,}{\Sigma V^2 \varphi^4}\\
H' &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^4 H_,}{\Sigma V^2 \varphi^4}\\
S' &= \frac{\Sigma V^2 S_,}{\Sigma V^2}\\
T' &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^2 T_,}{\Sigma V^2 \varphi^2}\\
t' &= \frac{\Sigma V^2 t^2 \varphi^2}{\Sigma V^2}\\
W' &= \frac{\Sigma V^2 W \varphi^4}{\Sigma V^2 \varphi^2}\\
W'' &= \frac{\Sigma V^2 W^2 \varphi^6}{\Sigma V^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

Setzen wir dagegen voraus, dass sämmtliche Ocularеinsätze, bei gleichen Gewichten, zusammengenommen die kleinstmögliche relative Undeutlichkeit erhalten sollen, so geben die Formeln (f)

$$\left.\begin{aligned}
V'^2 &= \frac{v^2\, v_,^2\, c_1^2}{V_,^2 z^2}\\
\varphi_n &= \frac{\Sigma \varphi^n}{m}\\
L' &= \frac{\Sigma L_,}{m}\\
M' &= \frac{\Sigma \varphi^2 M_,}{\Sigma \varphi^2}\\
G' &= \frac{\Sigma \varphi^4 G_,}{\Sigma \varphi^4}\\
H' &= \frac{\Sigma \varphi^4 H_,}{\Sigma \varphi^4}\\
S' &= \frac{\Sigma S_,}{m}\\
T' &= \frac{\Sigma \varphi^2 T_,}{\Sigma \varphi^2}\\
t' &= \frac{\Sigma t^2 \varphi^2}{m}\\
W' &= \frac{\Sigma W \varphi^4}{\Sigma \varphi^2}\\
W'' &= \frac{\Sigma W^2 \varphi^6}{m}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass die stärkeren Vergrösserungen mehr bei der Annahme der ersten als der zweiten der vorhergehenden Werthe berücksichtigt werden, indem diejenigen Grössen, welche in den Summen der letzteren vorkommen, jedesmal mit V^2 multiplicirt werden müssen, um die entsprechenden Grössen in Bezug auf die ersteren zu erhalten.

Instrumente, bei welchen nicht sämmtliche Strahlenbündel ungehinderten Durchgang finden.

104) Bei den bisherigen Untersuchungen wurde angenommen, dass die Strahlenbündel, welche von sämmtlichen, innerhalb des Gesichtsfeldes liegenden Punkten des Gegenstandes ausgehen und deren Lage und Querschnitt durch die Hauptblendung bestimmt werden, ungehinderten Durchgang durch das Instrument finden, die Lichtstärke mithin für das ganze Gesichtsfeld unveränderlich ist. Wir haben jedoch in Nro. 59 und 65 gesehen, dass jene Annahme in zwei Fällen unstatthaft ist, einmal wenn kein wirkliches Bild in dem Instrumente zu Stande kommt, und dann, wenn zwar das letztere stattfindet, der freie Durchgang sämmtlicher Strahlenbündel aber durch eine zu enge Blendung verhindert wird. In beiden Fällen ist die Lichtstärke nur in dem inneren Theile des Gesichtsfeldes unveränderlich, dessen Halbmesser vermittelst der Formeln (f) von Nro. 59 berechnet werden kann; von da an nimmt sie aber bis zur äussersten Grenze des Gesichtsfeldes fortwährend ab. Untersuchen wir daher, welchen Einfluss dieser Umstand auf die Deutlichkeit äussert. Zu dem Ende sey

ϱ der Halbmesser der Blendung, welche im ersten Falle das Gesichtsfeld begrenzt, im zweiten dagegen eine für den Durchgang der sämmtlichen Strahlenbündel unzureichende Oeffnung hat,

φ der einem beliebigen Punkte des Gegenstandes zugehörige Werth von φ_1,

v die in der Ebene der yz liegende Ordinate des Durchschnittspunktes zwischen dem durch φ bestimmten Hauptstrahle und der Ebene der Blendung,

ϱ' die in der Ebene der Blendung gemessene Entfernung zwischen den Durchschnittspunkten des Hauptstrahles und des von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden allgemeinen farbigen Strahles,

Ψ der Winkel, welchen ϱ' mit der Verlängerung von v macht.

Zuerst ist es nöthig, die Relationen zwischen v, ϱ' und Ψ und denjenigen Grössen aufzusuchen, durch welche die Lage der Strahlen bisher bestimmt wurde. Diese Relationen sind in den Gleichungen (a) und (b) von Nro. 59 enthalten, wenn darin $\acute{R}_1$, φ_1, $\acute{\varrho}_i$ und $\overset{\prime\prime}{v}_i$ nach der gegenwärtigen Bezeichnung mit R, φ, ϱ' und v verwechselt werden. Da die übrigen Grössen, welche in jenen Gleichungen vorkommen, bei einerlei Einrichtung des Instrumentes unveränderlich sind, so ist ersichtlich, dass die daraus folgenden Werthe von R und φ unter die Gestalt gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned} R &= \mathfrak{r}\varrho' \\ \varphi &= \mathfrak{r}\mathfrak{f}v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wobei $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ zwei Constanten bezeichnen.

Der Winkel Ψ ist einerlei mit dem, welcher bisher durch diesen Buchstaben bezeichnet wurde.

Nach den allegirten Gleichungen ist, je nachdem die Stellung der Blendung auf die ihr vorhergehende oder folgende Fläche bezogen wird,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{r} &= \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_{\rm i} = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_{\rm i+1} \\
\mathfrak{f} &= \frac{\nu_{\rm i}\,(g+\zeta)_{\rm i}}{V_{\rm i}^2\, g_{\rm i}^2\left[1-\left(1-\frac{\nu_{\rm i} K_{\rm i}}{V_{\rm i}^2\, g_{\rm i}}\right)\left(\frac{g+\zeta}{g}\right)_{\rm i}\right]} \\
&= -\frac{\nu_{\rm i}\,(g-g'')_{\rm i}\,(g+\zeta)_{\rm i}}{V_{\rm i}^2\, g_{\rm ii}^2\,(g''+\zeta)_{\rm i}} \\
&= \frac{\nu_{\rm i}\,(c-\zeta')_{\rm i+1}}{V_{\rm i+1}^2\, c_{\rm i+1}^2\left[1-\left(1-\frac{\nu_{\rm i} K_{\rm i+1}}{V_{\rm i+1}^2\, c_{\rm i+1}}\right)\left(\frac{c-\zeta'}{c}\right)_{\rm i+1}\right]} \\
&= -\frac{\nu_{\rm i}\,(c-c'')_{\rm i+1}\,(c-\zeta')_{\rm i+1}}{V_{\rm i+1}^2\, c_{\rm i+1}^2\,(c''-\zeta')_{\rm i+1}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{(b)}$$

worin statt i der Index der, der Blendung vorhergehenden brechenden Fläche zu nehmen ist.

Substituirt man die Werthe (a) in den Gleichungen (d) von Nro. 68, so behalten dieselben in Bezug auf die veränderlichen Grössen einerlei Gestalt; nur sind darin

$$\left.\begin{array}{lll}
R & \text{mit} & \varrho' \\
\varphi & \ldots & \upsilon \\
K & \ldots & K\mathfrak{f} \\
L & \ldots & L\mathfrak{r}^3 \\
M & \ldots & M\mathfrak{r}^3\mathfrak{f} \\
N & \ldots & N\mathfrak{r}^3\mathfrak{f}^2 \\
O & \ldots & O\mathfrak{r}^3\mathfrak{f}^2 \\
Q & \ldots & Q\mathfrak{r}^5 \\
S & \ldots & S\mathfrak{r} \\
s & \ldots & s\mathfrak{r} \\
U & \ldots & U\mathfrak{r}^3 \\
T & \ldots & T\mathfrak{r}\mathfrak{f} \\
t & \ldots & t\mathfrak{r}\mathfrak{f} \\
W & \ldots & W\mathfrak{r}^3\mathfrak{f}^3 \\
J & \ldots & J\mathfrak{r}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

verwechselt. Geben wir daher den beständigen Coefficienten diese neuen Werthe, so können wir die erwähnten Gleichungen ungeändert beibehalten und nur darin R mit ϱ' und φ mit υ verwechseln. Hierdurch werden die Gleichungen der gebrochenen Strahlen durch lauter Grössen ausgedrückt, welche sich auf die Blendung beziehen.

Um auf den gegenwärtigen Fall die in Nro. 79 gebrauchte Methode anzuwenden, müssen wir aus jenen Gleichungen zuerst

$$r'^2 = y'^2 + x'^2$$

berechnen, sodann diese Grösse mit $\lambda\, d\, \delta\nu$ multipliciren und innerhalb der angegebenen Grenzen integriren, wodurch auch hier alle Glieder wegfallen, welche die erste Potenz von $\delta\nu$ enthalten, die übrigen Potenzen $\delta\nu^m$ dagegen sich in δ_m verwandeln.

Der auf diese Weise abgeänderte Ausdruck von r'^2, welchen wir oben mit r''^2 bezeichnet haben, muss nunmehr mit

$$\mathfrak{A}\, d\,.\, R^2\, d\Psi = \mathfrak{A}\, \mathrm{r}^2\, d\,.\, \varrho'^2\, d\Psi$$

multiplicirt und zweimal, sowohl in Bezug auf Ψ als auf ϱ', integrirt werden. Hinsichtlich der Grenzen dieser Integrale können wir jedoch die folgenden Bemerkungen machen.

So lange nur von einem leuchtenden Punkte die Rede ist, hat φ und folglich auch v einen bestimmten Werth. Die letztere Grösse giebt die von der Axe des Instrumentes aus gemessene Entfernung an, in welcher die Axe des, jenem Werthe von φ und der Oeffnung und Stellung der Hauptblendung entsprechenden Strahlenkegels die Ebene der hier betrachteten Blendung durchschneidet. Denken wir uns nun den Querschnitt des Strahlenkegels an dieser Stelle in unzählig viele concentrische Ringe getheilt, so drücken ϱ' und $d\varrho'$ den Halbmesser und die Breite eines solchen Ringes aus. Da ferner der Halbmesser der Blendung $= \varrho$ ist, so liegt der erwähnte Ring ganz innerhalb der Oeffnung der letzteren, so lange ϱ' kleiner als $(\varrho - v)$ ist. In diesem Falle gehen sämmtliche zu dem Ringe gehörige Strahlen ungehindert durch das Instrument; die Integrale in Bezug auf Ψ müssen daher ebenso wie in Nro. 79 auf den ganzen Ring ausgedehnt, d. h. innerhalb der Grenzen $\Psi = 0$ und $\Psi = 2\pi$ genommen werden, wodurch auch hier die darin enthaltenen, von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ abhängigen Glieder wegfallen, in den übrigen aber sich Ψ in 2π verwandelt.

Anders verhält sich die Sache, wenn ϱ' grösser als $(\varrho - v)$ wird. In diesem Falle liegt ein Theil des Ringes ausserhalb der Oeffnung der Blendung, wodurch die zu demselben gehörigen Strahlen aufgehalten werden. Die Integrale in Bezug auf Ψ dürfen daher jetzt nur auf denjenigen Theil des Ringes ausgedehnt werden, der innerhalb der Oeffnung der Blendung liegt.

Denken wir uns, um die Grenzen der Integrale hiernach zu bestimmen, ein Dreieck construirt, dessen Seiten v, ϱ und ϱ' sind und nennen Ψ den äusseren Winkel, welchen ϱ' mit der Verlängerung von v bildet, so ist ersichtlich, dass dieser besondere Werth von Ψ derjenige ist, welcher dem Durchschnitte des Ringes mit dem Umfange der Blendung zugehört und daher die erste Grenze der Integrale bildet. Er ist durch die Gleichung gegeben:

$$\cos\Psi = \frac{\varrho^2 - v^2 - \varrho'^2}{2\, v\, \varrho'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Um die zweite Grenze der Integrale zu finden, müssen wir auf der entgegengesetzten Seite von v ein symmetrisch liegendes Dreieck aus denselben Seiten construirt denken; der ihm entsprechende Werth von Ψ bestimmt alsdann den zweiten Durchschnitt des Ringes mit dem Umfange der Blendung und bildet daher die zweite Grenze der Integrale. Da in den allgemeinen Formeln Ψ von der Verlängerung von v an nach einerlei Richtung bis zu 2π fortgezählt wird, so ist dieser, der zweiten Grenze zugehörige Werth $= (2\pi - \Psi)$, wobei Ψ, ebenso wie bei der ersten Grenze, den durch die Gleichung (d) gegebenen speciellen Werth bezeichnet.

Wir haben in (g) und (h) von Nro. 79 gesehen, dass die allgemeinen Integrale in Bezug auf Ψ nur Glieder von folgenden drei Formen enthalten:

$$a\,\Psi$$
$$b \sin\Psi \cos^{2m+1}\Psi$$
$$c \sin^{2m+1}\Psi$$

das allgemeine Integral von $r''^2\, d\Psi$ kann daher durch den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\int r'^2\, d\Psi = \Sigma a\Psi + \Sigma b \sin\Psi \cos^{2m+1}\Psi \\ + \Sigma c \sin^{2m+1}\Psi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

dargestellt werden, in welchem Σ die Summe aller ähnlichen Glieder bezeichnet. Nehmen wir jetzt dasselbe innerhalb der angegebenen Grenzen, so verwandelt es sich in

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Psi}^{2\pi-\Psi} r''^2\, d\Psi = \Sigma a\,(2\pi - 2\Psi) \\ - 2\Sigma b \sin\Psi \cos^{2m+1}\Psi \\ - 2\Sigma c \sin^{2m+1}\Psi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

worin Ψ nunmehr den durch die Gleichung (d) bestimmten Werth dieser Grösse bezeichnet.

Die von Ψ unabhängigen Coefficienten a, b und c enthalten als Factoren verschiedene Potenzen von ϱ' und v, deren Exponenten der weiteren Integration wegen näher bestimmt werden müssen, so weit es im Allgemeinen geschehen kann. Hierzu können wir die folgenden Bemerkungen machen.

Die Potenzen von ϱ', mit welchen die verschiedenen Glieder der Gleichungen (d) von Nro. 68 nach der Verwechselung von R und φ mit ϱ' und v multiplicirt sind, haben Exponenten, welche der Summe der Exponenten der in denselben Gliedern enthaltenen Potenzen von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ entweder gleich sind, oder sie um ein Vielfaches von 2 übertreffen. Bei dem aus jenen Gleichungen abgeleiteten Ausdrucke von r'^2 findet daher dasselbe statt; nur vermindern sich die Dimensionen von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ in manchen Gliedern um 2, weil y' und x' Glieder von der Form $a \cos\Psi$ und $a \sin\Psi$ haben, welche in r'^2 oder $(y'^2 + x'^2)$ nur das einzige Glied a^2 hervorbringen. Hierdurch wird aber die angegebene Relation nicht abgeändert. Endlich

ist aus (g) und (h) von Nro. 79 ersichtlich, dass nach der Integration in Bezug auf Ψ aus jedem Gliede mehrere andere entstehen, in denen die Dimensionen in Ansehung von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ entweder ungeändert bleiben oder um ein Vielfaches von 2 abnehmen, so dass auch hiernach die erwähnte Relation bestehen bleibt. Dasselbe gilt, wie man sich leicht aus den zuerst allegirten Gleichungen überzeugen kann, auch von den Potenzen von v. Wenden wir daher diese Resultate auf die Coefficienten in (f) an, so sehen wir, dass sie nur die Gestalt haben können:

$$\left.\begin{aligned} a &= A\,\varrho'^{2k}\,v^{2l} \\ b &= B\,\varrho'^{2k+2m+2}\,v^{2l+2m+2} \\ c &= C\,\varrho'^{2k+2m+1}\,v^{2l+2m+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

wobei k und l in den einzelnen Gliedern verschiedene Werthe erhalten. Hierdurch wird das Integral (f)

$$\left.\begin{aligned} \int_{\Psi}^{2\pi-\Psi} \overset{\prime\prime}{r}{}^2\,d\Psi &= \Sigma A\,\varrho'^{2k}\,v^{2l}\,(2\pi-2\Psi) \\ &\quad - 2\Sigma B\,\varrho'^{2k}\,v^{2l}\,(\varrho' v\sin\Psi)\,(\varrho' v\cos\Psi)^{2m+1} \\ &\quad - 2\Sigma C\,\varrho'^{2k}\,v^{2l}\,(\varrho' v\sin\Psi)^{2m+1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (h)$$

Dieses Integral ist für alle Ringe gültig, deren Halbmesser ϱ' grösser als $(\varrho - v)$ ist. Bei den übrigen Ringen, welche kleinere Halbmesser haben, fallen nach dem oben Gesagten alle Glieder weg, die von $\sin\Psi$ und $\cos\Psi$ abhängen; in denjenigen dagegen, welche den Bogen Ψ enthalten, verwandelt sich dieser in 2π. Hiernach bleibt in dem vorhergehenden Integrale nur das erste mit 2π multiplicirte Glied übrig und es wird

$$\int_0^{2\pi} \overset{\prime\prime}{r}{}^2\,d\Psi = \Sigma A\,\varrho'^{2k}\,v^{2l}\,.\,2\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

welches Integral für alle Ringe gilt, deren Halbmesser ϱ' kleiner als $(\varrho - v)$ ist.

105) Die in (h) und (i) der vorhergehenden Nummer gefundenen Integrale müssen jetzt mit $d\,.\,\varrho'^2$ multiplicirt und in Bezug auf ϱ' integrirt werden, um sie auf den ganzen Strahlenbündel auszudehnen.

Da das Integral (i) für alle Ringe gilt, bei welchen ϱ' kleiner als $(\varrho - v)$ ist, das Integral (h) dagegen für diejenigen, bei welchen ϱ' grössere Werthe hat, so sind die Grenzen bei dem ersteren Integrale

$$\varrho' = 0 \text{ und } \varrho' = (\varrho - v)$$

bei dem letzteren Integrale dagegen

$$\varrho' = (\varrho - v)$$

und der äusserste Werth von ϱ', für welchen ich diesen Buchstaben nach der Integration beibehalte.

Man findet jenen äussersten Werth sehr leicht aus (a) der vorhergehenden Nummer, wenn man darin statt R seinen äussersten Werth aus (e) von Nro. 79 substituirt, wonach

$$\varrho' = \left(\frac{Vg}{g+\zeta}\right)_j \frac{\varrho_j}{\mathrm{r}} = \left(\frac{Vc}{c-\zeta'}\right)_j \frac{\varrho_j}{\mathrm{r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wird und r durch (b) der vorhergehenden Nummer gegeben ist.

Ferner ist v bei einem und demselben Strahlenbündel, mithin auch bei der Integration in Bezug auf ϱ' constant.

Wir erhalten daher zuerst

$$\int d.\varrho'^2 \Sigma A \varrho'^{2k} v^{2l}.2\pi = \sum \frac{A \varrho'^{2k+2} v^{2l}.2\pi}{k+1} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

Dieses Integral muss in (i) von $\varrho' = 0$ bis $\varrho' = (\varrho - v)$ genommen werden; es bildet aber auch das erste Glied von (h), wobei die Grenzen $\varrho' = (\varrho - v)$ und $\varrho' = \varrho'$ sind. Vereinigt man diese beiden Theile, so entsteht daraus weiter nichts, als der Ausdruck (b) in welchem nunmehr unter ϱ' der durch (a) gegebene äusserste Werth zu verstehen ist.

Um die Integrale in Bezug auf die übrigen in (h) der vorhergehenden Nummer enthaltenen Glieder zu finden, muss Ψ durch ϱ' ausgedrückt und eine die Integration erleichternde Bezeichnung eingeführt werden. Zu diesem Ende setze ich

$$x = \varrho'^2 - (\varrho^2 + v^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Hierdurch wird mit Rücksicht auf den in (d) jener Nummer gegebenen Werth von $\cos\Psi$

$$\varrho'^2 = \varrho^2 + v^2 + x$$

$$d.\varrho'^2 = dx$$

$$\varrho' v \cos\Psi = -\frac{(2v^2 + x)}{2}$$

$$\varrho' v \sin\Psi = \frac{\sqrt{4\varrho^2 v^2 - x^2}}{2}$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{2\varrho^2 + x}{2(\varrho^2 + v^2 + x)\sqrt{4\varrho^2 v^2 - x^2}}$$

An der ersten Grenze der Integrale ist

$$\varrho' = \varrho - v$$

folglich

$$x = -2\varrho v$$

$$\Psi = 0$$

An der zweiten Grenze dagegen bekommen die beiden letzten Grössen diejenigen Werthe, welche aus (c) und aus (d) der vorhergehenden Nummer folgen, wenn darin unter ϱ' der durch (a) gegebene äusserste Werth dieser Grösse verstanden wird. Vermittelst jener Werthe erhalten wir daher

$$\left.\begin{aligned}\int \varrho'^{2k} \Psi d.\varrho'^2 &= \int (\varrho^2 + v^2 + x)^k \Psi dx = \\ &= \frac{\Psi(\varrho^2 + v^2 + x)^{k+1}}{k+1} - \int \frac{(\varrho^2 + v^2 + x)^{k+1}}{k+1} \frac{d\Psi}{dx} dx \\ &= \frac{\varrho'^{2k+2}\Psi}{k+1} - \int \frac{(\varrho^2 + v^2 + x)^k (2\varrho^2 + x)\, dx}{2(k+1)\sqrt{4\varrho^2 v^2 - x^2}}\end{aligned}\right\} \ldots \text{(d)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \varrho'^{2k} (\varrho' v \sin\Psi)(\varrho' v \cos\Psi)^{2m+1} d\varrho'^2 = \\
&\qquad = -\int dx \frac{(\varrho^2+v^2+x)^k (2v^2+x)^{2m+1}\sqrt{4\varrho^2 v^2 - x^2}}{2^{2m+2}} \\
&\int \varrho'^{2k} (\varrho' v \sin\Psi)^{2m+1} d\,.\,\varrho'^2 = \\
&\qquad = \int \frac{dx\,(\varrho^2+v^2+x)^k \sqrt{(4\varrho^2 v^2 - x^2)^{2m+1}}}{2^{2m+1}}
\end{aligned}\right\} \quad . \text{(d)}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= 2\varrho v \\
r &= \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \sqrt{4\varrho^2 v^2 - x^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(e)}$$

so wird die Summe der aus (h) und (i) der vorhergehenden Nummer entstehenden Integrale durch Substitution der Werthe (b), (d) und (e):

$$\left.\begin{aligned}
&\int d.\varrho'^2 \int r''^2 d\Psi = \\
&\qquad = \sum \frac{A\varrho'^{2k+2} v^{2l}}{k+1}(2\pi - 2\Psi) \\
&\qquad + \sum \frac{A v^{2l}}{k+1} \int \frac{(\varrho^2+v^2+x)^k (2\varrho^2+x)\,dx}{r} \\
&\qquad + \sum \frac{B v^{2l}}{2^{2m+1}} \int (\varrho^2+v^2+x)^k (2v^2+x)^{2m+1} r\,dx \\
&\qquad - \sum \frac{C v^{2l}}{2^{2m}} \int (\varrho^2+v^2+x)^k r^{2m\,1} dx
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; \text{(f)}$$

Die in diesem Ausdrucke enthaltenen Integrale lassen sich leicht finden, wenn man die inclavirten Factoren entwickelt und dann die einzelnen Glieder integrirt. Sie hängen theils von r, theils von dem Bogen ab, dessen Cosinus $= -\frac{x}{\alpha}$ ist. Nennt man diesen Bogen ψ, so ist

$$\cos\psi = -\frac{x}{\alpha} = \frac{\varrho^2 + v^2 - \varrho'^2}{2\varrho v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(g)}$$

und es ist ersichtlich, dass ψ den Winkel in dem oben angegebenen Dreiecke bezeichnet, welcher der Seite ϱ' gegen über steht. Sowohl r als ψ verschwinden an der ersten Grenze der Integrale; an der zweiten dagegen muss in den Ausdrücken derselben, ebenso wie bei den übrigen Grössen, statt ϱ' der äusserste Werth genommen werden.

Vermittelst der bekannten Reductionsformeln erhalten wir hiernach die folgenden Ausdrücke, in denen sämmtliche Integrale begriffen sind, welche nach vorheriger Entwickelung in den einzelnen Gliedern von (f) vorkommen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{x^{2n+1}dx}{r} = -\frac{x^{2n} r}{2n+1} \\
&\qquad - \sum_1^{\mathfrak{n}} \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2\mathfrak{n}+2)\,\alpha^{2\mathfrak{n}} x^{2n-2\mathfrak{n}} r}{(2n+1)(2n-1)\ldots(2n-2\mathfrak{n}+1)} \\
&\int \frac{dx}{r} = \psi
\end{aligned}\right\} \quad . \text{(h)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{x^{2n}\,dx}{r} = -\frac{x^{2n-1}\,r}{2n} \\
&\quad - \sum_{1}^{n-1}{}_{\mathfrak{n}} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots(2n-2\mathfrak{n}+1)\,\alpha^{2\mathfrak{n}}\,x^{2n-2\mathfrak{n}-1}\,r}{2n(2n-2)\ldots\ldots(2n-2\mathfrak{n})} \\
&\quad + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots\ldots 4.2}\,\alpha^{2n}\,\psi \\
&\int x^{2n+1}\,r^{2m+1}\,dx = -\frac{x^{2n}\,r^{2m+3}}{2n+2m+3} \\
&\quad - \sum_{1}^{n}{}_{\mathfrak{n}} \frac{2n(2n-2)\ldots\ldots(2n-2\mathfrak{n}+2)\,\alpha^{2\mathfrak{n}}\,x^{2n-2\mathfrak{n}}\,r^{2m+3}}{(2n+2m+3)(2n+2m+1)\ldots\ldots(2n+2m-2\mathfrak{n}+3)} \\
&\int x^{2n}\,r^{2m+1}\,dx = -\frac{x^{2n-1}\,r^{2m+3}}{2n+2m+2} \\
&\quad - \sum_{1}^{n-1}{}_{\mathfrak{n}} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots(2n-2\mathfrak{n}+1)\,\alpha^{2\mathfrak{n}}\,x^{2n-2\mathfrak{n}-1}\,r^{2m+3}}{(2n+2m+2)(2n+2m)\ldots\ldots(2n+2m-2\mathfrak{n}+2)} \\
&\quad + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 3.1.\alpha^{2n}}{(2n+2m+2)(2n+2m)\ldots\ldots(2m+4)}\int r^{2m+1}\,dx \\
&\int r^{2m+1}\,dx = \frac{x\,r^{2m+1}}{2m+2} \\
&\quad + \sum_{1}^{m}{}_{\mathfrak{n}} \frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots(2m-2\mathfrak{n}+3)\,\alpha^{2\mathfrak{n}}\,x\,r^{2m-2\mathfrak{n}+1}}{(2m+2)\,2m\ldots\ldots(2m-2\mathfrak{n}+2)} \\
&\quad + \frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots 3.1}{(2m+2)\,2m\ldots\ldots 4.2}\,\alpha^{2m+2}\,\psi
\end{aligned}\right\}\text{(h)}$$

Werden vermittelst dieser Formeln die in (f) angedeuteten Integrationen ausgeführt, der ganze Ausdruck sodann mit $\mathfrak{A}\,\mathrm{r}^2$ multiplicirt, so ist das Resultat diejenige Grösse, welche in Nro. 79 mit $\overset{\prime\prime\prime}{r^2}$ bezeichnet wurde. Um hieraus Θ abzuleiten, haben wir daselbst $\overset{\prime\prime\prime}{r^2}$ durch die Anzahl der in dem Strahlenbündel enthaltenen Strahlen, d. h. durch $\mathfrak{A}\,\delta_0 \int d\,.\,R^2 \int d\Psi = \mathfrak{A}\,R^2\,2\pi\,\delta_0$ dividirt, da diese Grösse bei der folgenden Integration in Bezug auf φ constant war und der Ausdruck von Θ dadurch vereinfacht wurde. Im gegenwärtigen Falle müsste jener Divisor durch $\mathfrak{A}\,\mathrm{r}^2\,\delta_0 \int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi$ ersetzt werden, wenn man auf gleiche Weise verfahren wollte, welches jedoch unzweckmässig ist, da die angedeuteten Integrale innerhalb der oben angegebenen Grenzen genommen werden müssen und dadurch von υ abhängig werden. Es ist daher vorzuziehen, $\overset{\prime\prime\prime}{r^2}$ nur durch die beständigen Factoren des erwähnten Divisors, nämlich durch $\mathfrak{A}\,\mathrm{r}^2\,\delta_0$ zu dividiren, wodurch sich $\overset{\prime\prime\prime}{r^2}$ in das Integral (f) verwandelt, mit der einzigen Abänderung, dass darin sämmtliche δ_m mit $\frac{\delta_m}{\delta_0}$ verwechselt werden.

Nach dieser Verwechselung vertritt daher das Integral (f) die Stelle der am angeführten Orte mit Θ und in Nro. 81 mit (Θ) be-

zeichneten Grösse, und soll künftig unter dem letzteren Buchstaben verstanden werden, wonach

$$(\Theta) = \int d\,.\,\varrho'^2 \int \frac{\overset{\prime\prime}{r}{}^2}{\delta_0}\, d\Psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(i)}$$

ist.

106) Bei der vorhergehenden Bestimmung von (Θ) lag die Voraussetzung zu Grunde, dass der Hauptstrahl als Axe des Strahlenbündels angenommen wird. Diese Voraussetzung ist aber gegenwärtig um so weniger zulässig, da durch die Blendung ein desto grösserer Theil des Strahlenbündels aufgehalten wird, je näher sich der ihm entsprechende leuchtende Punkt bei der Grenze des Gesichtsfeldes befindet, so dass der Hauptstrahl zuletzt ausserhalb des wirksamen Theiles des Strahlenbündels liegt. Es ist daher nothwendig, den Ausdruck von (Θ) nach der in Nro. 81 gebrauchten Methode so umzuändern, dass diejenige Linie als Axe des Strahlenbündels angenommen wird, welche die Undeutlichkeit so klein als möglich macht, wodurch sich (Θ) nach der daselbst gewählten Bezeichnung in Θ verwandelt.

Wir müssen uns dazu der in der allegirten Nummer gefundenen Gleichung

$$\overset{\prime}{r}{}^2 = (\overset{\prime}{r})^2 - 2(\overset{\prime}{y})\,\mathfrak{y} + \mathfrak{y}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

bedienen, worin $(\overset{\prime}{r})$ und $(\overset{\prime}{y})$ die aus (d) von Nro. 68 folgenden Werthe von $\overset{\prime}{r}{}^2$ und $\overset{\prime}{y}$, $\mathfrak{y}$ dagegen eine von $\delta\nu$, Ψ und ϱ' unabhängige Grösse bezeichnet.

Um nun von $\overset{\prime}{r}{}^2$ zu Θ überzugehen, ist weiter nichts erforderlich, als in sämmtlichen Gliedern von (a) die in den vorhergehenden Nummern angegebenen Veränderungen vorzunehmen, d. h. zuerst alle Glieder wegzulassen, welche die erste Potenz von $\delta\nu$ enthalten, in den übrigen dagegen $\delta\nu^m$ mit $\frac{\delta_m}{\delta_0}$ zu verwechseln, sodann den ganzen Ausdruck mit $d\,.\,\varrho'^2\, d\Psi$ zu multipliciren und zweimal innerhalb der angegebenen Grenzen zu integriren.

Hierdurch verwandeln sich $\overset{\prime}{r}{}^2$ und $(\overset{\prime}{r})^2$ in Θ und (Θ). Bezeichnet man ferner durch $[\overset{\prime}{y}]$ denjenigen Werth, welchen $(\overset{\prime}{y})$ durch die erste, auf $\delta\nu$ sich beziehende Abänderung bekommt, und bemerkt, dass $\mathfrak{y}$ durch dieselbe keine Modification erleidet, so erhält man aus (a) die folgende Gleichung:

$$\Theta = (\Theta) - 2\mathfrak{y} \int d\varrho'^2 \int [\overset{\prime}{y}]\, d\Psi + \mathfrak{y}^2 \int d\varrho'^2 \int d\Psi \quad . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Wenden wir diese Gleichung zuerst an, um $\mathfrak{y}$ auf eine solche Weise zu bestimmen, dass Θ dadurch zu einem Minimum wird, wie es beabsichtigt wurde, so folgt daraus

$$\mathfrak{y} = \frac{\int d\,.\,\varrho'^2 \int [\overset{\prime}{y}]\, d\Psi}{\int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

und wenn dieser Werth in (b) substituirt wird,

$$\Theta = (\Theta) \quad \frac{[\int d.\varrho'^2 \int [y'] d\Psi]^2}{\int d.\varrho'^2 \int d\Psi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Der vorhergehende Werth von $\mathfrak{y}$ dient ferner dazu, die Gleichung der Axe des Strahlenbündels zu finden. Wir haben nämlich in (a) von Nro. 81 gesehen, dass die der Abscisse z_i zugehörigen Coordinaten desjenigen Punktes, welcher nunmehr als Ursprung der r angenommen worden ist und daher in der Axe des Strahlenbündels liegt, durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y'' &= (y'') + \mathfrak{y} \\ x'' &= (x'') = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

gegeben sind, in welchen (y'') und (x'') die in (h) von Nro. 78 gefundenen Coordinaten des Hauptstrahles bezeichnen. Die Gleichungen (e) gehören daher nach vorheriger Substitution des in (c) erhaltenen Werthes von $\mathfrak{y}$ der Axe des Strahlenbündels zu und es ist ersichtlich, dass diese Axe auch in dem gegenwärtigen Falle eine gerade Linie ist, da sowohl (y'') als (y') die Form $(C z_i + D)$ haben, welche nach den, von z_i unabhängigen Integrationen, wodurch man von (y') zu $\mathfrak{y}$ übergeht, bestehen bleibt.

Endlich können wir vermittelst des Ausdruckes von Θ die Lage des dem leuchtenden Punkte zugehörigen Bildes und dann die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche bestimmen. Wir haben nämlich oben gesehen, dass der Ort des Bildes gefunden wird, wenn man in dem inclavirten Factor von Θ die Abscisse z durch die Bedingung bestimmt, dass dadurch jener Factor zu einem Minimum wird. In demselben kommt aber keine andere von z abhängige Grösse vor, als $\mathfrak{z}$, welches vermöge (a) von Nro. 82 durch den Ausdruck gegeben ist:

$$\mathfrak{z} = \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right) + D\frac{1}{g}$$

Ferner ist ersichtlich, dass der inclavirte Factor von Θ die Gestalt hat:

$$\Theta = A + 2B\mathfrak{z} + C\mathfrak{z}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

wobei A, B und C von $\mathfrak{z}$ unabhängig sind.

Für das Minimum in Bezug auf $\mathfrak{z}$ ist daher

$$0 = B + C\mathfrak{z}$$

mithin

$$\mathfrak{z} = -\frac{B}{C}$$

und

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{g} + D\frac{1}{g} + \frac{B}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

wodurch die Abscisse des Bildes bestimmt wird. Seine beiden übrigen Coordinaten y'' und x'' erhält man sodann vermittelst der Gleichungen (e), wenn man in der ersteren derselben statt z seinen Werth aus (g) substituirt und $D\frac{1}{z} = 0$ setzt.

Die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche folgt aus (g), wenn darin φ und das davon abhängende v vermittelst des Ausdruckes von y'' eliminirt werden, wobei es erlaubt ist, in dem letzteren alle Glieder von der Ordnung der Abweichungen zu vernachlässigen. Demungeachtet ist jene Gleichung wegen der durch die Integration eingeführten Kreisbögen sehr complicirt.

In Bezug auf die Ausführung der in (c) und (d) angedeuteten Integrationen können wir die folgenden allgemeinen Bemerkungen machen. Wir sehen aus (d) von Nro. 68, dass $\int[y']\,d\Psi$ die in den Gleichungen (e) und (g) von Nro. 104 vorausgesetzte Form hat, mit dem einzigen Unterschiede, dass in manchen Gliedern die Dimension von v um eine Einheit zu niedrig ist. Da jedoch die letztere Grösse bei den Integrationen als constant betrachtet wird, so kann dieser Nachtheil dadurch beseitigt werden, dass man den Ausdrücken von $\mathfrak{y}$ und Θ die Gestalt giebt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \frac{\int d\,.\,\varrho'^2 \int [y']\,v\,d\Psi}{v\int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi} \\ \Theta &= (\Theta) - \frac{\left[\int d\,.\,\varrho'^2 \int [y']\,v\,d\Psi\right]^2}{v^2 \int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

worauf die Integrationen leicht nach der angegebenen Methode ausgeführt werden können.

107) Der in der vorhergehenden Nummer gefundene Ausdruck von Θ giebt die Undeutlichkeit in Bezug auf denjenigen Punkt des Gegenstandes an, welchem der darin enthaltene Werth von v entspricht. Um ihn auf den ganzen Gegenstand auszudehnen, müssen wir uns der in Nro. 90 gebrauchten Methode bedienen.

Vermöge (a) dieser Nummer ist es hierzu erforderlich, jenen Ausdruck mit $\mathfrak{B}\,c_1^2\,\pi\,d\,.\,\varphi^2$ oder nach der gegenwärtigen Bezeichnung mit $\mathfrak{B}\,c_1^2\,\pi\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{k}^2\,d\,.\,v^2$ zu multipliciren und zu integriren. Das auf diese Weise erhaltene Integral hatten wir an dem angeführten Orte mit $\mathfrak{B}\,c_1^2\,\pi\,\varphi^2$ dividirt, um das arithmetische Mittel aus den r'^2 zu finden, welche den sämmtlichen Punkten des Gegenstandes zugehören. Im gegenwärtigen Falle würde $\mathfrak{B}\,c_1^2\,\pi\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{k}^2 \int d\,.\,v^2 \int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi$ an die Stelle jenes Divisors treten, wenn dasselbe Verfahren stattfinden sollte, weil wir bei Θ den Divisor $\int d\,.\,\varrho'^2 \int d\Psi$ weggelassen haben. Es ist jedoch, ebenso wie bei Θ, nicht zweckmässig, einen solchen complicirten Divisor, welcher den Ausdruck der Undeutlichkeit keineswegs vereinfacht, anzuwenden, daher ich auch hier nur die beständigen Factoren des Integrals, $\mathfrak{B}\,c_1^2\,\pi\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{k}^2$, weglasse. Demnach ist, wenn

man den Buchstaben $\varPi$ in dieser abgeänderten Bedeutung gebraucht, die Undeutlichkeit in Bezug auf das ganze Gesichtsfeld durch den Ausdruck gegeben:

$$\varPi = \int \theta\, d.v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Wir haben in der vorhergehenden Nummer gesehen, dass θ aus zwei Theilen besteht, deren erster mit (θ) bezeichnet wurde. Er bringt in $\varPi$ den Theil

$$\varPi = \int (\theta)\, d.v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

hervor, mit welchem wir uns zuerst beschäftigen wollen.

Vermöge (f) und (i) von Nro. 105 enthält (θ) Glieder, welche mit 2π multiplicirt sind. Diese Glieder kommen bei allen Strahlenbündeln vór und unterscheiden sich nur durch den jedesmaligen Werth von v. Da nun die Integrale auf sämmtliche Strahlenbündel ausgedehnt werden müssen, so sind sie bei jenen Gliedern von $v = 0$ bis zu dem äussersten, an der Grenze des Gesichtsfeldes stattfindenden Werthe dieser Grösse zu nehmen. Dasselbe würde auch von den übrigen Gliedern gelten, wenn sie bei allen Werthen von v vorhanden wären. Diese Glieder beziehen sich aber auf denjenigen Theil des Strahlenbündels, welcher durch die Blendung aufgehalten wird, und es ist ersichtlich, dass im Innern des Gesichtsfeldes, von $v = 0$ bis zu $v = (\varrho - \varrho')$, der ganze Strahlenbündel ungehindert durchgeht, in dem äusseren Ringe des Gesichtsfeldes dagegen, von $v = (\varrho - \varrho')$ bis zu $v = (\varrho + \varrho')$, theilweise durch die Blendung seine Wirksamkeit verliert, dass endlich bei noch grösseren Werthen von v gar keine Strahlen mehr durch das Instrument gelassen werden. Dasselbe folgt auch aus den analytischen Formeln. Der Ausdruck von (θ) enthält nämlich vermöge (f) und (h) von Nro. 105, nach der Ausführung der Integrationen, ausser den mit 2π multiplicirten Gliedern nur solche, welche von Ψ, r oder ψ abhängen.

Der in (d) von Nro. 104 gegebene Werth von $\cos\Psi$ zeigt aber, dass $\pm\cos\Psi$ grösser als 1, mithin Ψ unmöglich wird, wenn v entweder kleiner als $(\varrho - \varrho')$, oder grösser als $(\varrho + \varrho')$ ist. Da ferner

$$r = 2\varrho' v \sin\Psi$$

$$\sin\psi = \frac{\varrho'}{\varrho} \sin\Psi$$

ist, so findet dasselbe auch bei r und ψ statt, wodurch die erwähnten Glieder ausserhalb jener Grenzen unmöglich werden.

Wenn daher das Gesichtsfeld nicht weiter als durch die hier betrachtete Blendung beschränkt wird, wie es jederzeit bei denjenigen Instrumenten der Fall ist, in welchen kein wirkliches Bild zu Stande kommt, so sind die Grenzen der in (b) enthaltenen Integrale in Bezug auf die mit 2π multiplicirten Glieder $v = 0$ und $v = \varrho + \varrho'$, in Bezug auf die übrigen Glieder dagegen $v = \varrho - \varrho'$ und $v = \varrho + \varrho'$.

Kommen aber in dem Instrumente ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande, so wird das Gesichtsfeld, wie wir am Ende von Nro. 59 gesehen haben, durch die am letzten Bilde angebrachte Blendung bestimmt und es folgt aus der dortigen Formel (h), dass der, der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechende Werth von v durch den Ausdruck gegeben ist:

$$v = \frac{\varphi}{\mathfrak{r}\mathfrak{f}} = \frac{\nu_i \varrho_i}{\mathfrak{r}\mathfrak{f} V_i g_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

wobei sich der Index i auf das letzte Bild bezieht und ϱ_i den Halbmesser der an demselben angebrachten Blendung bezeichnet. In diesem Falle muss daher der Werth (c) als zweite Grenze der Integrale angenommen werden.

Um beide Fälle in den Formeln zu begreifen, behalte ich an der zweiten Grenze den Buchstaben v nach der Integration bei, so dass hierunter im ersten Falle $(\varrho + \varrho')$, im zweiten dagegen der in (c) gegebene Werth zu verstehen ist.

Zur Erleichterung der Integration ist es ausserdem zweckmässig, eine ähnliche Bezeichnung wie in Nro. 105 einzuführen. Ich setze daher

$$\left.\begin{aligned} y &= v^2 - (\varrho^2 + \varrho'^2) \\ \beta &= 2\varrho\varrho' \\ \cos\chi &= -\frac{y}{\beta} = \frac{\varrho^2 + \varrho'^2 - v^2}{2\varrho\varrho'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

Hierdurch wird

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= \varrho^2 + \varrho'^2 + y \\ d.v^2 &= dy \\ x &= -2\varrho^2 - y \\ r &= \sqrt{\beta^2 - y^2} = \sqrt{4\varrho^2\varrho'^2 - y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

und es ist ersichtlich, dass diese Formeln aus den correspondirenden der allegirten Nummer entstehen, wenn man darin ϱ', x, α und ψ mit v, y, β und χ verwechselt, dass ferner χ den der Seite v gegenüberstehenden Winkel in dem oben angegebenen Dreiecke bezeichnet.

Untersuchen wir jetzt noch, welche Werthe die in den Formeln vorkommenden Grössen an den verschiedenen Grenzen der Integrale erhalten, so finden wir, dass den an den letzteren stattfindenden Werthen, $v = \varrho - \varrho'$ und $v = \varrho + \varrho'$ die folgenden Werthe der übrigen Grössen entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} v &= \varrho - \varrho' & \quad v &= \varrho + \varrho' \\ y &= -\beta & y &= \beta \\ r &= 0 & r &= 0 \\ \Psi &= 0 & \Psi &= \pi \\ \psi &= 0 & \psi &= 0 \\ \chi &= 0 & \chi &= \pi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

An der dritten, durch die Gleichung (c) bestimmten Grenze erhalten jene Grössen Werthe, welche aus ihren allgemeinen Ausdrücken folgen, wenn man darin statt υ seinen Werth aus (c) substituirt.

Nach diesen Prämissen können wir zur Integration von (Θ) $d.\upsilon^2$ übergehen. Die Ausdrücke (f) und (h) von Nro. 105 zeigen, dass dabei nach der Substitution der vorhergehenden Werthe und nach der Entwickelung der einzelnen Glieder nur Integrale von den Formen

$$\int \upsilon^{2l}(\pi - \Psi)\, d.\upsilon^2,\ \int \upsilon^{2l}\psi\, d.\upsilon^2,$$
$$\int y^{2n+1} r^{2m+1} dy \text{ und } \int y^{2n} r^{2m+1} dy$$

vorkommen.

Es ist aber, da die mit 2π multiplicirten Glieder innerhalb der Grenzen $\upsilon = 0$ und $\upsilon = \upsilon$ integrirt werden müssen,

$$\int \pi \upsilon^{2l}\, d.\upsilon^2 = \frac{\pi\, \upsilon^{2l+2}}{l+1}$$

Auf die übrigen Integrale sind die in Nro. 105 gegebenen Formeln anwendbar, wenn darin die oben angegebenen Verwechselungen vorgenommen werden, indem sich hierdurch auch der an der ersten Grenze stattfindende Werth $x = -\alpha$ in den gegenwärtig gültigen $y = -\beta$ verwandelt.

Die erste Formel (d) jener Nummer giebt daher durch Verwechselung von k, ϱ' und x mit l, υ und y

$$\int \upsilon^{2l}\Psi\, d.\upsilon^2 = \frac{\upsilon^{2l+2}\Psi}{l+1} - \int \frac{(\varrho^2+\varrho'^2+y)^l (2\varrho^2+y)\, dy}{2(l+1)r}$$

woraus weiter durch Verbindung mit dem vorhergehenden Integrale folgt:

$$\left.\begin{aligned}\int \upsilon^{2l}(\pi-\Psi)\, d.\upsilon^2 &= \frac{\upsilon^{2l+2}\,(\pi-\Psi)}{l+1}\\ &+ \int \frac{(\varrho^2+\varrho'^2+y)^l (2\varrho^2+y)\, dy}{2(l+1)r}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (g)$$

Verwechselt man hierin $(\pi - \Psi)$ und ϱ mit ψ und ϱ', so erhält man

$$\int \upsilon^{2l}\psi\, d.\upsilon^2 = \frac{\upsilon^{2l+2}\psi}{l+1} + \int \frac{(\varrho^2+\varrho'^2+y)^l (2\varrho'^2+y)\, dy}{2(l+1)r} \quad (h)$$

Da ψ an der ersten Grenze verschwindet, so ist dieselbe auch bei dem vorhergehenden Integrale gültig.

Die in (e) und (f) unter dem Integralzeichen befindlichen Grössen geben nach der Entwickelung nur Integrale von den beiden Formen:

$$\int \frac{y^{2n+1}\, dy}{r} \text{ und } \int \frac{y^{2n}\, dy}{r}$$

welche ebenso wie die angeführten:

$$\int y^{2n+1} r^{2m+1} dy \text{ und } \int y^{2n} r^{2m+1} dy$$

durch die angegebenen Verwechselungen leicht aus (h) von Nro. 105 erhalten werden.

Entspricht die zweite Grenze der Integrale dem Werthe $v = (\varrho + \varrho')$, so vereinfachen sich die Formeln sehr, weil alsdann r, $(\pi - \Psi)$ und ψ verschwinden, χ dagegen $= \pi$ wird. Dadurch reduciren sich die Integralformeln auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
&\int v^{2l} (\pi - \Psi)\, d \,.\, v^2 = \int \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2 + y)^l (2\varrho^2 + y)\, dy}{2(l+1) r} \\
&\int v^{2l} \psi\, d \,.\, v^2 = \int \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2 + y)^l (2\varrho'^2 + y)\, dy}{2(l+1) r} \\
&\int \frac{y^{2n+1}\, dy}{r} = 0 \\
&\int \frac{dy}{r} = \pi \\
&\int \frac{y^{2n}\, dy}{r} = \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots . 3.1}{2n(2n-2) \ldots . 4.2} \beta^{2n} \pi \\
&\int y^{2n+1} r^{2m+1}\, dy = 0 \\
&\int r^{2m+1}\, dy = \frac{(2m+1)(2m-1) \ldots . 3.1}{(2m+2) 2m \ldots . 4.2} \beta^{2m+2} \pi \\
&\int y^{2n} r^{2m+1}\, dy = \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3) \ldots . 3.1.(2m+1)(2m-1) \ldots . 3.1}{(2n+2m+2)(2n+2m) \ldots . 4.2} \beta^{2n+2m+2} . \pi
\end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

Hieraus folgt, dass in diesem Falle nach der Integration alle Glieder verschwinden, welche im Zähler ungerade Potenzen von y enthalten, daher dieselben bei der Entwickelung sogleich weggelassen werden können.

Bildet der in (c) gegebene Werth von v die zweite Grenze der Integrale, so findet eine ähnliche Vereinfachung nicht statt, indem daselbst keine der darin enthaltenen Grössen verschwindet.

108) Ich gehe jetzt zu dem zweiten Theile von Π über, welcher vermöge (h) von Nro. 106 und (a) von Nro. 107 durch den Ausdruck gegeben ist:

$$\Pi = -\int \frac{[\int d \,.\, \varrho'^2 \int [y] v\, d\Psi]^2\, d \,.\, v^2}{v^2 \int d \,.\, \varrho'^2 \int d\Psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(a)}$$

Wir haben oben gesehen, dass die darin enthaltenen Integrationen in Bezug auf Ψ und ϱ'^2 nach der angegebenen Methode leicht ausgeführt werden können.

Um hiernach den Nenner zu erhalten, muss in (f) von Nro. 105 $r''^2 = 1$, mithin $A = 1$, dagegen B, C, k und $l = 0$ gesetzt werden und die Summationszeichen fallen weg, da nur ein Glied vorhanden ist. Diess giebt

$$\left.\begin{aligned}
v^2 \int d \,.\, \varrho'^2 \int d\Psi &= v^2 \left[2\varrho'^2 (\pi - \Psi) + \int \frac{(2\varrho^2 + x)\, dx}{r} \right] \\
&= v^2 [2\varrho'^2 (\pi - \Psi) + 2\varrho^2 \psi - r]
\end{aligned}\right\} . \text{(b)}$$

Der inclavirte Factor des Zählers hängt ebenfalls von $(\pi - \Psi)$, ψ und r ab, und da diese Grössen, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, Functionen von v sind, welche verschiedene Kreisbögen enthalten, so kann die Integration von (a) in Bezug auf v^2 nach den bekannten Methoden allgemein nicht ausgeführt werden. Diess wird uns jedoch nicht hindern, in einzelnen Fällen, wo sich die Formeln vereinfachen, nützliche Anwendungen von der vorhergehenden Methode zu machen.

109) Die vorhergehende Theorie kann dazu benutzt werden, um dasjenige zu ergänzen, was am Ende von Nro. 65 in Bezug auf die veränderliche Lichtstärke bei den hier betrachteten Instrumenten angeführt wurde. Wir haben daselbst gesehen, dass unter übrigens gleichen Umständen und bei einem und demselben leuchtenden Punkte die Lichtstärke dem Flächeninhalte desjenigen Theiles der ersten brechenden Fläche proportional ist, auf welchen Lichtstrahlen von jenem Punkte fallen, die ungehindert durch das Instrument gehen. Nach den gegenwärtigen Bezeichnungen ist aber der erwähnte Flächenraum dem Integrale $\int d.\varrho'^2 \int d\Psi$ proportional, welches mithin als das Maass der Lichtstärke angesehen werden kann.

Im Inneren des Gesichtsfeldes, von $v = 0$ bis zu $v = \varrho - \varrho'$ legt die Blendung den Strahlen kein Hinderniss in den Weg, daher das erwähnte Integral von $\Psi = 0$ bis zu $\Psi = 2\pi$ und von $\varrho' = 0$ bis zu seinem äussersten Werthe genommen werden muss. Diess giebt

$$\int d.\varrho'^2 \int d\Psi = 2\varrho'^2\pi \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Bei grösseren Werthen von v dagegen wird ein Theil des Strahlenbündels durch die Blendung aufgehalten; wir müssen folglich jenes Integral innerhalb der oben angegebenen Grenzen nehmen. Hiernach wird vermöge (b) der vorhergehenden Nummer

$$\int d.\varrho'^2 \int d\Psi = 2\varrho'^2 (\pi - \Psi) + 2\varrho^2 \psi - r \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

In der allegirten Nummer war durchgängig das Integral (a) zu Grund gelegt, die daselbst berechnete Lichtstärke muss daher in dem Verhältniss von (a) zu (b) vermindert werden, um ihren wahren Werth zu erhalten. Nennen wir demnach

λ den Coefficienten, mit welchem die in Nro. 65 gefundene Lichtstärke multiplicirt werden muss, um sie auf ihren wahren Werth zu reduciren,

so ist von $v = 0$ bis zu $v = \varrho - \varrho'$

$$\lambda = 1 \quad \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

für alle grössere Werthe von v dagegen

$$\lambda = \frac{2\varrho'^2 (\pi - \Psi) + 2\varrho^2 \psi - r}{2\varrho'^2 \pi} \quad \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

Um diejenige Lichtstärke zu erhalten, welche innerhalb des ganzen Gesichtsfeldes im Mittel stattfindet, ist nach den in Nro. 107

angegebenen Grundsätzen weiter nichts erforderlich, als die Integrale (a) und (b) mit $d.v^2$ zu multipliciren und nochmals in Bezug auf v zu integriren. Hierdurch giebt das Integral (a)

$$\int d.v^2 \int d.\varrho'^2 \int d\Psi = 2\varrho'^2 v^2 \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(e)}$$

Ferner erhalten wir vermittelst der daselbst gegebenen Formeln

$$\int (\pi - \Psi)\, d.v^2 = v^2(\pi - \Psi) + \varrho^2 \chi - \frac{r}{2}$$

$$\int \psi\, d.v^2 = v^2 \psi + \varrho'^2 \chi - \frac{r}{2}$$

$$\int r\, d.v^2 = \frac{\beta^2 \chi}{2} + \frac{y r}{2}$$

$$= 2\varrho^2 \varrho'^2 \chi + \frac{(v^2 - \varrho^2 - \varrho'^2)\, r}{2}$$

wodurch sich das Integral (b) in das folgende verwandelt:

$$\left.\begin{aligned} \int d.v^2 \int d.\varrho'^2 \int d\Psi &= 2\varrho'^2 v^2 (\pi - \Psi) \\ + 2\varrho^2 v^2 \psi + 2\varrho^2 \varrho'^2 \chi &- \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2 + v^2)\, r}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(f)}$$

Da in Nro. 65 das Integral (e) angenommen war, an dessen Stelle gegenwärtig (f) treten muss, so finden wir auch hier den Coefficienten λ durch die Division jener Integrale in einander, nämlich

$$\lambda = \frac{2\varrho'^2 v^2 (\pi - \Psi) + 2\varrho^2 v^2 \psi + 2\varrho^2 \varrho'^2 \chi - (\varrho^2 + \varrho'^2 + v^2)\, \frac{r}{2}}{2\varrho'^2 v^2 \pi} \quad \text{(g)}$$

wobei v den der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechenden Werth bezeichnet.

Kommt in dem Instrumente kein wirkliches Bild zu Stande, so ist

$$v = \varrho + \varrho'$$
$$\chi = \pi$$
$$(\pi - \Psi) = \psi = r = 0$$

folglich

$$\lambda = \frac{\varrho^2}{(\varrho + \varrho')^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(h)}$$

Kreisförmige Oeffnung in der Mitte der Objectivspiegel bei Spiegeltelescopen.

110) Bei Spiegeltelescopen erleiden die Ausdrücke von Θ und Π eine Modification, wenn der Objectivspiegel in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung hat, wie es bei den Gregorianischen und Cassegrain'schen Telescopen der Fall ist. Bezeichnet man durch $R_{,}$ den Halbmesser dieser Oeffnung, durch R den Halbmesser des Spiegels, so müssen die Integrale, welche sich auf R beziehen, innerhalb der Grenzen $R = R_{,}$ und $R = R$ genommen werden.

Nach Nro. 79 besteht Θ und folglich auch Π aus Gliedern von der Form

$$\frac{A \int R^{2m}\, d\,.\,R^2}{\int d\,.\,R^2}$$

Werden die Integrale innerhalb der angegebenen Grenzen genommen, so entsteht hieraus das Glied

$$\frac{A \int_{R_,}^{R} R^{2m}\, d\,.\,R^2}{\int_{R_,}^{R} d\,.\,R^2} = \frac{A\,(R^{2m+2} - R_,^{2m+2})}{(m+1)\,(R^2 - R_,^2)}$$

Bei der vorhergehenden Rechnung war $R_, = 0$ vorausgesetzt, mithin das correspondirende Glied

$$\frac{A\,R^{2m}}{m+1}$$

gefunden worden. Soll daher auf die Oeffnung im Objectivspiegel Rücksicht genommen werden, so entsteht in den Ausdrücken von Θ und Π die Aenderung, dass nach der Entwickelung der von R abhängigen Glieder, jede Potenz R^{2m} mit

$$\frac{R^{2m+2} - R_,^{2m+2}}{R^2 - R_,^2}$$

verwechselt werden muss.

Da übrigens $R_,$ in Vergleichung mit R gewöhnlich sehr klein ist, so hat jene Abänderung in der Regel nur einen unbedeutenden Einfluss auf das Resultat.

Neuntes Kapitel.

Methoden zur Erhaltung der grösstmöglichen Deutlichkeit.

Nachdem wir in dem vorhergehenden Kapitel die auf die Undeutlichkeit sich beziehenden Formeln mit der zu ihrer Anwendung erforderlichen Ausführlichkeit entwickelt haben, so bleibt jetzt noch übrig, uns mit den Methoden zu beschäftigen, welche ihr Gebrauch in den verschiedenen Fällen erheischt. Wir werden hierdurch die Mittel finden, bei den Instrumenten die grösstmögliche Deutlichkeit zu erhalten, so weit es die dabei eintretenden Umstände erlauben. Ob nun gleich die Wahl unter jenen Methoden den speciellen Untersuchungen vorbehalten bleibt, so werden wir doch einige Classen von Instrumenten angeben, welche eine allgemeine Behandlung zulassen oder bei denen sich die Formeln vereinfachen. Ausserdem ist auch noch die Bestimmung der von der Farbenzerstreuung abhängenden Coefficienten in den Formeln nothwendig, welche auf die Resultate der Beobachtungen gegründet werden muss. Wir werden dadurch zugleich in den Stand gesetzt werden, über die Vollkommenheit der Instrumente in Bezug auf die Vernichtung der Farbenzerstreuung urtheilen zu können.

Bestimmung der grössten Deutlichkeit vermittelst des Ausdruckes von Π.

111) Die dem Ausdrucke von Π gegebene Form, wonach er aus der Summe mehrerer, mit verschiedenen Coefficienten multiplicirten Quadrate besteht, zeigt, dass keine vollkommene Deutlichkeit erhalten werden kann, wenn nicht jedes dieser Quadrate für sich verschwindet, indem die Coefficienten derselben, wie in der Folge erhellen wird, sämmtlich positiv sind. Jenes Verschwinden kann jedoch nicht bei allen Gliedern stattfinden, daher zur Erreichung der grösstmöglichen Deutlichkeit im Allgemeinen nichts anderes übrig bleibt, als den ganzen Ausdruck von Π durch die Bestimmung der darin enthaltenen willkührlichen Grössen zu einem Minimum zu machen, wie es die Methode der kleinsten Quadrate erfordert, indem Π weiter nichts ist, als die Summe der Quadrate der Fehler, welche von sämmtlichen Strahlen hervorgebracht werden, mit einem beständigen Factor multiplicirt.

Wenn daher in dem Ausdrucke von Π die willkührlichen Grössen x, y, z etc. vorkommen und keine weitere Bedingungen zu erfüllen sind, so ist das Minimum durch die Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dx} &= 0 \\ \frac{d\Pi}{dy} &= 0 \\ \frac{d\Pi}{dz} &= 0 \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

woraus die dem Minimum und mithin der grössten Deutlichkeit entsprechenden Werthe von x, y, z etc. erhalten werden.

Wir müssen jedoch dabei die Bemerkung machen, dass die willkührlichen Grössen zum Theil auf eine sehr complicirte Weise in dem Ausdrucke von Π enthalten sind, dass ferner ausser der Deutlichkeit noch andere Rücksichten eintreten, von welchen weiter unten die Rede seyn wird. Da man nun, wie im Allgemeinen aus der Natur des Minimums bekannt ist, sich innerhalb gewisser Grenzen davon entfernen kann, ohne den Werth der Function, welche ein Minimum wird, beträchtlich zu vergrössern, so wird es hierdurch möglich, ohne bedeutende Vermehrung der Undeutlichkeit zugleich andere Bedingungen zu erfüllen, welche in manchen Fällen sogar wichtiger als die Deutlichkeit seyn können. Man gelangt dann gewöhnlich am leichtesten zum Ziele, wenn man nicht die Gleichungen (a) gebraucht, sondern verschiedene Einrichtungen numerisch berechnet, welche nahe bei dem Minimum liegen, und durch die Veränderung einer oder mehrerer der willkührlichen Grössen von einander verschieden sind. Dieses gewährt den Vortheil, dass man eine Uebersicht über die in dem Ausdrucke von Π enthaltenen Grössen nahe bei dem Minimum bekommt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, nicht nur zu beurtheilen, wie weit man sich aus anderen Gründen ohne Nachtheil von dem Minimum entfernen kann, sondern auch die verschiedenen Abweichungen mehr oder weniger zu berücksichtigen. Auch lässt sich hieraus das Minimum selbst mit hinlänglicher Genauigkeit finden, wenn man sich hierzu der in den folgenden Nummern angegebenen Methoden bedient.

Nur in dem Falle können die Gleichungen (a) mit Leichtigkeit angewandt werden, wenn in dem Ausdrucke von Π willkührliche Grössen auf eine einfache Weise vorkommen, ohne dass dabei andere Bedingungen stattfinden.

Berechnung des Minimums aus mehreren numerischen Werthen von Π.

112) Ich nehme zuerst an, dass in dem Ausdrucke von Π nur eine willkührliche Grösse x enthalten ist, welche so bestimmt werden

soll, dass dadurch jener Ausdruck zu einem Minimum wird. Sollen nun zu diesem Zwecke mehrere in der Nähe des Minimums liegende Werthe von Π numerisch berechnet werden, so verfährt man gewöhnlich so, dass man statt x Anfangs einen bestimmten Werth annimmt, welchen ich mit x_0 bezeichne, und vermittelst desselben den correspondirenden Werth von Π berechnet, den ich Π_0 nenne, dass man sodann x nach und nach um verschiedene Vielfache von einer nach Willkühr gewählten Grösse m zu- oder abnehmen lässt und jedesmal den entsprechenden Werth von Π berechnet. Hiernach kann daher vorausgesetzt werden, dass der allgemeine Werth von x durch den Ausdruck gegeben sey:

$$x = x_0 + m\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wobei ξ das Vielfache von m angiebt, welches in jedem einzelnen Falle x_0 zugesetzt werden muss, um x zu erhalten, daher ξ veränderlich, Π_0, x_0 und m dagegen constant sind.

Setzen wir jetzt voraus, dass dem in (a) angenommenen Werthe von x der allgemeine Werth Π entspricht, in welchen sich Π_0 dadurch verwandelt, dass x_0 um $m\xi$ zunimmt, so ist nach der Taylor'schen Reihe

$$\Pi - \Pi_0 = \frac{d\Pi}{dx}.m\xi + \frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{m^2\xi^2}{2}$$

wobei die Differentialcoefficienten für $\xi = 0$ berechnet und daher von ξ unabhängig sind.

Die vorhergehende Reihe kann mithin unter die Gestalt gebracht werden:

$$\Pi - \Pi_0 = \alpha\xi + \beta\xi^2 \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{d\Pi}{dx}.m = \alpha$$

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{m^2}{2} = \beta$$

etc.

und es ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass α, β etc. unbekannte Constanten sind, welche vorerst bestimmt werden müssen. Hierzu dienen die in der Nähe des Minimums berechneten Werthe von Π. Nimmt man an, dass ausser Π_0 noch zwei andere Werthe von Π bekannt sind, welche ich Π_1 und Π_2 nenne, dass ferner ξ_1 und ξ_2 die denselben entsprechenden Werthe von ξ bezeichnen, so ist vermöge (b)

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 - \Pi_0 &= \alpha\xi_1 + \beta\xi_1^2 \\ \Pi_2 - \Pi_0 &= \alpha\xi_2 + \beta\xi_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen α und β; sie geben zuerst durch Elimination von α

$$\beta = \frac{\frac{1}{\xi_2}(\Pi_2 - \Pi_0) - \frac{1}{\xi_1}(\Pi_1 - \Pi_0)}{\xi_2 - \xi_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

worauf man α aus einer der Gleichungen (b) erhält, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\xi_1}(\varpi_1 - \varpi_0) - \beta\xi_1 \\ &= \frac{1}{\xi_2}(\varpi_2 - \varpi_0) - \beta\xi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(e)}$$

Nachdem auf diese Weise die Werthe von α und β vermittelst der durch die numerische Rechnung bekannten Werthe von ξ_1, ξ_2, ϖ_0, ϖ_1 und ϖ_2 gefunden worden sind, können wir denjenigen Werth von ξ bestimmen, welcher dem Minimum von ϖ entspricht und aus der Gleichung $\frac{d\varpi}{d\xi} = 0$ hergeleitet werden muss; wir erhalten nämlich aus (a), da ϖ_0, α und β von ξ unabhängig sind,

$$0 = \alpha + 2\beta\xi$$

mithin sind diejenigen Werthe von ξ und x, welche dem Minimum zugehören, durch die Ausdrücke gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{\alpha}{2\beta} \\ x &= x_0 + m\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(f)}$$

Durch Substitution des vorhergehenden Werthes von ξ folgt aus (b) das Minimum von ϖ, welches ich mit ϖ' bezeichne, nämlich

$$\varpi' = \varpi_0 - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \varpi_0 + \frac{\alpha}{2}\xi \quad \ldots \ldots \ldots \text{(g)}$$

Liegen die numerisch berechneten Werthe von ϖ etwas weiter vom Minimum, so dass die vorhergehende Rechnung wegen der grösseren Werthe von ξ keine hinlängliche Genauigkeit giebt, so kann man diese dadurch erhalten, dass man in der Taylor'schen Reihe noch das folgende, von ξ^3 abhängige Glied beibehält; in diesem Falle müssen jedoch vier numerische Werthe von ϖ berechnet werden.

Setzt man nach der Analogie der oben gebrauchten Bezeichnung

$$\frac{d^3\varpi}{dx^3} \cdot \frac{m^3}{2.3} = \gamma$$

unterscheidet man ferner die Grössen, welche sich auf die numerischen Werthe von ϖ beziehen, durch den Index 0, 1, 2, 3, so ist für den allgemeinen Werth von ϖ:

$$\varpi - \varpi_0 = \alpha\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3 \quad \ldots \ldots \ldots \text{(h)}$$

und die speciellen, numerisch berechneten Werthe geben die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varpi_1 - \varpi_0 &= \alpha\xi_1 + \beta\xi_1^2 + \gamma\xi_1^3 \\ \varpi_2 - \varpi_0 &= \alpha\xi_2 + \beta\xi_2^2 + \gamma\xi_2^3 \\ \varpi_3 - \varpi_0 &= \alpha\xi_3 + \beta\xi_3^2 + \gamma\xi_3^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \text{(i)}$$

welche zur Bestimmnng von α, β und γ dienen, da alle übrige darin enthaltene Grössen durch die numerische Rechnung bekannt sind.

Aus (h) folgt hierauf die Gleichung für das Minimum

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0 = \alpha + 2\beta\xi + 3\gamma\xi^2$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung bestimmt denjenigen Werth von ξ, welcher dem Minimum entspricht, nämlich

$$\xi = -\frac{\beta}{3\gamma} \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{3\gamma} + \left(\frac{\beta}{3\gamma}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

worauf der correspondirende Werth von x und das Minimum von Π aus (a) und (h) durch Substitution der gefundenen Werthe von α, β, γ und ξ erhalten werden.

Die Wahl unter den beiden Zeichen in dem Ausdrucke von ξ ist keinen Schwierigkeiten unterworfen, da die ungefähre Lage des Minimums bereits aus der numerischen Rechnung bekannt ist.

Es unterliegt keinem Anstande, die Näherung durch Beibehaltung mehrerer Glieder in der Taylor'schen Reihe noch weiter zu treiben; alsdann wird aber die Gleichung $\frac{d\Pi}{dx} = 0$ in Bezug auf ξ von einem höheren Grade und aus diesem Grunde ist es bequemer, die berechneten Werthe von Π so nahe bei dem Minimum zu nehmen, dass eine der vorhergehenden Methoden hinlängliche Genauigkeit gewährt.

Gewöhnlich wählt man die bei der numerischen Berechnung willkührlich angenommenen Werthe von x so, dass sie auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe bilden. In diesem Falle ist, wenn man x_0 als das erste Glied annimmt,

$$\xi_1 = 1$$
$$\xi_2 = 2$$
$$\xi_3 = 3$$

Die Rechnung wird ausserdem am bequemsten, wenn man die Differenzen der verschiedenen Ordnungen in Bezug auf die berechneten Werthe von Π einführt und die folgenden Bezeichnungen gebraucht:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1 - \Pi_0 = \Delta_0;\ \Pi_2 - \Pi_1 = \Delta_1;\ \Pi_3 - \Pi_2 = \Delta_2 \\ \Delta_1 - \Delta_0 = \Delta_0^2;\ \Delta_2 - \Delta_1 = \Delta_1^2 \\ \Delta_1^2 - \Delta_0^2 = \Delta_0^3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

Hierdurch geben zuerst die Gleichungen (c) für den Fall, dass drei Werthe von Π bekannt sind,

$$\Pi_1 - \Pi_0 = \alpha + \beta$$
$$\Pi_2 - \Pi_0 = 2\alpha + 4\beta$$

folglich, wenn man hieraus die Differenzen berechnet,

$$\Delta_0 = \alpha + \beta$$
$$\Delta_1 = \alpha + 3\beta$$
$$\Delta_0^2 = 2\beta$$

Die letzte dieser Gleichungen bestimmt β, worauf α aus der ersten, ξ, x und $\varPi$ in Bezug auf das Minimum aber aus (f) und (g) erhalten werden.

Sind vier Werthe von $\varPi$ berechnet worden, so geben die Gleichungen (i) auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned}
\varPi_1 - \varPi_0 &= \alpha + \beta + \gamma \\
\varPi_2 - \varPi_0 &= 2\alpha + 4\beta + 8\gamma \\
\varPi_3 - \varPi_0 &= 3\alpha + 9\beta + 27\gamma
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \alpha + \beta + \gamma \\
\Delta_1 &= \alpha + 3\beta + 7\gamma \\
\Delta_2 &= \alpha + 5\beta + 19\gamma \\
\Delta_0^2 &= 2\beta + 6\gamma \\
\Delta_1^2 &= 2\beta + 12\gamma \\
\Delta_0^3 &= 6\gamma
\end{aligned}$$

Die sechste, vierte und erste dieser Gleichungen dienen zur Bestimmung von 6γ, 2β und α, worauf die dem Minimum entsprechenden Werthe von ξ, x und $\varPi$ aus (k), (a) und (h) gefunden werden.

Durch die Zusammenstellung der vorhergehenden Resultate erhalten wir die folgenden *Formeln zur Bestimmung des Minimums für den Fall, dass die zur Berechnung von $\varPi$ gebrauchten Werthe von x auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe bilden, deren erstes Glied als x_0 angenommen wird:*

I) wenn drei Werthe von $\varPi$ bekannt sind,

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_0 = \varPi_1 - \varPi_0;\ \Delta_1 = \varPi_2 - \varPi_1 \\
&\Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_0 \\
&2\beta = \Delta_0^2 \\
&\alpha = \Delta_0 - \beta \\
&\xi = -\frac{\alpha}{2\beta} \\
&x = x_0 + m\xi \\
&\varPi' = \varPi_0 - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \varPi_0 + \frac{\alpha\xi}{2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

II) wenn vier Werthe von $\varPi$ bekannt sind,

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_0 = \varPi_1 - \varPi_0;\ \Delta_1 = \varPi_2 - \varPi_1;\ \Delta_2 = \varPi_3 - \varPi_2 \\
&\Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_0;\ \Delta_1^2 = \Delta_2 - \Delta_1 \\
&\Delta_0^3 = \Delta_1^2 - \Delta_0^2 \\
&6\gamma = \Delta_0^3 \\
&2\beta = \Delta_0^2 - 6\gamma \\
&\alpha = \Delta_0 - \beta - \gamma \\
&\xi = -\frac{\beta}{3\gamma} \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{3\gamma} + \left(\frac{\beta}{3\gamma}\right)^2} \\
&x = x_0 + m\xi \\
&\varPi' = \varPi_0 + \alpha\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(n)}$$

In manchen Fällen ist es bequemer, nicht das erste, sondern das zweite Glied der arithmetischen Reihe, welche die verschiedenen Werthe von x bilden, als x_0 anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$\xi_1 = -1$$
$$\xi_2 = +1$$
$$\xi_3 = +2$$

Vertauschen wir daher den Index 1, 2, 3 mit -1, 1 und 2, um ihn den Werthen von ξ entsprechend zu machen, bedienen wir uns ferner der folgenden Bezeichnungen, welche den in (l) eingeführten analog sind,

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_0 - \Pi_{-1} = \Delta_{-1};\ \Pi_1 - \Pi_0 = \Delta_0;\ \Pi_2 - \Pi_1 = \Delta_1 \\ \Delta_0 - \Delta_{-1} = \Delta^2_{-1};\ \Delta_1 - \Delta_0 = \Delta^2_0 \\ \Delta^2_0 - \Delta^2_{-1} = \Delta^3_{-1} \end{array}\right\} \quad . \ . \ (o)$$

so geben die Gleichungen (c) bei drei bekannten Werthen von Π

$$\Pi_{-1} - \Pi_0 = -\alpha + \beta$$
$$\Pi_1 - \Pi_0 = \alpha + \beta$$

folglich

$$\Delta_{-1} = \alpha - \beta$$
$$\Delta_0 = \alpha + \beta$$
$$\Delta_0 + \Delta_{-1} = 2\alpha$$
$$\Delta_0 - \Delta_{-1} = 2\beta$$

worauf die übrigen Grössen wie oben erhalten werden.

Bei vier bekannten Werthen von Π verwandeln sich die Gleichungen (i) in die folgenden:

$$\Pi_{-1} - \Pi_0 = -\alpha + \beta - \gamma$$
$$\Pi_1 - \Pi_0 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\Pi_2 - \Pi_0 = 2\alpha + 4\beta + 8\gamma$$

daher ist

$$\Delta_{-1} = \alpha - \beta + \gamma$$
$$\Delta_0 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\Delta_1 = \alpha + 3\beta + 7\gamma$$
$$\Delta^2_{-1} = 2\beta$$
$$\Delta^2_0 = 2\beta + 6\gamma$$
$$\Delta^3_{-1} = 6\gamma$$

Die sechste, vierte und erste dieser Gleichungen bestimmen 6γ, 2β und α, die übrigen Grössen erhält man sodann wie oben.

Stellen wir nun die vorhergehenden Resultate zusammen, so entstehen daraus die folgenden *Formeln zur Bestimmung des Minimums für den Fall, dass die zur Berechnung von Π gebrauchten Werthe von x auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe bilden, deren zweites Glied als x_0 angenommen wird:*

I) wenn drei Werthe von Π bekannt sind,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{-1} = \Pi_0 - \Pi_{-1};\ \Delta_0 = \Pi_1 - \Pi_0 \\ 2\alpha = \Delta_0 + \Delta_{-1} \\ 2\beta = \Delta_0 - \Delta_{-1} \\ \xi = -\dfrac{\alpha}{2\beta} \\ x = x_0 + m\xi \\ \Pi' = \Pi_0 - \dfrac{\alpha^2}{4\beta} = \Pi_0 + \dfrac{\alpha\xi}{2} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

II) wenn vier Werthe von Π bekannt sind,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{-1} = \Pi_0 - \Pi_{-1};\ \Delta_0 = \Pi_1 - \Pi_0;\ \Delta_1 = \Pi_2 - \Pi_1 \\ \Delta^2_{-1} = \Delta_0 - \Delta_{-1};\ \Delta^2_0 = \Delta_1 - \Delta_0 \\ \Delta^3_{-1} = \Delta^2_0 - \Delta^2_{-1} \\ 6\gamma = \Delta^3_{-1} \\ 2\beta = \Delta^2_{-1} \\ \alpha\ \ = \Delta_0 - \beta - \gamma \\ \xi = -\dfrac{\beta}{3\gamma} \pm \sqrt{-\dfrac{\alpha}{3\gamma} + \left(\dfrac{\beta}{3\gamma}\right)^2} \\ x = x_0 + m\xi \\ \Pi' = \Pi_0 + \alpha\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (q)$$

Da m sowohl positiv als negativ seyn kann, so reichen die vorhergehenden Formeln hin, welches Glied der arithmetischen Reihe auch für x_0 angenommen wird. Schreibt man nämlich dieselbe in umgekehrter Ordnung, so entsteht daraus ebenfalls eine arithmetische Reihe, bei welcher die Differenz das entgegengesetzte Zeichen erhält. Das erste Glied verwandelt sich alsdann in das letzte, und wenn die Reihe nur aus vier Gliedern besteht, das zweite in das dritte, wodurch x_0 jede beliebige Stellung in der Reihe erhalten kann.

113) Betrachten wir jetzt den zweiten Fall, in welchem der Ausdruck von Π zwei willkührliche Grössen x und y enthält, die zugleich auf eine solche Weise bestimmt werden sollen, dass jener Ausdruck dadurch zu einem Minimum wird.

Wir können hierzu zwei verschiedene Methoden gebrauchen, welche wir in dem Folgenden entwickeln wollen. Bei der Anwendung der ersten Methode legt man der einen willkührlichen Grösse y zuerst einen bestimmten Werth bei, welcher nicht sehr von dem, dem Minimum entsprechenden Werthe verschieden ist und mit y_0 bezeichnet werden soll. Sodann nimmt man statt x ebenfalls einen bestimmten Werth x_0 und verändert denselben nach und nach in $x_0 + m\xi_1$, $x_0 + m\xi_2$ etc., so wie es oben bei einer willkührlichen Grösse angegeben wurde. Für jeden dieser Werthe von x und den constanten Werth y_0 kann man nun den correspondirenden Werth von Π berechnen und, je nachdem man auf diese Weise drei oder vier Resultate erhalten hat, das Minimum von Π und den dazu

gehörigen Werth von x nach einer der obigen Formeln bestimmen. Dieses Minimum ist jedoch nicht das absolute, sondern nur ein relatives, welches sich auf den willkührlich angenommenen Werth y_0 bezieht, und durch Π'_0 bezeichnet werden soll.

Nehmen wir für den allgemeinen Werth von y den Ausdruck an:

$$y = y_0 + n\upsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

wobei n und υ eine analoge Bedeutung mit m und ξ in dem Ausdrucke (a) von Nro. 112 haben, geben wir sodann der Grösse υ nach und nach bestimmte Werthe υ_1, υ_2 etc., denen die Werthe

$$y_1 = y_0 + n\upsilon_1$$
$$y_2 = y_0 + n\upsilon_2$$
etc.

zugehören, so kann für jeden derselben das relative Minimum berechnet werden, ebenso wie es in Bezug auf y_0 geschehen ist; nur ist es nach Umständen erforderlich, bei jedem Werthe von y andere Werthe von x zu gebrauchen, damit die daraus berechneten Werthe von Π nahe genug bei dem jedesmaligen relativen Minimum liegen.

Die auf diese Weise erhaltenen relativen Minima, welche den angenommenen Werthen υ_1, υ_2 etc. entsprechen, bezeichne ich durch Π'_1, Π'_2 etc.

Behandelt man jetzt die Grössen Π'_0, Π'_1 Π'_2 etc. ebenso wie es oben in Bezug auf Π_0, Π_1, Π_2 etc. angegeben wurde, indem man in den dortigen Formeln Π, x, m, ξ mit Π', y, n, υ verwechselt, so erhält man das Minimum in Bezug auf die verschiedenen Werthe von Π' und den ihm entsprechenden Werth von y, worauf man den dazu gehörigen Werth von x leicht durch Interpolation aus denjenigen Werthen findet, welche den Grössen Π'_0, Π'_1, Π'_2 etc. correspondiren und durch die Berechnung der letzteren bereits bekannt geworden sind.

Das letztere Minimum von Π' ist das absolute Minimum von Π, welchem daher die zuletzt gefundenen Werthe der willkührlichen Grössen x und y entsprechen, so wie es beabsichtigt wurde, sie zu bestimmen.

Die zweite Methode, welche hierbei gebraucht werden kann, besteht darin, dass man nicht zuerst das relative Minimum in Bezug auf eine der willkührlichen Grössen sucht, sondern diese gleichzeitig so bestimmt, dass sie dem absoluten Minimum zugehören.

Setzen wir zu dem Ende ebenso wie bei der vorhergehenden Methode voraus, dass Π_0 den bestimmten Werthen x_0 und y_0 von x und y, Π dagegen den allgemeinen Werthen dieser Grössen entspricht, welche durch $(x_0 + m\xi)$ und $(y_0 + n\upsilon)$ ausgedrückt werden, so entsteht Π aus Π_0 dadurch, dass x_0 und y_0 um $m\xi$ und $n\upsilon$ zunehmen; der Unterschied von beiden ist daher durch die Reihe gegeben:

$$\Pi - \Pi_0 = \frac{d\Pi}{dx}.m\xi + \frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{m^2\xi^2}{2}$$
$$+ \frac{d\Pi}{dy}.n\upsilon + \frac{d^2\Pi}{dy^2}.\frac{n^2\upsilon^2}{2}$$
$$+ \frac{d^2\Pi}{dx\,dy}.m\xi.n\upsilon \text{ etc.}$$

wobei die Differentialcoefficienten für $\xi = \upsilon = 0$ berechnet und daher von diesen Grössen unabhängig sind. Hiernach kann die vorhergehende Reihe unter die Gestalt gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned}\Pi - \Pi_0 = \alpha\xi + \beta\xi^2 \\ + \delta\upsilon + \varepsilon\upsilon^2 \\ + \eta\xi\upsilon \text{ etc.}\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(b)}$$

wenn man

$$\frac{d\Pi}{dx}.m = \alpha$$
$$\frac{d^2\Pi}{dx^2}.\frac{m^2}{2} = \beta$$
$$\frac{d\Pi}{dy}.n = \delta$$
$$\frac{d^2\Pi}{dy^2}.\frac{n^2}{2} = \varepsilon$$
$$\frac{d^2\Pi}{dx\,.\,dy}.mn = \eta$$

setzt, welche letztere Grössen unbekannte Constanten sind und durch gegebene Werthe von $\Pi - \Pi_0$ bestimmt werden müssen. Da ihre Anzahl 5 ist, so ist es erforderlich, ausser Π_0 noch 5 Werthe von Π in der Nähe des absoluten Minimums zu berechnen, indem man den Grössen ξ und υ bestimmte Werthe beilegt. Unterscheidet man die Grössen, welche sich auf diese 5 Werthe von Π beziehen, durch den Index 1,2....5, so entstehen durch die successive Substitution derselben in der Gleichung (b) fünf Gleichungen, in denen Π, ξ, υ mit Π_1, ξ_1, υ_1 Π_5, ξ_5, υ_5 verwechselt sind, und welche nur die unbekannten Grössen α, β, δ, ε und η enthalten, mithin zur Bestimmung der letzteren hinreichen.

Die Bedingung des Minimums giebt hierauf die beiden Gleichungen

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = 0$$
$$\frac{d\Pi}{d\upsilon} = 0$$

oder vermöge (b)

$$\left.\begin{aligned}0 = \alpha + 2\beta\xi + \eta\upsilon \\ 0 = \delta + \eta\xi + 2\varepsilon\upsilon\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(c)}$$

Aus diesen Gleichungen können die Werthe von ξ und υ gefunden werden, worauf x und y durch die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}x = x_0 + m\xi \\ y = y_0 + n\upsilon\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(d)}$$

gegeben sind.

Die auf diese Weise erhaltenen Werthe von x und y sind diejenigen, welche dem absoluten Minimum von Π entsprechen.

Den kleinsten Werth von Π endlich giebt die Gleichung (b), wenn man darin die gefundenen Werthe von ξ und v substituirt.

Obgleich der Anwendung der letzten Methode im Allgemeinen keine Hindernisse im Wege stehen, so wird doch die Rechnung dadurch beschwerlich, dass in den fünf Gleichungen, welche zur Bestimmung der Constanten α, β etc. dienen, diese vermischt vorkommen und durch Elimination aus denselben gefunden werden müssen. Da jedoch die Wahl der numerisch berechneten Werthe von Π der Willkühr überlassen bleibt, so wird dadurch ein Mittel an die Hand gegeben, die Rechnung bedeutend zu erleichtern. Dieses besteht darin, dass man bei zwei Werthen von Π, wofür ich Π_1 und Π_2 annehme, $y = y_0$, bei zwei anderen Werthen Π_3 und Π_4 dagegen $x = x_0$ setzt, wonach bei den ersteren $v = 0$, bei den letzteren $\xi = 0$ werden. Hierdurch verwandeln sich die aus (b) resultirenden Gleichungen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi_1 - \Pi_0 &= \alpha\xi_1 + \beta\xi_1^2 \\
\Pi_2 - \Pi_0 &= \alpha\xi_2 + \beta\xi_2^2 \\
\Pi_3 - \Pi_0 &= \delta v_3 + \varepsilon v_3^2 \\
\Pi_4 - \Pi_0 &= \delta v_4 + \varepsilon v_4^2 \\
\Pi_5 - \Pi_0 &= \alpha\xi_5 + \beta\xi_5^2 + \delta v_5 + \varepsilon v_5^2 + \eta\xi_5 v_5
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(e)}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen dienen zur Bestimmung von α und β nach den Formeln der vorhergehenden Nummer, die beiden folgenden zur Bestimmung von δ und ε nach ebenden Formeln, wenn man darin α, β und ξ mit δ, ε und v verwechselt. Die fünfte Gleichung endlich giebt η nach vorheriger Substitution der für α, β, δ und ε gefundenen Werthe.

Alles übrige kann sodann vermittelst der Gleichungen (c), (d) und (b) berechnet werden.

Es hat keine Schwierigkeiten, die hier gebrauchten Methoden auf eine grössere Anzahl willkührlicher Grössen auszudehnen; das Mühsame der Rechnung nimmt aber mit der Menge derselben bedeutend zu. Da nun nicht leicht Fälle vorkommen werden, wo es erforderlich ist, mehr als zwei willkührliche Grössen zugleich zu bestimmen, so scheint es mir unnöthig zu seyn, weiter in das Detail dieser Sache einzugehen.

Nur eine Bemerkung über den Gebrauch der vorhergehenden Methoden glaube ich noch beifügen zu müssen. Diese Methoden gründen sich sämmtlich auf die in (b) der vorhergehenden und gegenwärtigen Nummer enthaltenen Reihen, in welchen nur eine gewisse Anzahl von Gliedern beibehalten, die Grössen ξ und v als klein vorausgesetzt und die unbekannten Coefficienten durch gegebene Werthe von Π, ξ und v bestimmt werden.

Die erste Bedingung, welche bei der Anwendung jener Methoden erfüllt werden muss, ist daher die, dass die numerisch berechneten Werthe von Π nahe genug bei einander liegen, um die angeführten Reihen mit Sicherheit gebrauchen zu können, wozu erfordert wird, dass diese Werthe nur wenig von einander verschieden sind.

Eine zweite Bedingung, deren Erfüllung ebenfalls unerlässlich ist, bezieht sich auf die Lage des Minimums gegen die berechneten Werthe von Π. Da nämlich die erwähnten Reihen auch auf dasselbe angewandt werden, so darf es von diesen Werthen nur wenig entfernt seyn, und die Sicherheit ist am grössten, wenn es zwischen ihnen liegt. Ob dieses der Fall ist, lässt sich schon im Voraus nach den berechneten Werthen von Π beurtheilen, zeigt sich aber noch deutlicher nach beendigter Rechnung. Bei zwei willkührlichen Grössen muss man sich die Werthe von Π in eine Tafel mit doppeltem Eingange getragen denken und darauf Rücksicht nehmen, dass das Minimum innerhalb der Grenzen dieser Tafel liegt.

Um die vorhergehenden Methoden an einem Beispiele zu erläutern, wähle ich die in der folgenden Tafel enthaltenen Werthe von Π, welche in einem speciellen Falle für die dabei gesetzten Werthe von x und y berechnet und in Einheiten der vierten Decimalstelle ausgedrückt sind. Da es jedoch bei Berechnung des Minimums nicht auf beständige Factoren ankommt, so können sie als ganze Zahlen betrachtet werden:

	y			
x	-0.5	0	$+0.5$	$+1.0$
0.20	—	—	—	771
0.25	—	—	559	601
0.30	—	512	505	829
0.35	669	481	664	—
0.40	647	566	—	—
0.45	714	—	—	—

Berechnet man zuerst die relativen Minima für die verticalen Columnen nach (p) der vorhergehenden Nummer, indem man jedesmal den mittleren Werth als Π_0 annimmt, so erhält man die in der folgenden Tafel angegebenen Resultate:

y	-0.5	0	$+0.5$	$+1.0$
m	0.05	0.05	0.05	0.05
2α	45	54	105	58
2β	89	116	213	398
ξ —	0.253	0.233	0.247	0.073
x	0.387	0.338	0.288	0.246
Π'	644.2	477.9	498.5	599.9

Vermittelst der Formel (n) der vorhergehenden Nummer findet man hierauf das Minimum in Bezug auf die berechneten Werthe von π' oder das absolute Minimum von π nebst dem dazu gehörigen Werthe von y, wenn man in jener Formel π, x, m, ξ mit π', y, n, v verwechselt, den dem Minimum entsprechenden Werth von x endlich durch Interpolation aus den in der vorhergehenden Tafel enthaltenen Werthen von x. Diess giebt

$$n = 0.5$$
$$6\gamma = -106.1$$
$$2\beta = +293.0$$
$$\alpha = -295.2$$
$$v = +1.326$$
$$y = +0.163$$
$$x = 0.322$$

Zur Berechnung der dem Minimum entsprechenden Werthe von x und y nach den Formeln (e), (c) und (d) der gegenwärtigen Nummer, wähle ich aus der ersten der vorhergehenden Tafeln die folgenden Werthe von π, zwischen welchen das Minimum offenba liegt:

		y		
		— 0.5	0	+ 0.5
x	0.25	—	—	559
	0.30	—	512	505
	0.35	669	481	664

Nimmt man 664 als π_0 an, so müssen die diese Grösse enthaltenden, verticalen und horizontalen, Reihen rückwärts gelesen werden und es ist

$$x_0 = 0.35$$
$$y_0 = +0.5$$
$$m = -0.05$$
$$n = -0.5$$
$$\xi_5 = v_5 = +1$$

Hierdurch geben die allegirten Formeln in Verbindung mit (m) der vorhergehenden Nummer

$$\alpha = -265.5$$
$$\beta = +106.5$$
$$\delta = -368.5$$
$$\varepsilon = +185.5$$
$$\eta = +190.0$$
$$\xi = +0.663$$
$$v = +0.654$$
$$x = 0.317$$
$$y = +0.173$$

welche Werthe von x und y sehr nahe mit den durch die erste Methode erhaltenen übereinstimmen.

Absonderung der willkührlichen Grössen.

114) In manchen Fällen sondern sich die willkührlichen Grössen, welche in dem Ausdrucke von Π vorkommen, so von einander ab, dass einige derselben nur in einem Theile der ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten L, M, G, S und T enthalten sind, und dass diese durch bestimmte Werthe jener Grössen sowohl positiv, als negativ, und ebenso klein, als die correspondirenden Glieder der dritten Ordnung, werden können. Untersuchen wir daher die Folgen, welche dieses auf die Bestimmung des Minimums hat.

Bei der ursprünglichen Entwickelung der Gleichungen der gebrochenen Strahlen wurden X^2, Y^2, φ^2, $\delta\nu$ und $\Delta\frac{1}{c_1}$ als kleine Grössen von einerlei Ordnung angesehen; aus den beiden ersten entstand nachher R^2, welches daher mit ihnen von einerlei Ordnung ist; aus $\delta\nu$ dagegen wurden die Coefficienten ε, η und θ abgeleitet und zwar so, dass ε von der zweiten, η von der ersten und θ von der vierten Dimension in Bezug auf $\delta\nu$ sind; aus $\Delta\frac{1}{c_1}$ endlich folgten die Grössen Δ und Δ', beide von einerlei Ordnung mit $\Delta\frac{1}{c_1}$. Bezeichnen wir daher durch α eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie R^2, so sind

$$\begin{array}{ll} R^2,\ \varphi^2\ \eta,\ \Delta \text{ und } \Delta' \text{ von der Ordnung} & \alpha \\ \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha^2 \\ \theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha^4 \end{array}$$

und können daher aus den entsprechenden Potenzen von α durch Multiplication mit verschiedenen Factoren entstanden gedacht werden.

Hiernach hat jedes Glied von Π, welches einen ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Coefficienten enthält, einen Factor von der Ordnung α^3; sodann ist jenem Coefficienten eine Correction von der Ordnung α beigefügt, so dass die erwähnten Glieder sämmtlich die Form haben:

$$A\,\alpha^3\,(L+\alpha\lambda)^2$$

Dagegen sind diejenigen Glieder von Π, welche nur Grössen der dritten Ordnung enthalten, mit Factoren von der Ordnung α^5 versehen und daher unter der Form

$$B\,Q^2\,\alpha^5$$

begriffen.

Nach diesen Prämissen kann der Ausdruck von Π unter die Gestalt gebracht werden:

$$\Pi = \alpha^3\,\Sigma A\,(L+\alpha\lambda)^2 + \alpha^5\,\Sigma B\,Q^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

wobei Σ die Summe aller ähnlichen Glieder bezeichnet.

Kommen nun in diesem Ausdrucke die willkührlichen Grössen x, y, z etc. vor, so giebt jede derselben für das Minimum eine Gleichung von der Form

$$0 = \frac{d\Pi}{dx}$$

oder vermöge des vorhergehenden Werthes von Π

$$0 = \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{dL}{dx} + \alpha^4 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{d\lambda}{dx} + \alpha^5 \Sigma B Q \frac{dQ}{dx}$$

Der Voraussetzung nach können die Grössen L solche Werthe erhalten, dass sie von derselben Ordnung wie $\alpha\lambda$ werden. Ist es hierdurch möglich, Π zu einem Minimum zu machen, so verdienen die ihm entsprechenden Werthe der willkührlichen Grössen jeden Falls den Vorzug, weil andere Minima von Π, welche etwa noch stattfinden können und bei denen die Grössen L bedeutende Werthe erhalten, nothwendig grösser ausfallen müssen, als das erwähnte, dessen Glieder sämmtlich von der Ordnung α^5 sind.

Bezeichnet man daher durch $\alpha\mathfrak{L}$ einen solchen Werth von L, so verwandelt sich dadurch die vorhergehende Gleichung in die folgende:

$$0 = \alpha^4 \Sigma A (\mathfrak{L} + \lambda) \frac{dL}{dx} + \alpha^5 \Sigma A (\mathfrak{L} + \lambda) \frac{d\lambda}{dx} + \alpha^5 \Sigma B Q \frac{dQ}{dx}$$

Die beiden letzten Glieder dieser Gleichung sind von einer höheren Ordnung, als das erste, und fallen daher weg, da bei der anfänglichen Entwickelung solche Glieder nicht berücksichtigt wurden. Hierdurch reducirt sich jene Gleichung auf

$$0 = \alpha^4 \Sigma A (\mathfrak{L} + \lambda) \frac{dL}{dx}$$

oder

$$0 = \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{dL}{dx}$$

Aehnliche Gleichungen geben auch die anderen willkührlichen Grössen y, z etc.; man hat daher zur Bestimmung der letzteren das System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{dL}{dx} \\ 0 &= \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{dL}{dy} \\ 0 &= \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda) \frac{dL}{dz} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(b)}$$

Diese Gleichungen sind in der Regel nicht linearisch und haben mithin verschiedene Systeme von Wurzeln. Können jedoch die Fac-

toren $(L+\alpha\lambda)$, welche sich auf die verschiedenen Glieder von Π beziehen, durch einerlei Werthe der willkührlichen Grössen zugleich verschwinden, so bilden diese Werthe ein System von Wurzeln jener Gleichungen, und zwar das vortheilhafteste, weil dadurch die correspondirenden Glieder in dem Ausdrucke von Π ebenfalls $=0$ werden. Unterscheiden wir daher die Factoren $(L+\alpha\lambda)$, welche diesen verschiedenen Gliedern angehören, durch die Beisetzuug von Accenten, so entstehen dadurch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(L+\alpha\lambda)&=0\\(L+\alpha\lambda)'&=0\\(L+\alpha\lambda)''&=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(c)$$

oder, wenn man statt derselben ihre Werthe aus dem Ausdrucke von Π substituirt,

$$\left.\begin{aligned}0&=L+Q\left(\frac{6}{5}R^2+3K^2\varphi^2\right)+(L)\Delta'\\0&=M+QK(3R^2+4K^2\varphi^2)+(M)\Delta'\\0&=G+QK^2\left(2R^2+\frac{3}{2}K^2\varphi^2\right)+(N)\Delta'\\0&=S+\eta s+U\left(\frac{2}{3}R^2+K^2\varphi^2\right)+2(S)\Delta'\\0&=T+\eta t+\frac{2}{3}W\varphi^2+UKR^2-(u)\Delta'\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(d)$$

Von diesen Gleichungen müssen der Voraussetzung nach in jedem einzelnen Falle nur diejenigen genommen werden, in denen eine gewisse Anzahl der willkührlichen Grössen allein vorkommt und welchen durch einerlei Werthe der letzteren zugleich Genüge geleistet werden kann, worauf die ihnen entsprechenden Glieder in dem Ausdrucke von Π, deren Summe in (a) durch $\alpha^3\Sigma A(L+\alpha\lambda)^2$ bezeichnet wurde, wegfallen.

Ist die Anzahl der auf diese Weise erhaltenen Gleichungen kleiner, als die Anzahl der dadurch zu bestimmenden willkührlichen Grössen, so können diejenigen unter ihnen, welche unbestimmt bleiben, dazu benutzt werden, um die alsdann noch vorhandenen Glieder der dritten Ordnung oder, nach der in (a) gebrauchten Bezeichnung, $\alpha^5\Sigma BQ^2$ zu einem Minimum zu machen.

Können die Grössen L etc. zwar von derselben Ordnung wie $\alpha\lambda$ werden, jedoch so, dass es nicht möglich ist, den Gleichungen (c) oder (d) durch einerlei Werthe der willkührlichen Grössen Genüge zu leisten, so müssen die Gleichungen (b) an die Stelle von jenen gesetzt werden, worin statt L etc. die in den Gleichungen (d) enthaltenen Grössen der zweiten Ordnung, statt $\alpha\lambda$ etc. die in denselben Gleichungen vorkommenden Grössen der dritten Ordnung, statt A etc. endlich die Factoren der correspondirenden Glieder in (d) von Nro. 97 zu substituiren sind.

Bisweilen wird bei Instrumenten die Forderung gemacht, dass eine oder mehrere der verschiedenen Abweichungen so vollkommen als möglich vernichtet werden sollen. Dieser Forderung entspricht ebenfalls die vorhergehende Auflösung, wenn man unter dem Summationszeichen Σ nur diejenigen Glieder beibehält, welche jenen Abweichungen zugehören, daher die ihnen correspondirenden Gleichungen (d) auch hier Anwendung finden.

Nachdem auf diese Weise ein Theil der in dem Ausdrucke von π enthaltenen Glieder weggefallen ist, dienen die übrig gebliebenen zur Bestimmung der noch darin vorkommenden willkührlichen Grössen, wozu es hinreicht, die Summe jener Glieder zu einem Minimum zu machen.

Welche der vorhergehenden Verfahrungsarten in jedem einzelnen Falle am zweckmässigsten angewandt wird, lässt sich erst dann beurtheilen, wenn die Ausdrücke, welche sich auf denselben beziehen, gehörig entwickelt sind, um zu sehen, auf welche Weise die unbestimmten Grössen darin vorkommen, wenn ferner die von der Deutlichkeit unabhängigen Nebenumstände, welche dabei berücksichtigt werden müssen, erörtert und nöthigenfalls durch Bedingungsgleichungen ausgedrückt sind. Es können jedoch einige Classen von Instrumenten angegeben werden, bei denen die eine oder die andere Methode mit Vortheil gebraucht werden kann und wobei sich die Formeln zum Theil vereinfachen.

Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an dem Objective angebracht ist.

115) Wenn das Instrument mit einem gewöhnlichen achromatischen Objective versehen ist, so sind die Entfernungen der zu dem letzteren gehörigen brechenden Flächen von einander sehr kleine Grössen, welche in den Gliedern der dritten Ordnung vernachlässigt werden können. Setzen wir ferner voraus, dass die Hauptblendung an dem Objective angebracht ist, so wird, wie wir bereits am Ende von Nro. 86 erinnert haben, K eine Grösse von derselben Ordnung wie jene Entfernungen. Da ausserdem die Farbenzerstreuung in der Axe durch die Wirkung des Objectivs bis auf eine Grösse der dritten Ordnung aufgehoben wird, so sind sowohl S_i als S_{m-1} für alle auf das Objectiv folgende Flächen kleine Grössen jener Ordnung, welche nach den angenommenen Grundsätzen in den Gliedern der dritten Ordnung, mit Ausnahme der den farbigen Rand betreffenden, nicht beibehalten werden. Hierdurch wird in diesen Gliedern in Bezug auf die Flächen des Objectivs

$$\left.\begin{aligned} &K = K_1 = K^{(m)} = K_m = K_e = 0 \\ &V_m = V_e = 1 \\ &S_i = S_{m-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (a)$$

folglich ist nach der in Nro. 37 enthaltenen Zusammenstellung, da in den Formeln für $(L)^{(m)}$, $(M)^{(m)}$ und $(N)^{(m)}$

$$(K)_e = 0$$

gesetzt werden muss,

$$\left.\begin{aligned} (L) &= \Sigma_1^e \, (A)_m \\ (M) &= \Sigma_1^e \, \frac{(B)_m}{\nu_m} \\ (N) &= \Sigma_1^e \, \frac{(C)_m}{\nu_m^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Wir werden in der Folge sehen, dass (M) in dem gegenwärtigen Falle sich auf eine Constante reducirt, daher das allein davon abhängende Glied weggelassen werden kann, da es auf die Bestimmung des Minimums keinen Einfluss hat. Ausserdem fällt auch das von (N) abhängende Glied weg. Substituiren wir nämlich statt $(C)_m$ seinen Werth aus (g) von Nro. 11, so wird

$$(N) = \sum\nolimits_1^e \left(\frac{n^2-1}{2\nu^2}\right)_m$$

Drücken wir allgemein n durch ν aus, so ist

$$n_m = \frac{\nu_m}{\nu_{m-1}}$$

und wenn dieser Ausdruck auf die erste brechende Fläche angewandt wird,

$$n_1 = \frac{\nu_1}{\nu_0}$$

Für diese Fläche ist aber

$$n_1 = \nu_1$$

Soll daher der vorhergehende Ausdruck von n_m auch bei der ersten brechenden Fläche gebraucht werden, so muss man

$$\nu_0 = 1$$

setzen. Ferner ist auch

$$\nu_e = 1$$

weil sich hinter dem Objective Luft befindet und die Summe nur auf die Flächen desselben ausgedehnt wird.

Mit Berücksichtigung dieser besonderen Werthe können wir daher den Ausdruck von n_m bei Berechnung von (N) allgemein gebrauchen. Er giebt

$$\sum\nolimits_{\substack{1\\m}}^e \left(\frac{n^2-1}{2\nu^2}\right)_m = -\sum\nolimits_{\substack{1\\m}}^e \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_m^2} - \frac{1}{\nu_{m-1}^2}\right)$$

Nehmen wir nun die Summe nach (S) von Nro. 3, indem wir

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{\nu^2}$$

$$i = e$$

setzen, so wird

$$\sum_{\substack{1 \\ \mathrm{m}}}^{\mathrm{e}} \left(\frac{n^2 - 1}{2\,\nu^2}\right)_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_{\mathrm{e}}^2} - \frac{1}{\nu_0^2}\right) = 0$$

folglich auch

$$(N) = \sum_{\substack{1 \\ \mathrm{m}}}^{\mathrm{e}} \frac{(C)_{\mathrm{m}}}{\nu_{\mathrm{m}}^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

Sodann ist nach der allegirten Zusammenstellung

$$\left.\begin{array}{l} (S) = 0 \\ u_{\mathrm{e}} = u_{\mathrm{i}} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

folglich, da bei der Berechnung von (u)

$$(K)_{\mathrm{e}} = K_{\mathrm{e}} - V_{\mathrm{e}}^2 g_{\mathrm{e}} = -g_{\mathrm{e}}$$

gesetzt werden muss,

$$(u) = (S_{\mathrm{i}} - S_{\mathrm{e}})\, y_{\mathrm{e}}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(e)}$$

Ferner erhalten wir aus (h) und (e) von Nro. 96 zum Gebrauch in den Gliedern $(S + {}_{\eta}s)$ und $(T + {}_{\eta}t)$

$$\left.\begin{array}{l} s = 0 \\ t = \sum_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}} K^{(\mathrm{m})}\, T_{\mathrm{m}-1}\, (S_{\mathrm{i}} - S_{\mathrm{m}-1}) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(f)}$$

wobei es hinreicht, die Summe nur auf die Oculare auszudehnen, da für die Flächen des Objectivs $K^{(\mathrm{m})} = 0$ ist.

Endlich ist vermöge (i) und (b) der allegirten Nummer in den Gliedern $\frac{\theta\, s^2 R^2}{2}$ und $\frac{\theta\, t^2 \varphi^2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} s = \sum_1^{\mathrm{e}} S^{(\mathrm{m})}\, \gamma_{\mathrm{m}} \\ t = \sum_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}} \left[T^{(\mathrm{m})}\, \gamma_{\mathrm{m}} + K^{(\mathrm{m})}\, T_{\mathrm{m}-1}\, (S_{\mathrm{i}} - S_{\mathrm{m}-1})\right] \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(g)}$$

Unter diesen Voraussetzungen reducirt sich daher die Formel (d) von Nro 97 auf die folgende:

$$\varPi = \left(\frac{V\,V_{,}\,z}{\nu\,\nu_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^6}{36}\left[L + \frac{6}{5}\, Q R^2 + (L)\,\Delta'\right]^2 + \frac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} \\ + \frac{R^4 \varphi^2}{12}\left[M + (M)\,\Delta'\right]^2 + \frac{R^2 \varphi^4}{3}\left[G^2 + H^2\right] \\ + \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + \frac{2}{3}\, U R^2\right]^2 \\ + \frac{\varepsilon \varphi^2}{2}\left[T + {}_{\eta}t + \frac{2}{3}\, W \varphi^2 - (u)\,\Delta'\right]^2 \\ + \frac{Q^2 R^{10}}{600} \\ + \frac{\theta\, s^2 R^2}{2} + \frac{\varepsilon\, U^2 R^6}{36} \\ + \frac{\theta\, t^2 \varphi^2}{2} + \frac{\varepsilon\, W^2 \varphi^6}{36} + \frac{\varepsilon\, (u)^2 \varphi^2 \Delta^2}{2} \end{array} \right\} . \quad \text{(h)}$$

Besteht das Instrument ausser dem achromatischen Objective noch aus Ocularen, so sondern sich die bedeutenden Glieder in dem Ausdrucke von $\varPi$, welche von dem Objective abhängen, so von denen

ab, die sich auf die Oculare beziehen, dass dadurch eine grosse Erleichterung in der Rechnung möglich wird.

Wir werden nämlich in der Folge sehen, dass die beiden Glieder

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{VV_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \frac{R^6}{36}\left[L+\frac{6}{5}Q\,R^2+(L)\,\Delta'\right]^2 \\ \left(\frac{VV_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+\frac{2}{3}U\,R^2\right]^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{i})$$

von denen sich das erste auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe, das zweite auf die Farbenzerstreuung in der Axe bezieht, hauptsächlich von dem Objective abhängen, indem die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen L und S nur solche von den Ocularen herrührende Glieder enthalten, welche in Vergleichung mit den correspondirenden Gliedern des Objectivs sehr klein sind.

Dagegen werden die Veränderungen in den Gliedern

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{VV_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \frac{R^2\varphi^4}{3}\left[G^2+H^2\right] \\ \left(\frac{VV_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \frac{\varepsilon\varphi^2}{2}\left[T+\eta t+\frac{2}{3}W\varphi^2-(u)\,\Delta'\right]^2\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{k})$$

wovon das erste den bedeutendsten Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe ausmacht, das letzte sich auf den farbigen Rand bezieht, hauptsächlich durch die Oculare hervorgebracht, weil die sonst äusserst beträchtlichen Glieder des Objectivs durch den sehr kleinen Werth, welchen K_1 in dem gegenwärtigen Falle erhält, auf unbedeutende Grössen reducirt werden, die in Bezug auf G und H sehr nahe als constant zu betrachten sind, in Bezug auf T dagegen ganz vernachlässigt werden können.

Das Glied

$$\left(\frac{VV_{,}z}{v\,v_{,}}\right)^2 \frac{R^4\varphi^2}{12}\left[M+(M)\,\Delta'\right]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{l})$$

welches den minder beträchtlichen Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe bildet, besteht sowohl aus Theilen, welche dem Objective angehören, als aus solchen, die von den Ocularen herrühren. Beide sind in Ansehung ihrer Grösse von einerlei Ordnung.

Hierzu kommen endlich noch die von Δ, Q, s, U, t und W abhängigen Glieder, welche, wie wir oben bereits angeführt haben, kleine Correctionen der verschiedenen Abweichungen enthalten.

116) Sollen bei unverändertem Objective mehrere Oculareinsätze angebracht werden, wie es bei Fernröhren und zusammengesetzten Microscopen häufig der Fall ist, so muss man die Oculare so construiren, dass die von ihnen hauptsächlich abhängenden Abweichungen für jeden Oculareinsatz abgesondert so klein als möglich werden. Hierbei müssen wir jedoch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Oculare so eingerichtet sind, dass der farbige Rand gehoben werden kann oder nicht. Im ersteren Falle ist die Vernichtung desselben als

eine Forderung zu betrachten, welche an die Ocularemsätze gemacht werden muss, wozu es nothwendig ist, bei jedem von ihnen die willkührlichen Grössen so zu bestimmen, dass $\varPi$ in Bezug auf das Glied, welches sich auf den farbigen Rand bezieht, zu einem Minimum wird, und es ist zweckmässig, hierbei mit möglicher Sorgfalt zu Werke zu gehen, weil das Auge gegen den farbigen Rand, wegen der dadurch abgesonderten Farben, sehr empfindlich ist. Nach der in Nro. 114 gemachten Bemerkung giebt daher das zweite in (k) der vorhergehenden Nummer angegebene Glied die Gleichung:

$$0 = T + {}_{\eta}t + \frac{2}{3} W\varphi^2 - (u)\,\Delta' \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

welche auf jeden Oculareinsatz besonders angewandt werden muss.

Nachdem auf diese Weise das letzte der allegirten Glieder aus dem Ausdrucke von $\varPi$ weggefallen ist, bleibt es noch übrig, das erste zu einem Minimum zu machen, welches geschieht, wenn G und H verschwinden oder die kleinstmöglichen positiven oder negativen Werthe erhalten. Wir haben schon oben bemerkt, dass H bei denjenigen Einrichtungen des Instrumentes, welche denselben Zweck erfüllen, beinahe als constant zu betrachten ist, so dass hierdurch wenig zur Verminderung des erwähnten Gliedes beigetragen werden kann. Die Grösse G hingegen erleidet beträchtliche Veränderungen, welche, wie bereits angeführt wurde, hauptsächlich von den Ocularen herrühren, und da sie bei den gewöhnlichen Einrichtungen nicht verschwinden kann, so muss man diejenige Einrichtung wählen, welche der Gleichung (a) Genüge leistet und zugleich den kleinstmöglichen positiven oder negativen Werth von G giebt, wenn man sich nicht absichtlich von diesem etwas entfernt, um andere Rücksichten nehmen zu können. Meistens bedient man sich hierbei am zweckmässigsten der in Nro. 112 angegebenen Methode, indem man mehrere Werthe von G in der Nähe des Minimums berechnet und hieraus das letztere herleitet.

Wir werden bei den speciellen Anwendungen sehen, dass G im Allgemeinen abnimmt, wenn die Oculare so construirt werden, dass das Auge sich so nahe wie möglich hinter dem letzten Glase befindet. Da aber eine Unbequemlichkeit daraus entsteht, wenn die Entfernung des Auges von dem Instrumente allzu gering wird, so kann man hierin eine gewisse Grenze nicht überschreiten und muss bei der Bestimmung des Minimums nur solche Einrichtungen mit einander vergleichen, bei welchen die Entfernung des Auges dieselbe ist. Auch ist es nothwendig, bei der Berechnung des Ortes des Auges auf die Abweichung wegen der Gestalt Rücksicht zu nehmen, welche denselben bedeutend verändert.

Sind die Oculare so eingerichtet, dass der farbige Rand nicht gehoben werden kann, so ist es nicht möglich, der Gleichung (a) Genüge zu leisten. In diesem Falle bleibt daher nichts Anderes übrig,

als die Summe der in (k) der vorhergehenden Nummer angegebenen Glieder zu einem Minimum zu machen, wobei jedoch in dem letzten derselben die Grössen der dritten Ordnung vernachlässigt werden können, da eine genäherte Berechnung zu diesem Zwecke hinreicht. Diess giebt die Gleichung

$$\frac{R^2 \varphi^2}{3} [G^2 + H^2] + \frac{\varepsilon T^2}{2} = Min. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

welche auf dieselbe Weise zu behandeln ist, wie es im vorhergehenden Falle mit G geschah.

Die angegebenen Rechnungen müssen für jeden Ocularcinsatz besonders geführt werden, und es wird dabei vorausgesetzt, dass die Einrichtung des Objectivs vorläufig in so weit näherungsweise bekannt ist, um die kleinen davon abhängenden Glieder, welche in den Formeln vorkommen, mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen zu können, was bei den Anwendungen keine Schwierigkeiten darbietet. Hierdurch werden die willkührlichen Grössen bei sämmtlichen Oculareinsätzen bestimmt, so dass nunmehr die davon abhängenden Theile der in (i) und (l) der vorhergehenden Nummer angegebenen Glieder für jeden derselben besonders berechnet werden können, worauf jene Glieder nur noch diejenigen willkührlichen Grössen enthalten, welche sich auf das Objectiv beziehen, und daher in Verbindung mit den übrigen vom Objective allein abhängenden Gliedern zur Bestimmung der Dimensionen des letzteren dienen.

Da es jedoch nicht möglich ist, diese Dimensionen so zu wählen, wie es jeder Oculareinsatz, abgesondert betrachtet, erfordern würde, so müssen zuerst nach den in Nro. 103 enthaltenen Principien aus den, den einzelnen Oculareinsätzen zugehörigen Grössen diejenigen berechnet werden, welche sich auf einen mittleren Oculareinsatz beziehen, um sie statt der ersteren bei der Berechnung des Objectivs zu gebrauchen.

Mit Beibehaltung der am angeführten Orte gebrauchten Bezeichnungen erhalten wir hiernach aus (f) jener Nummer

$$\left.\begin{aligned}
V'^2 &= \frac{\Sigma(V)\,V^2}{\Sigma(V)}\\
\varphi_2 &= \frac{\Sigma(V)\,V^2\varphi^2}{\Sigma(V)\,V^2}\\
L' &= \frac{\Sigma(V)\,V^2\,L_{,}}{\Sigma(V)\,V^2}\\
M' &= \frac{\Sigma(V)\,V^2\varphi^2 M_{,}}{\Sigma(V)\,V^2\,\varphi^2}\\
S' &= \frac{\Sigma(V)\,V^2\,S_{,}}{\Sigma(V)\,V^2}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

wobei die den einzelnen Oculareinsätzen beigelegten Gewichte (V) noch bestimmt werden müssen.

117) Nachdem auf diese Weise diejenigen Grössen gefunden worden sind, welche sich auf die Oculare beziehen, können wir zur Berechnung des Objectives übergehen.

Versteht man unter L, M und S die von dem letzteren herrührenden Theile von L_i, M_i und S_i, so müssen in (h) von Nro. 115 die Grössen V^2, φ^2, L, M und S mit V'^2, φ_2, $(L+L')$, $(M+M')$ und $(S+S')$ verwechselt und ausserdem die von G, H, T, t und W abhängigen Glieder weggelassen werden, da sie bereits bei der Berechnung der Oculare zu einem Minimum gemacht worden sind und auf die Bestimmung der Dimensionen des Objectivs keinen Einfluss haben. Hierdurch werden die auf das Objectiv sich beziehenden Glieder:

$$\varPi = \left(\frac{V' V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^6}{36}\left[L+L'+\frac{6}{5}\,Q R^2+(L)\Delta'\right]^2+\frac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} \\ +\frac{R^4 \varphi_2}{12}\left[M_, + M' + (M)\Delta'\right]^2 \\ +\frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S+S'+\frac{2}{3}\,U R^2\right]^2 \\ +\frac{Q^2 R^{10}}{600}+\frac{\theta s^2 R^2}{2}+\frac{\varepsilon U^2 R^6}{36} \end{array} \right\} \quad \text{(a)}$$

Die von L, M und S abhängenden Glieder sind die einzigen, welche ursprünglich zur zweiten Ordnung gehören und durch einerlei Werthe der willkührlichen Grössen zugleich verschwinden können; wir erhalten daher vermöge (d) von Nro. 114 für das Minimum von $\varPi$ die folgenden drei Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = L+L'+\frac{6}{5}\,Q R^2+(L)\Delta' \\ 0 = M+M'+(M)\Delta' \\ 0 = S+S'+\frac{2}{3}\,U R^2 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Die erste dieser Gleichungen bedingt die möglichst vollständige Aufhebung der Abweichung wegen der Gestalt in der Axe, die zweite die Aufhebung des bei den Ocularen noch nicht berücksichtigten Theiles der Abweichung wegen der Gestalt ausser der Axe, die dritte Gleichung endlich bezweckt die möglichst vollständige Aufhebung der Farbenzerstreuung in der Axe.

Die Grössen, welche darin vorkommen, sind Functionen von der Entfernung des Gegenstandes, den Entfernungen der zum Objective gehörigen brechenden Flächen, der letzten Vereinigungsweite desselben und den Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen, welche ich sämmtlich als gegeben betrachte, sodann von den übrigen Vereinigungsweiten und den Halbmessern der brechenden Flächen. Wären nun diese Halbmesser mit Ausnahme des letzten bekannt, so könnten daraus die Vereinigungsweiten durch die in (a) von Nro. 40 gegebenen Formeln berechnet werden, worauf der letzte Halbmesser

vermittelst der zweiten Formel (c) jener Nummer erhalten würde, wenn man sie auf die letzte Fläche des Objectivs anwendete, indem alsdann c_i durch die vorhergehende Rechnung bekannt, g_i aber die als gegeben betrachtete letzte Vereinigungsweite des Objectivs ist. Hieraus folgt, dass sich die in den Gleichungen (b) enthaltenen willkührlichen Grössen auf die Halbmesser der zum Objective gehörigen brechenden Flächen, mit Ausnahme des letzten, reduciren, die übrigen dagegen als Functionen von jenen zu betrachten sind. Diess hindert jedoch nicht, statt der Halbmesser zum Theil andere Grössen als willkührlich anzunehmen, wenn man die ersteren vermittelst der Relationen, welche zwischen ihnen stattfinden, aus den Gleichungen eliminirt.

Setzen wir nun ein zweifaches achromatisches Objectiv voraus, so enthält dasselbe nach dem Vorhergehenden drei willkührliche Grössen, wozu man gewöhnlich einen Halbmesser von jedem Glase und die Brennweite von einem derselben wählt, daher die drei Gleichungen (b) zu ihrer Bestimmung hinreichen.

Bei dieser Bestimmung der willkührlichen Grössen des Objectivs sind jedoch die übrigen Glieder in dem Ausdrucke von Π, welchen wir in (a) erhalten haben, nicht berücksichtigt worden; es entsteht daher die Frage, ob es nicht räthlich ist, in dieser Beziehung eine Modification an den vorhergehenden Resultaten eintreten zu lassen, wozu die folgenden Bemerkungen gemacht werden können.

Wir haben bei der früheren Entwickelung die von dem Objective herrührenden Grössen M und G als zur zweiten Ordnung, die correspondirenden auf die Oculare sich beziehenden Grössen M' und G' dagegen als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet. Der Grund hiervon lag darin, dass M und G im Allgemeinen Glieder enthalten, welche von K_1 abhängen und sehr bedeutende Werthe bekommen können. Im gegenwärtigen Falle verschwinden aber diese Glieder, weil $K_1 = 0$ ist, wovon eine Folge ist, dass bei denjenigen Werthen der willkührlichen Grössen, welche der ersten und dritten Gleichung (b) Genüge leisten, M von derselben Ordnung wie M', G dagegen sogar kleiner als G' wird. Sehen wir daher M in dem gegenwärtigen Falle, ebenso wie M', als zur dritten Ordnung gehörig an, so sind die einzigen Glieder der zweiten Ordnung, welche in (a) vorkommen, diejenigen, die von L und S abhängen.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir daher für das Minimum nur die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= L + L' + \frac{6}{5}\, Q R^2 + (L)\,\Delta' \\ 0 &= S + S' + \frac{2}{3}\, U R^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Da das Objectiv drei willkührliche Grössen enthält, so sind die vorhergehenden Gleichungen zur Bestimmung derselben nicht hinreichend.

Nimmt man aber eine der willkührlichen Grössen, z. B. den ersten Halbmesser nach Belieben an, so können die übrigen durch jene Gleichungen bestimmt werden, und man erhält dadurch ein Objectiv, welches schon den hauptsächlichsten Forderungen entspricht, indem durch dasselbe die bedeutendsten Theile von den Abweichungen wegen der Gestalt und Farbenzerstreuung in der Axe vernichtet werden. Es bleiben aber alsdann in dem Ausdrucke von π die folgenden nicht aufgehobenen Glieder übrig, deren Werthe vermittelst der gefundenen Dimensionen des Objectivs berechnet werden können, nämlich

$$\pi = \left(\frac{V'V_{,} z}{\nu \nu_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} + \frac{R^4 \varphi_2}{12} [M + M' + (M) \Delta']^2 \\ + \frac{Q^2 R^{10}}{600} + \frac{\theta s^2 R^2}{2} + \frac{{}_8 U^2 R^8}{36} \end{array} \right\} \cdot \cdot \quad (d)$$

Von diesen Gliedern beziehen sich

das erste auf die Aenderung, welche die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe durch die veränderliche Entfernung des Gegenstandes erleidet,

das zweite auf den noch nicht berücksichtigten Theil der Abweichung wegen der Gestalt ausserhalb der Axe, mit Rücksicht auf die veränderliche Entfernung des Gegenstandes,

das dritte auf den zur dritten Ordnung gehörigen Theil der Abweichung wegen der Gestalt in der Axe,

das vierte auf den ursprünglich mit $\delta \nu^2$ multiplicirten Theil der Farbenzerstreuung in der Axe,

das letzte endlich auf denjenigen Theil jener Farbenzerstreuung, welcher von dem darauf ausgeübten Einflusse der Abweichung wegen der Gestalt herrührt.

Obgleich das nach den vorhergehenden Formeln berechnete Objectiv schon den hauptsächlichsten Forderungen entspricht, so ist es doch keineswegs das beste, indem es von dem nach Belieben angenommenen Werthe der einen, bei seiner Construction unbestimmt gebliebenen Grösse abhängt. Geben wir aber dieser Grösse nach und nach verschiedene Werthe, berechnen sodann jedesmal die Dimensionen des Objectivs vermittelst der Gleichungen (c) und hierauf den Werth der nicht aufgehobenen Glieder von π vermittelst des Ausdruckes (d), so wird derselbe bei den verschiedenen Annahmen sehr verschieden ausfallen. Wenn nun keine weitere Rücksichten zu nehmen sind, so ist dasjenige Objectiv als das vorzüglichste zu betrachten, bei dem jener Werth so klein als möglich wird, und welches aus mehreren in der Nähe des Minimums berechneten Werthen vermittelst der Formeln von Nro. 112 leicht gefunden werden kann.

Die Rechnung zeigt, dass (L) und M durch Werthe der willkührlichen Grössen, welche nicht sehr von einander verschieden sind,

zum Verschwinden gebracht werden, dass ferner Q und U Minima haben, denen andere ebenfalls von den ersteren nicht sehr verschiedene Werthe jener Grössen entsprechen. Dagegen ist s bei einerlei Glasarten als constant zu betrachten. Da nun M' bei der vortheilhaftesten Einrichtung der Oculare nie eine bedeutende Grösse erlangt, so ist es möglich, durch eine schickliche Bestimmung der willkührlichen Grössen ein Objectiv zu erhalten, welches sehr nahe die Bedingungen erfüllt, dass die Abweichungen in und ausser der Axe Minima werden und dass das Objectiv für astronomische und terrestrische Gegenstände gleich brauchbar ist.

Berücksichtigt man bloss das erste Glied in (d), so erhält man dadurch für das Minimum die Gleichung

$$(L) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

welche in Verbindung mit den beiden Gleichungen (c) die Dimensionen des Objectivs bestimmt. Das hierdurch erhaltene Objectiv ist dasjenige, welches Herschel an den in Nro. 97 angegebenen Orten in Vorschlag gebracht hat und welches die Eigenschaft besitzt, dass eine Veränderung in der Entfernung des Gegenstandes beinahe keinen Einfluss auf die Abweichungen äussert, das Objectiv mithin eben so gut für terrestrische als für astronomische Gegenstände benutzt werden kann.

Das letzte Glied in (d) kann ausserdem, dass es das oben angegebene Minimum hat, auch $= 0$ werden. Behält man daher nur dieses Glied bei, so entsteht dadurch für das Minimum von $\varPi$ die Gleichung

$$U = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

welche zu den Gleichungen (c) gefügt werden muss, um die Dimensionen des Objectivs zu bestimmen. Hierdurch wird dasjenige Objectiv erhalten, welches Gauss vorgeschlagen hat[1]) und dessen Vorzug darin besteht, dass die Farbenzerstreuung in der Axe nicht nur bei denjenigen Strahlen, welche in der Nähe der letzteren einfallen, sondern auch bei den Randstrahlen gleich gut gehoben wird.

118) Es bleibt jetzt noch übrig, uns mit der Bestimmung der Werthe zu beschäftigen, welche den in den vorhergehenden Formeln enthaltenen Grössen (V), Δ und Δ' beizulegen sind.

Wir haben oben gesehen, dass eine gleiche relative Deutlichkeit die geringste Forderung ist, welche an die stärkeren Vergrösserungen in Vergleichung mit den schwächeren gemacht werden kann. Wir haben ferner in (h) und (i) von Nro. 103 entwickelt, welche Werthe die dem mittleren Oculareinsatze zugehörigen Grössen erhalten müssen, je nachdem man beabsichtigt, den verschiedenen Oculareinsätzen, so gut es im Mittel geschehen kann, bei gleichen Gewichten entweder

[1]) v. Lindenau und Bohnenberger, Zeitschrift für Astronomie. Band 4, pag. 345.

die grösstmögliche absolute oder die grösstmögliche relative Deutlichkeit zu geben. Nach den dortigen Formeln ist im ersten Falle:

$$\left.\begin{aligned} V'^2 &= \frac{\Sigma V^2}{m} \\ \varphi_2 &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^2}{\Sigma V^2} = \frac{\Sigma \Phi^2}{\Sigma V^2} \\ L' &= \frac{\Sigma V^2 L_{\prime}}{\Sigma V^2} \\ M' &= \frac{\Sigma V^2 \varphi^2 M_{\prime}}{\Sigma V^2 \varphi^2} = \frac{\Sigma \Phi^2 M_{\prime}}{\Sigma \Phi^2} \\ S' &= \frac{\Sigma V^2 S_{\prime}}{\Sigma V^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

im zweiten Falle dagegen

$$\left.\begin{aligned} V'^2 &= \frac{\nu^2 \nu_{\prime}^2 c_1^2}{V_{\prime}^2 z^2} \\ \varphi_2 &= \frac{\Sigma \varphi^2}{m} \\ L' &= \frac{\Sigma L_{\prime}}{m} \\ M' &= \frac{\Sigma \varphi^2 M_{\prime}}{\Sigma \varphi^2} \\ S' &= \frac{\Sigma S_{\prime}}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Es entsteht daher die Frage, ob die Annahme von den einen oder den anderen der vorhergehenden Werthe vorzuziehen oder andere an deren Stelle zu setzen sind.

Untersuchen wir zu dem Ende, wie gross die Undeutlichkeit bei den einzelnen Oculareinsätzen wird, wenn das Objectiv nach einem willkührlich gewählten mittleren Oculareinsatze berechnet worden ist.

Nach (a) von Nro. 117 sind die beiden bedeutendsten Glieder in dem Ausdrucke von π, wenn wir statt V', L' und S' die Werthe V, $L_{\prime}$ und $S_{\prime}$ substituiren, welche einem beliebigen Oculareinsatze zugehören:

$$\pi = \left(\frac{V V_{\prime} z}{\nu \nu_{\prime}}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + L_{\prime} + \frac{6}{5}\, Q R^2 + (L)\,\Delta'\right]^2 \\ & + \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + S_{\prime} + \frac{2}{3}\, U R^2\right]^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad (c)$$

Sind nun bei Berechnung des Objectivs die dem mittleren Oculareinsatze entsprechenden Grössen L' und S' zu Grund gelegt worden, so ist dadurch den Gleichungen (c) von Nro. 117 Genüge geschehen.

Substituirt man daher die aus diesen Gleichungen resultirenden Werthe von L und S in dem vorhergehenden Ausdruck von Π, so verwandelt er sich in den folgenden:

$$\Pi = \left(\frac{V V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{R^6}{36} (L_, - L')^2 \\ + \frac{\varepsilon R^2}{2} (S_, - S')^2 \end{array} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (d)$$

worin der gemeinschaftliche Factor $\left(\frac{V V_, z}{\nu \nu_,}\right)^2$ in c_1^2 umgeändert werden muss, wenn er sich auf die relative Undeutlichkeit beziehen soll.

Die Grössen $L_,$ und $S_,$ sind bei allen Oculareinsätzen verschieden; sie nehmen, wie wir in der Folge sehen werden, im Allgemeinen mit der Vergrösserung ab und sind bei einerlei Einrichtung der Oculare beinahe $\frac{1}{V}$ proportional; dagegen sind L' und S' bei allen Ocularеinsätzen unveränderlich. Hieraus folgt, dass sowohl die absolute, als die relative Undeutlichkeit bei demjenigen Ocularеinsatze am kleinsten ist, welcher sich dem bei Berechnung des Objectivs angenommenen mittleren am meisten nähert, dass aber beide Undeutlichkeiten desto mehr zunehmen, je mehr sich die Ocularеinsätze von dem mittleren entfernen, die Vergrösserung mag stärker oder schwächer werden wie bei diesem.

Bedienen wir uns jetzt zur Berechnung des mittleren Ocularеinsatzes der Formeln (a), so werden dadurch die stärkeren Vergrösserungen bedeutend mehr berücksichtigt, als die schwächeren; der mittlere Ocularеinsatz fällt daher nahe bei diejenigen, welche die stärkeren Vergrösserungen geben, so dass die oben erwähnte Forderung, wonach die relative Undeutlichkeit bei den stärkeren Vergrösserungen wenigstens nicht zunehmen soll, nur durch die stärksten Vergrösserungen, jedoch in geringem Maasse, nicht erfüllt wird. Ferner gleichen sich die Fehler bei den verschiedenen Ocularеinsätzen so aus, dass sie bei keinem derselben bedeutend werden.

Durch den Gebrauch der Formeln (b), welche die schwächeren Vergrösserungen mehr berücksichtigen, wird jener Forderung in Bezug auf die stärkeren Vergrösserungen noch weit weniger entsprochen und ausserdem auf diese ein sehr beträchtlicher Fehler hinsichtlich der absoluten Undeutlichkeit geworfen, da der Ausdruck der letzteren den bei starken Vergrösserungen sehr bedeutenden Factor V^2 enthält.

Wollte man der angegebenen Forderung bei den stärksten Vergrösserungen vollständig Genüge leisten, so würde nichts Anderes übrig bleiben, als entweder die Gewichte mit den Vergrösserungen zunehmen zu lassen, oder nur die beiden stärksten unter ihnen zu berücksichtigen und für diese nach den Formeln (b) die dem mittleren

Ocularcinsatze entsprechenden Grössen zu berechnen. Im ersteren Falle könnten die Gewichte so bestimmt werden, dass sich die relative Undeutlichkeit bei zunehmender Vergrösserung stets verminderte, im letzteren Falle würde diess nur bis zu den zwei stärksten Vergrösserungen stattfinden, für welche jene Undeutlichkeit einerlei Werth erhielte. Die schwächeren Vergrösserungen würden aber alsdann verhältnissmässig schlechter werden.

Nach allem diesem wird es daher räthlich seyn, sich bei der Annahme eines mittleren Oculareinsatzes wenigstens nicht weit von den Resultaten der Formeln (a) zu entfernen. Welche Wahl man indessen auch treffen mag, so ist es jedenfalls angemessen, sowohl die absolute, als die relative Undeutlichkeit in Bezug auf die verschiedenen Oculareinsätze zu berechnen, um sich zu versichern, dass bei keinem derselben unzulässige Fehler entstehen.

119) Um das Gesagte an einem Beispiele zu erläutern, nehme ich an, dass ein Instrument mehrere auf dieselbe Weise construirte Oculareinsätze hat, deren Vergrösserungen Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Bezeichnet man daher durch

$\mathfrak{V}$ die erste Vergrösserung,

e den Exponenten der geometrischen Reihe,

so ist die n^{te} Vergrösserung

$$V = \mathfrak{V}\, e^{n-1} \quad \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Da die sämmtlichen Obularcinsätze der Voraussetzung nach einerlei Einrichtung haben, so kann für $L_,$ der Ausdruck angenommen werden:

$$L_, = \frac{\mathfrak{L}}{V} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{V}\, e^{n-1}} \quad \ldots \ldots \quad \text{(b)}$$

wobei $\mathfrak{L}$ eine Constante ist, welche bei allen Oculareinsätzen denselben Werth behält.

Auf ähnliche Weise lässt sich auch $S_,$ ausdrücken. Da jedoch die von $L_,$ und $S_,$ abhängigen Glieder einerlei Gestalt haben, so reicht es für den gegenwärtigen Zweck hin, nur das erste von ihnen zu betrachten. Unterscheidet man ferner π in Bezug auf die relative Undeutlichkeit durch die Beisetzung eines Accentes und behält für die absolute Undeutlichkeit jenen Buchstaben ohne Accent bei, so ist mit Weglassung aller beständigen Factoren

$$\pi = V^2 (L_, - L')^2 = V^2 L_,^2 \left(1 - \frac{L'}{L_,}\right)^2$$

$$= \mathfrak{L}^2 \left[1 - \frac{\mathfrak{V}\, L'}{\mathfrak{L}}\, e^{n-1}\right]^2$$

$$\pi' = \frac{\pi}{V^2} = \frac{\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{V}^2\, e^{2(n-1)}} \left[1 - \frac{\mathfrak{V}\, L'}{\mathfrak{L}}\, e^{n-1}\right]^2$$

wobei die beständigen Factoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{V}$ ebenfalls weggelassen werden können, so dass

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \left[1 - \frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}} e^{n-1}\right]^2 \\ \Pi' &= \frac{1}{e^{2(n-1)}}\left[1 - \frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}} e^{n-1}\right]^2 = \frac{\Pi}{e^{2(n-1)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(c)}$$

werden.

Bestimmen wir jetzt zuerst L' so, dass die absolute Undeutlichkeit für sämmtliche Ocularеinsätze zusammengenommen so klein als möglich wird, wenn wir ihnen gleiche Gewichte beilegen, so ist vermöge (a) der vorhergehenden Nummer

$$L' = \frac{\Sigma V^2 L_{\prime}}{\Sigma V^2} = \frac{\mathfrak{L}\,\Sigma V}{\Sigma V^2}$$

Aber

$$\Sigma V = \mathfrak{V}\,\Sigma_1^m e^{n-1} = \frac{\mathfrak{V}(e^m - 1)}{e - 1}$$

$$\Sigma V^2 = \mathfrak{V}^2\,\Sigma_1^m e^{2(n-1)} = \frac{\mathfrak{V}^2 (e^{2m} - 1)}{e^2 - 1}$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}} = \frac{(e^m - 1)(e^2 - 1)}{(e - 1)(e^{2m} - 1)} = \frac{e + 1}{e^m + 1} \quad \ldots \ldots \text{(d)}$$

Legen wir dagegen der Bestimmung von L' eine möglichst kleine mittlere relative Undeutlichkeit bei gleichen Gewichten der Ocularеinsätze zu Grund, so ist vermöge (b) jener Nummer

$$L' = \frac{\Sigma L_{\prime}}{m} = \frac{\mathfrak{L}}{m} \sum \frac{1}{V}$$

und

$$\sum \frac{1}{V} = \frac{1}{\mathfrak{V}} \sum_1^m \frac{1}{e^{n-1}} = \frac{(e^m - 1)}{\mathfrak{V}(e - 1)e^{m-1}}$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}} = \frac{e^m - 1}{m(e - 1)e^{m-1}} \quad \ldots \ldots \text{(e)}$$

Setzen wir endlich bei den zwei stärksten Vergrösserungen eine gleiche relative Undeutlichkeit voraus, so ist

$$L' = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{V} e^{m-2}} + \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{V} e^{m-1}}\right] = \frac{\mathfrak{L}(e + 1)}{2\mathfrak{V} e^{m-1}}$$

folglich

$$\frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}} = \frac{e + 1}{2e^{m-1}} \quad \ldots \ldots \text{(f)}$$

Durch die Substitution der vorhergehenden Werthe von $\frac{\mathfrak{V} L'}{\mathfrak{L}}$ geben die Formeln (c) sowohl die absolute, als die relative Undeutlichkeit, welche jeder der drei gemachten Voraussetzungen entsprechen, für die verschiedenen Ocularеinsätze, wobei n der Reihe nach $= 1, 2, 3$, etc. gesetzt werden muss.

Sind z. B. 5 Oculareinsätze vorhanden, deren Vergrösserungen bei jedem folgenden um $1\frac{1}{2}$ mal zunehmen, so ist

$$m = 5$$
$$e = \frac{3}{2}$$

und die vorhergehenden Formeln geben die in der folgenden Tafel zusammengestellten Resultate

Nummer des Oculareinsatzes.	Verhältnissmässige Vergrösserung.	Kleinste absolute Undeutlichkeit im Mittel.		Kleinste relative Undeutlichkeit im Mittel.		Gleiche relative Undeutlichkeit bei den 2 stärksten Vergrösserungen.	
	$\frac{V}{\mathfrak{V}}$	Π	Π'	Π	Π'	Π	Π'
1	1	0.503	0.503	0.229	0.229	0.567	0.567
2	$\frac{3}{2}$	0.318	0.141	0.048	0.021	0.397	0.176
3	$\frac{9}{4}$	0.120	0.024	0.030	0.006	0.197	0.039
4	$\frac{27}{8}$	0.000	0.000	0.575	0.051	0.028	0.002
5	$\frac{81}{16}$	0.224	0.009	2.683	0.105	0.062	0.002
	$\frac{\mathfrak{V}L'}{\mathfrak{L}} =$	$\frac{16}{55}$		$\frac{211}{405}$		$\frac{20}{81}$	

Es ist hieraus ersichtlich, dass bei der ersten Voraussetzung der mittlere Oculareinsatz sehr nahe mit dem vierten zusammenfällt und dass daher nur der fünfte etwas schlechter wird als jener, dagegen bei den übrigen die Deutlichkeit mit der Vergrösserung zunimmt.

Bei der zweiten Voraussetzung liegt der mittlere Oculareinsatz zwischen dem zweiten und dritten, es wird aber dabei ein so bedeutender absoluter Fehler auf die stärkste Vergrösserung geworfen, dass diese Annahme unzulässig erscheint.

Bei der dritten Voraussetzung werden die Fehler der schwächeren Vergrösserungen etwas grösser, die der stärkeren Vergrösserungen etwas kleiner, als bei der ersten Voraussetzung, und ausserdem nimmt die relative Undeutlichkeit bei keiner Vergrösserung im Vergleich mit der vorhergehenden zu, so wie es beabsichtigt wurde.

120) Was die Werthe betrifft, welche den Grössen Δ und Δ' gegeben werden müssen, so haben wir dieselben bereits in Nro. 97 ausführlich entwickelt; in dem gegenwärtigen Falle können wir jedoch noch die folgenden Bemerkungen machen.

Gewöhnlich werden die Fernröhre ursprünglich für unendlich entfernte Gegenstände berechnet. Soll nun das Fernrohr sowohl für diese als für nähere Objecte gebraucht werden, so ist $\frac{1}{c_1} = \Delta\frac{1''}{c_1} = 0$; $\Delta\frac{1'}{c_1}$ dagegen bezeichnet das Reciproke der kleinsten Entfernung, bei welcher das Instrument noch dienen soll. Nimmt man daher statt Δ' und Δ^2 die Werthe, welche aus jener Voraussetzung folgen und in (i) und (n) der allegirten Nummer für zwei Hypothesen in Bezug auf die den Entfernungen beizulegenden Gewichte entwickelt sind, bei anderen Hypothesen aber nach den dortigen allgemeinen Formeln (a) berechnet werden müssen, so geben die vorhergehenden Formeln diejenigen Dimensionen des Objectivs, welche den verschiedenen Entfernungen im Mittel so gut wie möglich entsprechen.

Soll dagegen das Fernrohr hauptsächlich bei astronomischen Gegenständen angewandt werden, so ist es räthlich, dasselbe für diese allein zu berechnen, da sie die grösste Deutlichkeit erfordern, und nebenbei darauf Rücksicht zu nehmen, dass die von Δ und Δ' abhängigen Glieder keine bedeutende Werthe erhalten.

Hiernach müssen wir zuerst in (c) von Nro. 117, $\Delta' = 0$ setzen, sodann die daraus resultirenden Werthe in (a) jener Nummer substituiren, wodurch sich diese Formeln in die folgenden verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= L + L' + \frac{6}{5} Q R^2 \\ 0 &= S + S' + \frac{2}{3} U R^2 \\ n &= \left(\frac{V'V_, z}{v v_,}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{(L)^2 R^6}{36} (\Delta^2 + \Delta'^2) \\ &+ \frac{R^4 \varphi_2}{12} [M + M' + (M)\Delta']^2 \\ &+ \frac{Q^2 R^{10}}{600} + \frac{\theta s^2 R^2}{2} + \frac{\varepsilon U^2 R^6}{36} \end{aligned} \right. \end{aligned}\right\} \quad . \text{ (a)}$$

Setzt man in dem letzten Ausdrucke ebenfalls $\Delta = \Delta' = 0$, so entstehen daraus die Formeln zur Berechnung der Objective von astronomischen Fernröhren ohne Rücksicht darauf, ob sie zugleich zu terrestrischen Gegenständen gebraucht werden sollen. Nach dem oben Gesagten können jedoch die hierdurch gefundenen Dimensionen des Objectivs so modificirt werden, dass auch die von Δ und Δ' abhängigen Glieder in dem Ausdrucke von Δ ohne bedeutende Vergrösserung der übrigen keine beträchtliche Werthe erhalten.

Unter derselben Voraussetzung verwandelt sich die Gleichung (a) von Nro. 116, welche zur Vernichtung des farbigen Randes dient, in die folgende:

$$0 = T + \eta t + \frac{2}{3} W \varphi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \text{ (b)}$$

121) Wir können die Formeln (c) von Nro. 117 und (a) von Nro. 120, welche wir zur Berechnung des Objectivs erhalten haben, mit der in (c) von Nro. 71 gefundenen vergleichen, wodurch die Längenabweichung in der Axe ausgedrückt wird. Verwechseln wir in der letzteren R mit R', um den veränderlichen Werth dieser Grösse von ihrem äussersten Werthe zu unterscheiden, der in den gegenwärtigen Formeln unter R verstanden wird, nehmen wir ferner einen Strahl von mittlerer Brechbarkeit, für welchen $\delta\nu = 0$ ist, so giebt die allegirte Formel

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left[LR'^2 + QR'^4\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Hierin bezeichnen g und $\mathfrak{g}$ die Vereinigungsweiten zweier Strahlen, von denen der eine unendlich nahe bei der Axe, der andere hingegen in der Entfernung R' von derselben einfällt. Sollen daher beide Vereinigungsweiten einander gleich seyn, so giebt diess die Gleichung

$$0 = L + QR'^2$$

Nach der gegenwärtigen Bezeichnung muss aber das in der allegirten Nummer gebrauchte L mit $L + L' + (L)\,\Delta\frac{1}{c_1}$ verwechselt werden. Die vorhergehende Gleichung wird mithin

$$0 = L + L' + QR'^2 + (L)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Setzt man hierin ferner

$$R' = R\sqrt{\frac{6}{5}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

so verwandelt sie sich in die folgende:

$$0 = L + L' + \frac{6}{5}QR^2 + (L)\,\Delta\frac{1}{c_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

welche mit den ersten der Gleichungen (c) von Nro. 117 und (a) von Nro. 120 übereinstimmt, je nachdem darin

$$\Delta\frac{1}{c_1} = \Delta' \text{ oder } \Delta\frac{1}{c_1} = 0$$

gesetzt wird, um die Formel derjenigen Entfernung anzupassen, welche bei der Berechnung zu Grund gelegt werden soll. Diese Gleichungen drücken daher aus, dass zur möglichst vollkommenen Aufhebung der Abweichung wegen der Gestalt in der Axe die Vereinigungsweiten zweier Strahlen von mittlerer Brechbarkeit einander gleich seyn müssen, von denen der eine unendlich nahe bei der Axe, der andere in der Entfernung $R\sqrt{\frac{6}{5}}$ von derselben einfällt, wegen der geringeren Oeffnung der Blendung aber nicht durch das Instrument geht.

Das vorhergehende Resultat, welches ich nebst mehreren anderen und den dabei zu Grund gelegten Principien bereits im 14ten Bande von Poggendorfs Annalen der Physik, pag. 29 bekannt gemacht habe, hat inzwischen durch dasjenige eine vollkommene Bestätigung erhalten, welches Gauss durch Anwendung derselben Principien fand und welches im 6ten Bande der neuen Bearbeitung von Gehlers physicalischem Wörterbuche, 1te Abtheilung pag. 437 nach einer brieflichen Mittheilung bekannt gemacht wurde.

Betrachten wir ferner zwei Strahlen, welche beide in der Entfernung R' von der Axe einfallen und denen die Brechungsverhältnisse ν und $(\nu + \delta\nu)$ zugehören, so ist für den ersten derselben

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\,[LR'^2 + QR'^4]$$

für den zweiten dagegen

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l} LR'^2 + QR'^4 \\ + S\,\delta\nu + s\,\delta\nu^2 + UR'^2\,\delta\nu \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (d)$$

Sollen beide Vereinigungsweiten mit einander übereinstimmen, so giebt diess die Gleichung

$$0 = S + s\,\delta\nu + UR'^2$$

Setzt man hierin

$$\left.\begin{array}{l} \delta\nu = \eta \\ R' = R\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

so wird dieselbe:

$$0 = S + \eta s + \frac{2}{3}\,UR^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Erinnern wir uns ferner, dass gegenwärtig $S + \eta s$ durch $(S + S')$ bezeichnet wird, so fällt die vorhergehende Gleichung mit der zweiten Gleichung (c) von Nro. 117 zusammen. Diese hat daher die Bedeutung, dass die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich gehoben wird, wenn die Vereinigungsweiten zweier Strahlen einander gleich sind, denen die Brechungsverhältnisse ν und $(\nu + \eta)$ zugehören und welche beide in der Entfernung $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ von der Axe einfallen.

Wir werden in der Folge sehen, dass η in Vergleichung mit ν sehr klein ist; die beiden, so eben betrachteten Strahlen sind daher nur äusserst wenig von einander unterschieden. Bei den Anwendungen ist es jedoch von Interesse, statt jener Strahlen zwei andere wählen zu können, welche in Ansehung ihrer Brechungsverhältnisse mehr von einander differiren, wozu man auf folgende Weise gelangt.

Die Formel (d) giebt, wenn darin

$$\left.\begin{array}{l} \delta\nu = \frac{\eta}{2} + \delta\nu' \\ R' = R\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

gesetzt werden,

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{J}\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3} L R^2 + \frac{4}{9} Q R^4 \\ + \frac{{}_\eta S}{2} + {}_s\left(\frac{\eta^2}{4} + \delta\nu'^2\right) + \frac{{}_\eta U R^2}{3} \\ + \delta\nu' \left[S + {}_\eta s + \frac{2}{3} U R^2\right] \end{array}\right.$$

Für einen zweiten Strahl, bei welchem sich $\delta\nu'$ in $-\delta\nu'$ verwandelt, ändert sich in der vorhergehenden Formel nur das Zeichen des letzten von $\delta\nu'$ abhängigen Gliedes ab. Bezeichnet man daher $\frac{1}{\mathfrak{g}}$ in Bezug auf den letzteren Strahl mit $\frac{1}{\mathfrak{g}_\prime}$, so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} - \frac{1}{\mathfrak{g}_\prime} = \frac{2\,\delta\nu'}{J}\left[S + {}_\eta s + \frac{2}{3} U R^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{h})$$

Sollen nun $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_\prime$ einander gleich seyn, so entsteht dadurch, wie in dem vorhergehenden Falle, die Gleichung ($\mathfrak{f}$) oder die ihr entsprechende zweite Gleichung (c) von Nro. 117.

Diese drückt daher auch aus, dass zur vollkommensten Vernichtung der Farbenzerstreuung in der Axe die Vereinigungsweiten zweier Strahlen einander gleich seyn müssen, denen die Brechungsverhältnisse $\left(\nu + \frac{\eta}{2} + \delta\nu'\right)$ und $\left(\nu + \frac{\eta}{2} - \delta\nu'\right)$ zugehören und welche beide in der Entfernung $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ von der Axe einfallen.

$\delta\nu'$ bleibt hierbei der Willkühr überlassen, mit der einzigen Restriction, dass dafür keine grössere Werthe genommen werden, als in der Natur wirklich stattfinden können, weil sonst die angewandten Reihen nicht convergirend seyn würden. Uebrigens ist der zuerst betrachtete Fall in dem letzten begriffen, und entsteht daraus, wenn $\delta\nu' = \frac{\eta}{2}$ gesetzt wird.

Eine ähnliche Vergleichung lässt sich bei der Gleichung (a) von Nro. 116 anstellen, welche erfüllt werden muss, wenn der farbige Rand so vollkommen als möglich gehoben werden soll.

Betrachten wir zu dem Ende denjenigen allgemeinen farbigen Strahl, welcher einem beliebigen Punkte des Gegenstandes zugehört und, ebenso wie der correspondirende Hauptstrahl, durch die Mitte der Hauptblendung geht, von diesem aber sich dadurch unterscheidet, dass der Hauptstrahl das mittlere Brechungsverhältniss ν, der allgemeine farbige Strahl dagegen das seiner Farbe entsprechende Brechungsverhältniss $(\nu + \delta\nu)$ hat. Um die Abweichung des letzteren Strahles zu finden, müssen wir in der ersten Formel (d) von Nro. 68

$$R = 0$$

setzen und T mit $T - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}$ verwechseln, um in jener Formel die gegenwärtige, in (b) von Nro. 97 eingeführte Bezeichnung anzuwenden.

Bezeichnen wir ferner für den, jenem Strahle zugehörigen Punkt des Gegenstandes φ mit φ', um diesen Werth von demjenigen zu unterscheiden, welcher sich auf die Grenze des Gesichtsfeldes bezieht und in den gegenwärtigen Formeln unter φ verstanden wird, so müssen wir in der allegirten Formel φ mit φ' verwechseln. Hiernach giebt dieselbe

$$\acute{y} = \frac{Vz\varphi'\delta\nu}{\nu}\left[T + t\delta\nu + W\varphi'^2 - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

wodurch der von dem erwähnten Strahle hervorgebrachte farbige Rand ausgedrückt wird.

Setzt man nun in dieser Formel

$$\left.\begin{aligned} \delta\nu &= \eta \\ \varphi' &= \varphi\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

so verwandelt sie sich in die folgende:

$$\acute{y} = \frac{Vz\eta\varphi}{\nu}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[T + \eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \quad . \quad (l)$$

Soll daher der farbige Rand in Bezug auf den durch die letzteren Werthe bestimmten Strahl wegfallen, so muss $\acute{y}$ bei demselben verschwinden, mithin die Gleichung

$$0 = T + \eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m)$$

stattfinden. Sie stimmt mit den Gleichungen (a) von Nro. 116 und (b) von Nro. 120 vollkommen überein, je nachdem darin

$$\Delta\frac{1}{c_1} = \Delta'$$

oder

$$\Delta\frac{1}{c_1} = 0$$

gesetzt wird.

Wir können hieraus den Schluss machen, dass es zur möglichst vollkommenen Aufhebung des farbigen Randes erforderlich ist, denselben für denjenigen Strahl zu vernichten, welcher dem durch die Coordinaten

$$\left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1}{c_1}\right) \text{ und } \varphi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

bestimmten Punkte des Gegenstandes zugehört, durch die Mitte der Hauptblendung geht und das Brechungsverhältniss $(\nu + \eta)$ hat.

Die zur Aufhebung des farbigen Randes erhaltene Gleichung hat indessen noch eine andere Bedeutung, die sich leicht auffinden lässt, wenn man den Winkel bestimmt, welchen der oben betrachtete allgemeine farbige Strahl mit der Axe des Instrumentes macht. Wir haben bereits in (l) von Nro. 78 die Tangente dieses, mit $\acute{\omega}$ be-

zeichneten Winkels für den Hauptstrahl gefunden. Da sich nun der erwähnte Strahl von dem letzteren nur dadurch unterscheidet, dass sich das mittlere Brechungsverhältniss ν bei ihm in $(\nu + \delta\nu)$ verwandelt, so erleidet hierdurch $tg\,\overset{''}{\omega}$ eine Aenderung, welche ich mit $\delta\,tg\,\overset{''}{\omega}$ bezeichne. Die Gleichung jenes Strahles wird aber aus der Gleichung des Hauptstrahles erhalten, wenn man der Ordinate desselben noch die von R unabhängigen Glieder in dem Ausdrucke von y' zusetzt, und da der Coefficient von z in dieser Gleichung die Tangente des Winkels ausdrückt, welchen der Strahl mit der Axe des Instrumentes macht, so erhalten wir aus (d) von Nro 68 nach vorheriger Verwechselung von φ mit φ' und von T mit $\left(T - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right)$:

$$tg\overset{''}{\omega} + \delta tg\overset{''}{\omega} = tg\overset{''}{\omega} + \frac{V}{\nu}\varphi'\left[T\delta\nu + t\delta\nu^2 + W\varphi'^2\delta\nu - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\delta\nu\right]$$

Nach der in Nro. 76 gemachten Bemerkung müssten strenge genommen dieser Gleichung noch die mit $\frac{1}{g_{\text{i}}}$ multiplicirten Glieder der zweiten Ordnung, welche man auf die angegebene Weise aus der ersten Gleichung (k) von Nro. 68 erhält, zugesetzt werden, nämlich

$$-\frac{1}{V_{\text{i}}\,g_{\text{i}}}\left[(T)_{\text{i}} + (KT - (T))_{\text{i}}\right]\varphi'\,\delta\nu$$

Da jedoch g_{i} stets sehr gross ist und bei der Berechnung der Instrumente sogar gewöhnlich unendlich angenommen wird, so können jene Glieder vernachlässigt werden; mithin giebt die vorhergehende Gleichung

$$\delta tg\overset{''}{\omega} = \frac{V\varphi'}{\nu}\left[T\delta\nu + t\delta\nu^2 + W\varphi'^2\delta\nu - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\,\delta\nu\right]. \quad \text{(n)}$$

Verfahren wir nun auf ähnliche Weise, wie bei der Farbenzerstreuung in der Axe, so müssen wir in dieser Formel zuerst

$$\left.\begin{aligned} \delta\nu &= \frac{\eta}{2} + \delta\nu' \\ \varphi' &= \varphi\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(o)}$$

setzen. Hierdurch wird

$$\delta tg\overset{''}{\omega} = \frac{V\varphi}{\nu}\sqrt{\frac{2}{3}}\left\{\begin{aligned} &\frac{\eta T}{2} + t\left(\frac{\eta^2}{4} + \delta\nu'^2\right) + \frac{\eta W\varphi^2}{3} - \frac{\eta(u)}{2}\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ &+ \delta\nu'\left[T + \eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right] \end{aligned}\right.$$

Für einen zweiten Strahl, bei welchem sich $\delta\nu'$ in $-\delta\nu'$ verwandelt und $\delta tg\overset{''}{\omega}$ mit $\delta tg\overset{''}{\omega},$ bezeichnet wird, ändert sich sodann auch hier nur das Zeichen des letzten, von $\delta\nu'$ abhängigen Gliedes, wonach

$$\delta tg\overset{''}{\omega} - \delta tg\overset{''}{\omega}, = \frac{2V\varphi}{\nu}\,\delta\nu'\sqrt{\frac{2}{3}}\left[T + \eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]. \text{(p)}$$

wird.

Sollen daher beide Strahlen einerlei Winkel mit der Axe machen, so muss

$$\delta tg\omega'' = \delta tg\omega''_{\prime}$$

seyn. Hierdurch entsteht ebenfalls die mit (a) von Nro. 116 und (b) von Nro. 120 übereinstimmende Gleichung (m).

Die letztere drückt daher auch aus, dass zwei Strahlen, welche beide dem durch die Coordinaten

$$\left(\frac{1}{c_1} + \Delta\frac{1}{c_1}\right) \text{ und } \varphi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

bestimmten Punkte des Gegenstandes zugehören und durch die Mitte der Blendung gehen, sich aber durch ihre Brechungsverhältnisse

$$\left(\nu + \frac{\eta}{2} + \delta\nu'\right) \text{ und } \left(\nu + \frac{\eta}{2} - \delta\nu'\right)$$

unterscheiden, mit der Axe des Instrumentes einerlei Winkel machen müssen, wenn der farbige Rand so gut wie möglich gehoben werden soll.

Als specieller Fall ist auch hier derjenige darunter begriffen, in welchem $\delta\nu' = \frac{\eta}{2}$, die Brechungsverhältnisse der beiden Strahlen mithin ν und $(\nu + \eta)$ werden.

Endlich können wir die Grösse G, welche bei der Construction der Oculare vorzüglich in Betracht kommt, auf eine andere Weise ausdrücken.

Zu diesem Ende nehme ich die beiden Strahlen, deren Gleichungen in (f) und (g) von Nro. 71 bestimmt wurden, und bei denen $\frac{1}{c_1}$, φ und R einerlei sind, Ψ aber einmal $= 0$ und dann $= \pi$ ist.

Nennen wir

ω den Winkel, welchen der letztere Strahl mit der Axe des Instrumentes macht, nehmen wir ferner an, dass sich für den ersteren Strahl $tg\omega$ in $tg\omega + \Delta tg\omega$ verwandelt, so ist nach den dortigen Bezeichnungen, weil der Coefficient von z in der Gleichung eines jeden Strahles die Tangente des Winkels ausdrückt, welchen derselbe mit der Axe macht,

$$tg\omega + \Delta tg\omega = \frac{V}{\nu}\left[A + B + C + D + \frac{JR}{g}\right]$$

$$tg\omega = \frac{V}{\nu}\left[A - B + C - D - \frac{JR}{g}\right]$$

folglich

$$\Delta tg\omega = \frac{2V}{\nu}\left[B + D + \frac{JR}{g}\right]$$

B und D sind aber die Coefficienten von $cos\,\Psi$ und $cos^3\Psi$ in dem inclavirten Factor des in (d) von Nro. 68 gegebenen Ausdruckes von y', mit Weglassung des von $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ abhängigen Gliedes. Setzen

wir ausserdem voraus, dass beide Strahlen von mittlerer Brechbarkeit sind, und bemerken, dass in dem gegenwärtigen Falle $K = 0$ gesetzt werden kann, wenn es in Gliedern der dritten Ordnung vorkommt, so erhalten wir durch Substitution der allegirten Werthe von B und D

$$\Delta\, tg\,\omega = \frac{2V}{v}\left[LR^3 + OR\varphi^2 + QR^5 + \frac{JR}{g}\right] \quad . \quad . \quad (q)$$

Für den in der Axe befindlichen Punkt des Gegenstandes ist

$$\varphi = 0$$

Bezeichnet man daher durch $\Delta\, tg\,\omega_{,}$ den jenem Punkte entsprechenden Werth von $\Delta\, tg\,\omega$, so wird

$$\Delta\, tg\,\omega_{,} = \frac{2V}{v}\left[LR^3 + QR^5 + \frac{JR}{g}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (r)$$

mithin

$$\frac{\Delta\, tg\,\omega - \Delta\, tg\,\omega_{,}}{2} = \frac{VOR\varphi^2}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (s)$$

Nach den in Nro. 37 und (e) von Nro 93 gegebenen Werthen ist aber

$$G^{(m)} = \frac{O^{(m)} + H^{(m)}}{3}$$

folglich, da gegenwärtig G_{i} und O_{i} unter G und O verstanden werden,

$$G = \frac{O + H}{3}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{VR\varphi^2}{v}$, so wird vermöge des vorhergehenden Werthes von $\frac{\Delta\, tg\,\omega - \Delta\, tg\,\omega_{,}}{2}$

$$\frac{VGR\varphi^2}{v} = \frac{\Delta\, tg\,\omega - \Delta\, tg\,\omega_{,}}{6} + \frac{VHR\varphi^2}{3v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t)$$

Da nun H bei denjenigen Einrichtungen des Instrumentes, welche denselben Zweck erfüllen, sehr nahe als constant zu betrachten ist, so folgt aus der vorhergehenden Formel, dass es hinreicht, $(\Delta\, tg\,\omega - \Delta\, tg\,\omega_{,})$ zu einem Minimum zu machen, um dasselbe in Bezug auf G zu erhalten.

Die vorhergehenden Formeln können dazu benutzt werden, um die durch die oben gebrauchten Näherungsformeln erhaltenen Resultate vermittelst trigonometrischer Rechnung zu prüfen und genauer zu machen, wozu wir die Formeln später entwickeln werden.

Instrumente mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven, bei welchen die Hauptblendung an den Ocularen angebracht ist.

122) Nachdem wir uns in den vorhergehenden Nummern mit denjenigen Instrumenten beschäftigt haben, bei welchen K sehr klein ist, wollen wir noch den Fall betrachten, wo diese Grösse bei den mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven versehenen Instrumenten einen sehr bedeutenden Werth erhält.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Hauptblendung an den Ocularen angebracht ist oder durch die Pupille des hinter dem Instrumente befindlichen Auges gebildet wird.

Werden alsdann die Entfernungen der zum Objective gehörigen Flächen in den Gliedern der dritten Ordnung vernachlässigt, so ist für jene Flächen

$$\left.\begin{aligned} K^{(m)} &= 0 \\ K_m &= K_1 \\ V_m &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Ausserdem sind wegen des grossen Werthes von K_1 diejenigen Glieder jeder Ordnung die bedeutendsten, welche dem Objective zugehören und die höchste Potenz von K_1 enthalten.

Versteht man daher unter L und S die von dem Objective herrührenden Theile von L_i und S_i, so sind nach der in Nro. 37 enthaltenen Zusammenstellung und nach den in (e) von Nro. 93 gegebenen Werthen, die beträchtlichsten Theile von M, G, und T die folgenden:

$$\begin{aligned} M &= 2KL \\ G &= K^2 L \\ T &= KS \end{aligned}$$

Dagegen ist H von K unabhängig. Da nun nach der früheren Bezeichnung die Coefficienten L, M, G, S und T die sämmtlichen, dem Objective und den Ocularen zugehörigen Glieder in sich begriffen, so können wir, um die bedeutendsten Theile derselben abzusondern, gegenwärtig

$$\left.\begin{aligned} &L \text{ mit } L + L' \\ &\frac{M}{2K} \text{ mit } L + M' \\ &\frac{G}{K^2} \text{ mit } L + G' \\ &S \text{ mit } S + S' \\ &\frac{T}{K} \text{ mit } S + T' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

verwechseln, wobei die accentuirten Buchstaben die minder beträchtlichen Glieder bezeichnen, welche theils von dem Objective, theils von den Ocularen herrühren und sämmtlich als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet werden müssen.

Hiernach sind L und S die einzigen, ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Grössen, welche im Allgemeinen sehr bedeutende Werthe erhalten können; sie reduciren sich aber, sobald $\varPi$ zu einem Minimum gemacht wird, auf Grössen der dritten Ordnung, welche in den zu der letzteren Ordnung gehörigen Gliedern vernachlässigt werden dürfen.

In diesen ist mithin

$$\left.\begin{aligned} L_e &= \sum_1^e \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = 0 \\ S_e &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Da der Voraussetzung nach die Hauptblendnng an den Ocularen angebracht ist oder durch die Pupille des Auges gebildet wird, so ist

$$\begin{aligned} (K)_e &= K_1 - g_e \\ K_m - K_1 &= 0 \\ 3K_m^2 - 2K_m K_1 - (K)_e^2 &= K_m^2 - (K)_e^2 \\ &= K_1^2 - (K)_e^2 = g_e(2K_1 - g_e) \\ K_m\left(K_m^2 - (K)_e^2\right) &= K_1 g_e (2K_1 - g_e) \end{aligned}$$

Hierdurch werden die Coefficienten von $\left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m$ in den Ausdrücken von (L), (M) und (N) in Bezug auf den Index m constant. Bezeichnet man daher einen derselben mit $\mathfrak{C}$, so wird das damit multiplicirte Glied =

$$\mathfrak{C}\sum_1^e \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = \mathfrak{C}L_e$$

woraus folgt, dass die von $\left(\frac{A\nu}{V_4}\right)_m$ abhängenden Glieder in jenen Ausdrücken vermöge (c) wegfallen.

Ferner ist nach (c) von Nro. 115

$$\sum_1^e \frac{(C)_m V_m^2}{\nu_m^2} = \sum_1^e \frac{(C)_m}{\nu_m^2} = 0$$

Durch Substitution dieser Werthe geben die in der allegirten Zusammenstellung enthaltenen Formeln

$$\left.\begin{aligned} (L) &= \Sigma_1^e (A)_m \\ \frac{(M)}{2K} &= (L) + \frac{1}{2K_1}\sum_1^e \frac{(B)_m}{\nu_m} \\ \frac{(N)}{K^2} &= (L) + \frac{1}{K_1}\sum_1^e \frac{(B)_m}{\nu_m} - \frac{g_e}{K_1}\left(2 - \frac{g_e}{K_1}\right)\Sigma_1^e B_m \\ (S) &= 0 \\ \frac{(u)}{K} &= T_e = K_1 S_e = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ (d)$$

Ausserdem können in den Gliedern der dritten Ordnung, welche sich auf den farbigen Rand beziehen, die von den Ocularen herrührenden Theile vernachlässigt werden, wodurch

$$\frac{W}{K^3} = U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

wird. Endlich ist vermöge (h), (i), (m) und (n) von Nro. 96 in den Gliedern $(S + {}_\eta s)$ und $(T + {}_\eta t)$

$$s = t = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

und in den Gliedern $\frac{\theta s^2 R^2}{2}$ und $\frac{\theta t^2 \varphi^2}{2}$ oder $\frac{\theta t^2 Y^2}{2K^2}$

$$\left.\begin{aligned} s &= \Sigma_1^e S^{(m)} \gamma_m \\ \frac{t}{K} &= \sum\nolimits_1^e \frac{T^{(m)}\gamma_m}{K_1} = \Sigma_1^e S^{(m)} \gamma_m = s \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

weil sich hinter dem Objective Luft befindet, mithin für alle Flächen desselben $T^{(m)} = K_m S^{(m)} = K_1 S^{(m)}$ gesetzt werden kann.

Vermittelst dieser Werthe verwandelt sich der in (c) von Nro. 100 gegebene Ausdruck von Π in den folgenden:

$$\Pi = \left(\frac{V V_{,} z}{\nu \nu_{,}}\right)^2 \left\{\begin{aligned} & \frac{R^6}{36}\left[L + L' + Q\left(\frac{6}{5}R^2 + 3Y^2\right) + (L)\Delta'\right]^2 + \frac{(L)^2 R^6 \Delta^2}{36} \\ & + \frac{R^4 Y^2}{3}\left[L + M' + Q\left(\frac{3}{2}R^2 + 2Y^2\right) + \frac{(M)\Delta'}{2K}\right]^2 \\ & + \frac{(M)^2 R^4 Y^2 \Delta^2}{12 K^2} \\ & + \frac{R^2 Y^4}{3}\left\{\left[L + G' + Q\left(2R^2 + \frac{3}{2}Y^2\right) + \frac{(N)\Delta'}{K^2}\right]^2 + \frac{H^2}{K^4}\right\} \\ & + \frac{(N)^2 R^2 Y^4 \Delta^2}{3K^4} \\ & + \frac{\varepsilon R^2}{2}\left[S + S' + U\left(\frac{2}{3}R^2 + Y^2\right)\right]^2 \\ & + \frac{\varepsilon Y^2}{2}\left[S + T' + U\left(R^2 + \frac{2}{3}Y^2\right)\right]^2 \\ & + Q^2\left[\frac{R^{10}}{600} + \frac{R^8 Y^2}{20} + \frac{R^6 Y^4}{4} + \frac{R^4 Y^6}{4} + \frac{R^2 Y^8}{20}\right] \\ & + \frac{\theta s^2}{2}(R^2 + Y^2) \\ & + \varepsilon U^2\left[\frac{R^6}{36} + \frac{R^4 Y^2}{3} + \frac{R^2 Y^4}{3} + \frac{Y^6}{36}\right] \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Nehmen wir ein zweifaches Objectiv an, so enthält dasselbe, wie wir oben gesehen haben, drei willkührliche Grössen, wozu am zweckmässigsten ein Halbmesser von jedem Glase und die Brennweite von einem derselben gewählt werden. Unter dieser Voraussetzung ist L eine Function dieser drei willkührlichen Grössen. S dagegen besteht aus zweierlei Gliedern, wovon die ersten den beträchtlichsten Theil jener Grösse ausmachen und allein von der willkührlichen Brennweite abhängen, die zweiten dagegen die drei willkührlichen Grössen enthalten und ausserdem mit den Entfernungen der zum Objective gehörigen Flächen multiplicirt sind, wonach sie als zur dritten Ordnung gehörig betrachtet werden können. Begreift man daher, ebenso wie es bei den anderen Coefficienten geschehen ist, die letzteren Glieder unter S' und T', so wird dadurch S eine blosse Function der willkührlichen Brennweite.

Um die in Nro. 114 angegebene Methode zur Bestimmung des Minimums auf den vorliegenden Fall anzuwenden, bezeichne ich zur Abkürzung den vorhergehenden Ausdruck von Π auf ähnliche Weise wie am angeführten Orte durch

$$\left.\begin{array}{l}\Pi = \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda)^2 \\ \quad + \alpha^3 \Sigma A' (S + \alpha\sigma)^2 + \alpha^5 \Sigma B Q^2\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (i)$$

wobei α eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie R^2 ist, welche dazu dient, die Ordnungen der verschiedenen Glieder anzugeben.

Bemerkt man nun, dass L und S für alle unter dem Zeichen Σ befindliche Glieder einerlei sind, dass ferner nach der früheren Bezeichnung die von S abhängigen Glieder unter denjenigen begriffen waren, welche L enthalten, versteht man sodann unter x und y die beiden willkührlichen Halbmesser, unter z die willkührliche Brennweite, so werden die in (b) der allegirten Nummer für das Minimum gefundenen Gleichungen:

$$0 = \alpha^3 \frac{dL}{dx} \Sigma A (L + \alpha\lambda)$$

$$0 = \alpha^3 \frac{dL}{dy} \Sigma A (L + \alpha\lambda)$$

$$0 = \alpha^3 \frac{dL}{dz} \Sigma A (L + \alpha\lambda)$$
$$\quad + \alpha^3 \frac{dS}{dz} \Sigma A' (S + \alpha\sigma)$$

Die zwei ersten derselben geben

$$0 = \alpha^3 \Sigma A (L + \alpha\lambda)$$

die dritte sodann mit Berücksichtigung dieses Werthes

$$0 = \alpha^3 \Sigma A' (S + \alpha\sigma)$$

Substituiren wir in den beiden vorhergehenden Gleichungen statt der abgekürzt geschriebenen Grössen ihre Werthe, welche aus der Vergleichung von (h) mit (i) folgen, so erhalten wir daraus nach der Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren:

$$\left.\begin{array}{l}0 = L\left[\frac{R^4}{12} + R^2 Y^2 + Y^4\right] \\ \quad + \frac{L' R^4}{12} + M' R^2 Y^2 + G' Y^4 \\ \quad + \Delta'\left[\frac{(L) R^4}{12} + \frac{(M) R^2 Y^2}{2K} + \frac{(N) Y^4}{K^2}\right] \\ \quad + Q\left[\frac{R^6}{10} + \frac{7}{4} R^4 Y^2 + 4 R^2 Y^4 + \frac{3}{2} Y^6\right] \\ 0 = S\,[R^2 + Y^2] + S' R^2 + T' Y^2 \\ \quad + U\left[\frac{2}{3} R^4 + 2 R^2 Y^2 + \frac{2}{3} Y^4\right]\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (k)$$

Wenn daher keine weitere Rücksichten zu nehmen wären, so würden die beiden Gleichungen (k) an die Stelle derjenigen treten, welche wir in (c) von Nro. 117 gefunden haben, daher die Dimensionen des Objectivs auf dieselbe Weise wie dort bestimmt werden könnten. Die hierdurch gefundenen Dimensionen führen aber gewöhnlich den in Nro. 86 angegebenen Nachtheil herbei, dass die Bildfläche dem Auge theils ihre convexe, theils ihre concave Seite zukehrt, woraus folgt, dass man in diesem Falle nicht weiter gehen kann, als der in (d) jener Nummer erhaltenen Gleichung Genüge zu leisten, nämlich

$$0 = \frac{O+N}{4} + 2QK^2R^2$$

welche Gleichung an die Stelle der ersten Gleichung (k) tritt.

Nach der in Nro. 93 eingeführten Bezeichnung ist, da gegenwärtig unter G und H nur G_i und H_i ohne Rücksicht auf das von $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängige Glied verstanden werden,

$$\frac{O+N}{4} = \frac{O_i+N_i}{4} + (N)_e\,\Delta\frac{1}{c_1}$$
$$= G-H+(N)\,\Delta\frac{1}{c_1}$$

Hierdurch wird die vorhergehende Gleichung

$$0 = G-H+2QK^2R^2+(N)\,\Delta\frac{1}{c_1}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(l)$$

mithin ist

$$G-H+(N)\,\Delta\frac{1}{c_1} = -2QK^2R^2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(m)$$

Da der erwähnte Nachtheil nur dann eintritt, wenn das von $\left(\frac{y''}{z}\right)^2$ abhängende Glied in der Gleichung (c) der allegirten Nummer, dessen Coefficient durch die Gleichung (l) $= 0$ gesetzt wurde, das entgegengesetzte Zeichen des mit $\left(\frac{y''}{z}\right)^4$ multiplicirten Gliedes hat, das Zeichen des letzteren aber stets mit dem von Q einerlei ist, so muss, vermöge der Gleichung (m), $-2QK^2R^2$ als die Grenze betrachtet werden, welche der Werth von $\left[G-H+(N)\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]$ ohne Rücksicht auf das Zeichen nie übersteigen darf. Soll daher jener Nachtheil bei allen Entfernungen des Gegenstandes, welche bei dem Gebrauche des Instrumentes vorkommen, vermieden werden, so muss man in der Gleichung (l) statt $\Delta\frac{1}{c_1}$ successiv diejenigen Werthe substituiren, welche der grössten und der kleinsten Entfernung entsprechen, sodann aber von den zweierlei Werthen der willkührlichen Grössen, welche aus beiden Annahmen folgen, diejenigen wählen, wodurch der erwähnten Forderung an der anderen Grenze von $\Delta\frac{1}{c_1}$ entsprochen wird.

Sieht man nun die Gleichung (l) als eine Bedingungsgleichung an, welche bei der Bestimmung des Minimums in jedem Falle erfüllt werden muss, substituirt darin zuerst statt G seinen Werth

$$G = K^2 (L + G')$$

sodann den daraus folgenden Werth von L in dem Ausdrucke (i) von Π und bemerkt, dass H eine kleine Grösse der dritten Ordnung ist, so reduciren sich dadurch alle von L abhängende Glieder auf solche, welche zu jener Ordnung gehören und unter den daselbst mit Q bezeichneten begriffen werden können, wonach Π die Gestalt bekommt: $\Pi = \alpha^3 \Sigma A' (S + \alpha\sigma)^2 + \alpha^5 \Sigma B Q^2$

Hieraus folgt nach der gebrauchten Methode für das Minimum nur die Gleichung

$$0 = \alpha^3 \Sigma A' (S + \alpha\sigma)$$

welche mit der zweiten Gleichung (k) einerlei ist.

An die Stelle der beiden Gleichungen (k) treten daher jetzt die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= G - H + 2QK^2R^2 + (N)\,\Delta\frac{1}{c_1} \\ 0 &= S\,[R^2 + Y^2] + S'R^2 + T'Y^2 \\ &\quad + U\left[\frac{2}{3}R^4 + 2R^2Y^2 + \frac{2}{3}Y^4\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

woraus die Dimensionen des Objectivs berechnet werden müssen.

Die vorhergehenden Gleichungen bestimmen indessen nur zwei willkührliche Grössen des Objectivs; um daher die dritte zu erhalten, müssen wir auf ähnliche Weise verfahren, wie bei den Gleichungen (c) von Nro. 117. Geben wir nämlich dem einen unbestimmten Halbmesser nach und nach verschiedene willkührliche Werthe, berechnen sodann die übrigen Dimensionen vermittelst der Gleichungen (n) und hierauf den Werth von Π durch den in (h) gefundenen Ausdruck, so ist dasjenige Objectiv als das beste zu betrachten, bei welchem der letztere Werth so klein als möglich wird.

Die Rechnung vereinfacht sich übrigens in dem gegenwärtigen Falle dadurch sehr, dass bei weitem die bedeutendsten Glieder, welche nach der Substitution der aus den Gleichungen (n) erhaltenen Werthe in dem Ausdrucke von Π übrig bleiben, diejenigen sind, welche Q als Factor enthalten. Ohne uns daher auf eine genauere Berechnung jener Glieder einzulassen, können wir den Schluss machen, dass dasjenige Objectiv den Vorzug verdient, welches den Gleichungen (n) Genüge leistet und wodurch zugleich Q den kleinstmöglichen Werth erhält.

123) Die in der vorhergehenden Nummer erhaltenen Resultate setzen voraus, dass die von den verschiedenen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Strahlenbündel ungehindert durch das Instrument

gelassen werden, welches jedoch, wie wir in Nro. 59 gesehen haben, nur im mittleren Theile des Gesichtsfeldes stattfindet, so dass jene Resultate eigentlich nur auf den letzteren anwendbar sind. Um auch den äusseren Theil zu berücksichtigen, müssen wir uns der Methode bedienen, welche in der 104[ten] und den folgenden Nummern vorgetragen worden ist.

Ich nehme dabei an, dass die Fassung des Objectivs diejenige Blendung ist, welche das Gesichtsfeld begrenzt und deren Halbmesser mit ϱ bezeichnet wurde. Hiernach ist, da diese Blendung unmittelbar vor der ersten brechenden Fläche steht, in (b) von Nro. 104

$$i+1 = 1$$
$$V_{i+1} = 1$$
$$K_{i+1} = K$$
$$\zeta'_{i+1} = 0$$

folglich

$$\mathfrak{r} = 1$$
$$\mathfrak{f} = \frac{1}{K}$$
$$R = \varrho'$$

Behält man daher statt ϱ' den bisher gebrauchten Buchstaben R bei, so müssen vermöge (c) jener Nummer in den Gleichungen (d) von Nro. 68 nur

$$\left.\begin{array}{lcl}
\varphi & \text{mit} & v \\
K & \ldots\ldots & 1 \\
M & \ldots\ldots & \frac{M}{K} \\
N & \ldots\ldots & \frac{N}{K^2} \\
O & \ldots\ldots & \frac{O}{K^2} \\
T & \ldots\ldots & \frac{T}{K} \\
t & \ldots\ldots & \frac{t}{K} \\
W & \ldots\ldots & \frac{W}{K^3}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

verwechselt werden, wobei die Buchstaben in der früheren Bedeutung genommen sind; dagegen bleiben R, L, Q, S, s, U und J ungeändert.

Es unterliegt keinem Anstande, die Gleichung für die erzeugende Curve der Bildfläche nach der am Ende von Nro. 106 angegebenen Methode zu finden und daraus die Modificationen herzuleiten, welche dadurch die erste Gleichung (n) der vorhergehenden Nummer erleidet; da jedoch die Formeln in dieser Allgemeinheit sehr

complicirt werden, so verspare ich die Untersuchung bis zu den speciellen Anwendungen und beschäftige mich hier nur mit der zweiten jener Gleichungen. Sie drückt aus, dass der in S enthaltenen willkührlichen Grösse derjenige Werth beigelegt werden muss, welcher die auf die Farbenzerstreuung sich beziehenden Glieder in dem Ausdrucke von Π zu einem Minimum macht. Da nun, wie wir in Nro. 114 gesehen haben, die Differentiale der ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen vernachlässigt werden können, so reicht es zu dem vorliegenden Zwecke hin, die mit S multiplicirten Glieder von Π zu entwickeln und ihre Summe zu einem Minimum zu machen, dabei aber alle übrige Grössen als constant zu betrachten.

Bemerken wir ferner, dass nach den in der vorhergehenden Nummer gegebenen Werthen

$$\left.\begin{array}{lll} \text{das frühere} & S & \text{mit } S+S' \\ \text{„} & \text{„} \;\; \frac{T}{K} & \ldots\ldots S+T' \\ \text{„} & \text{„} \;\; \frac{t}{K} & \ldots\ldots s \\ \text{„} & \text{„} \;\; \frac{W}{K^3} & \ldots\ldots U \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

verwechselt werden muss, um dabei die gegenwärtige Bezeichnung zu gebrauchen, so ist aus (a) ersichtlich, dass in den Gleichungen (d) von Nro. 68

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ mit } v \\ K \ldots\ldots 1 \\ S \ldots\ldots S+S' \\ T \ldots\ldots S+T' \\ t \ldots\ldots s \\ W \ldots\ldots U \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

verwechselt werden müssen.

Berechnen wir jetzt vermittelst jener Gleichungen die von S abhängigen Glieder von

$$r'^2 = y'^2 + x'^2$$

indem wir sogleich alle diejenigen weglassen, welche mit der ersten Potenz von δv multiplicirt sind, dagegen alle von Ψ abhängige Glieder beibehalten, so ist nach der in Nro. 80 gebrauchten Bezeichnung

$$(S)^2 = (S+S')^2 R^2 \delta v^2$$

$$(Ss) = 2(S+S')\, s\, R^2 \delta v^3$$

$$(SU) = 2(S+S')\, U \delta v^2 \left\{\begin{array}{l} R^4 + R^2 v^2 + 3R^3 v \cos\Psi \\ + 2R^2 v^2 \cos^2\Psi \end{array}\right\}$$

$$(ST) = 2(S+S')(S+T') R\, v\, \delta v^2 \cos\Psi$$

$$(St) = 2(S+S')\, s\, R\, v\, \delta v^3 \cos\Psi$$

$$(SW) = 2(S+S')\, U R\, v^3 \delta v^2 \cos\Psi$$

$$(sT) = 2(S+T')\, s\, R\, v\, \delta v^3 \cos\Psi$$

$$(UT) = 2(S+T')\, U \delta v^2 \left\{\begin{array}{l} R^2 v^2 + (R^3 v + 3R v^3)\cos\Psi \\ + 2R^2 v^2 \cos^2\Psi \end{array}\right\}$$

$$(T)^2 = (S+T')^2 v^2 \delta\nu^2$$
$$(Tt) = 2(S+T') s v^2 \delta\nu^3$$
$$(TW) = 2(S+T') U v^4 \delta\nu^2$$

Entwickelt man die von S abhängigen Factoren, vereinigt die Glieder, welche einerlei Argument haben, und lässt diejenigen unter ihnen weg, die kein S enthalten und zu dem gegenwärtigen Zwecke unnöthig sind, so wird mit Beiseitsetzung des gemeinschaftlichen Factors

$$\begin{aligned} r'^2 = & (S^2 \delta\nu^2 + 2Ss\,\delta\nu^3)\left[R^2 + 2R v \cos\Psi + v^2\right] \\ & + 2SS'\delta\nu^2 \left[R^2 + R v \cos\Psi\right] \\ & + 2ST'\delta\nu^2 \left[R v \cos\Psi + v^2\right] \\ & + 2SU\delta\nu^2 \left\{ \begin{array}{l} R^4 + 2R^2 v^2 + v^4 \\ + 4(R^3 v + R v^3)\cos\Psi \\ + 4R^2 v^2 \cos^2\Psi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Nach Nro. 104 muss r'^2 zuerst mit $\lambda d\delta\nu$ multiplicirt und integrirt werden. Hierdurch verwandelt sich r'^2 in r''^2, $\delta\nu^2$ in δ_2 und $\delta\nu^3$ in δ_3. Da jedoch beständige Factoren auf das Resultat keinen Einfluss haben, so können wir den ganzen Ausdruck von r''^2 durch δ_2 dividiren, wonach r''^2 aus r'^2 entsteht, wenn man $\delta\nu^2$ weglässt und $\delta\nu^3$ mit $\frac{\delta_3}{\delta_2} = \eta$ verwechselt.

Den auf diese Weise erhaltenen Ausdruck von r''^2 müssen wir sodann mit $d\Psi$ multipliciren und innerhalb der in der allegirten Nummer angegebenen Grenzen integriren. Diess giebt

$$\begin{aligned} \int r''^2 d\Psi = & (S^2 + 2\eta Ss) \left\{ \begin{array}{l} 2(R^2 + v^2)(\pi - \Psi) \\ - 4Rv\sin\Psi \end{array} \right\} \\ & + 2SS'\left[2R^2(\pi-\Psi) - 2Rv\sin\Psi\right] \\ & + 2ST'\left[2v^2(\pi-\Psi) - 2Rv\sin\Psi\right] \\ & + 2SU \left\{ \begin{array}{l} 2(R^4 + 4R^2v^2 + v^4)(\pi-\Psi) \\ - 8(R^3 v + R v^3)\sin\Psi \\ - 4R^2 v^2 \sin\Psi\cos\Psi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Wird dieses Integral mit $d.R^2$ multiplicirt und von neuem integrirt, so verwandelt es sich mit Weglassung des beständigen Divisors δ_0 in diejenige Grösse, welche wir in Nro. 105 mit (Θ) bezeichnet haben. Nach den daselbst gegebenen Formeln ist aber

$$\int 2(\pi-\Psi)\,d.R^2 = 2R^2(\pi-\Psi) + 2\varrho^2\psi - r$$

$$\int 2R^2(\pi-\Psi)\,d.R^2 = R^4(\pi-\Psi) + \psi(\varrho^4 + 2\varrho^2 v^2) - \frac{r}{4}(6\varrho^2 + 2v^2 + x)$$

$$\int 2R^4(\pi-\Psi)\,d.R^2 = \frac{2}{3}R^6(\pi-\Psi) + \psi\left(\frac{2}{3}\varrho^6 + 4\varrho^4 v^2 + 2\varrho^2 v^4\right) - \frac{r}{9}\left[15\varrho^4 + 26\varrho^2 v^2 + 3v^4 + (6\varrho^2 + 3v^2)x + x^2\right]$$

$$-\int 2R\,v\sin\Psi\,d.R^2 = -2\varrho^2 v^2\psi - \frac{xr}{2}$$

$$-\int 2R^3 v\sin\Psi\,d.R^2 = -2\psi(\varrho^4 v^2+\varrho^2 v^4) - \frac{xr}{2}(\varrho^2+v^2)+\frac{r^3}{3}$$

$$-\int 2R^2 v^2\sin\Psi\cos\Psi\,d.R^2 = 2\varrho^2 v^4\psi + \frac{v^2xr}{2}-\frac{r^3}{6}$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}(\Theta) = \int d.R^2\int r''^2 d\Psi = A\,(S^2+2\eta Ss)\\ +2BSS'+2CST'+2DSU\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (d)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}A &= (R^4+2R^2v^2)(\pi-\Psi)+\varrho^4\psi-\frac{r}{4}(6\varrho^2+6v^2+5x)\\ B &= R^4(\pi-\Psi)+\varrho^4\psi-\frac{r}{4}(6\varrho^2+2v^2+3x)\\ C &= 2R^2v^2(\pi-\Psi)-\frac{r}{2}(2v^2+x)\\ D &= \left(\frac{2}{3}R^6+4R^4v^2+2R^2v^4\right)(\pi-\Psi)+\frac{2}{3}\varrho^6\psi\\ &\quad-\frac{r}{9}\left[15\varrho^4+80\varrho^2v^2+30v^4+(24\varrho^2+39v^2)x+x^2-9r^2\right]\end{aligned}\right\}(e)$$

Vermöge (d) von Nro. 106 besteht Θ aus (Θ) und einem zweiten Theile, dessen Zähler das Quadrat einer Grösse ist, welche durch zweimalige Integration aus $[y']$ erhalten wird. Da aber bei dem Uebergange von (y') zu $[y']$ alle Glieder wegfallen, welche ursprünglich die erste Potenz von δv enthielten, so ist aus (d) von Nro. 68 ersichtlich, dass in $[y']$ keine von S abhängige Glieder stehen bleiben, daher jener zweite Theil wegfällt, in so weit er bei der gegenwärtigen Untersuchung gebraucht wird. Die Formel (d) drückt daher zugleich den vollständigen Werth von Θ aus.

Um von Θ zu Π überzugehen, ist es nach (a) von Nro. 107 erforderlich, jene Grösse mit $d.v^2$ zu multipliciren und zu integriren. Drücken wir zu dem Ende in (e) die inclavirten Factoren von r vermittelst der in (e) von Nro. 107 gegebenen Werthe so aus, dass sie statt v^2, x und r^2 nur y enthalten; bemerken wir ferner, dass hierbei alle mit ungeraden Potenzen von y multiplicirte Glieder weggelassen werden können, weil sie an den Grenzen der Integrale verschwinden, so erhalten wir

$$A = (R^4+2R^2v^2)(\pi-\Psi)+\varrho^4\psi-\frac{r}{2}(\varrho^2+3R^2)$$

$$B = R^4(\pi-\Psi)+\varrho^4\psi-\frac{r}{2}(\varrho^2+R^2)$$

$$C = 2R^2 v^2 (\pi - \Psi) - R^2 r$$

$$D = \left[\frac{2}{3} R^6 + 4 R^4 v^2 + 2 R^2 v^4\right](\pi - \Psi) + \frac{2}{3}\varrho^6 \psi$$
$$- \frac{r}{9}[3\varrho^4 + 26\varrho^2 R^2 + 30 R^4 + y^2]$$

Die Formeln (i) der allegirten Nummer geben aber

$$\int (\pi - \Psi)\, d \,.\, v^2 = \varrho^2 \pi$$

$$\int v^2 (\pi - \Psi)\, d \,.\, v^2 = \pi\left[\frac{\varrho^4}{2} + \varrho^2 R^2\right]$$

$$\int v^4 (\pi - \Psi)\, d \,.\, v^2 = \pi\left[\frac{\varrho^6}{3} + 2\varrho^4 R^2 + \varrho^2 R^4\right]$$

$$\int \psi\, d \,.\, v^2 = R^2 \pi$$

$$\int r\, dy = 2\varrho^2 R^2 \pi$$

$$\int y^2 r\, dy = 2\varrho^4 R^4 \pi$$

Hierdurch wird

$$\int A\, d \,.\, v^2 = \varrho^4 R^2 \pi$$

$$\int B\, d \,.\, v^2 = 0$$

$$\int C\, d \,.\, v^2 = \varrho^4 R^2 \pi$$

$$\int D\, d \,.\, v^2 = \frac{2}{3}\varrho^6 R^2 \pi$$

Nach der vorhergehenden Bemerkung ist ferner

$$\Pi = \int (\Theta)\, d \,.\, v^2 = (S + 2_\eta S s) \int A\, d \,.\, v^2$$
$$+ 2 S S' \int B\, d \,.\, v^2 + 2 S T' \int C\, d \,.\, v^2$$
$$+ 2 S U \int D\, d \,.\, v^2$$

Da aber in dem oben gebrauchten Werthe von r^2 der darin enthaltene gemeinschaftliche Factor weggelassen wurde, so muss Π noch mit demselben multiplicirt werden. Er ist nach der gegenwärtigen Bezeichnung vermöge (d) von Nro. 68 $= \left(\frac{V V,z}{v v,}\right)^2$ und kann unberücksichtigt bleiben, wenn nur von einerlei Einrichtung des Instrumentes die Rede ist, weil er in diesem Falle bloss aus constanten Grössen besteht; ich behalte ihn jedoch, wie früher, wegen der Vergleichung von Einrichtungen mit verschiedenen Vergrösserungen bei. Hiernach verwandelt sich der Ausdruck von Π, wenn man darin statt der Integrale ihre vorhergehenden Werthe mit Weglassung des constanten Factors π substituirt, in den folgenden:

$$\Pi = \left(\frac{V V,z}{v v,}\right)^2 \varrho^4 R^2 \left\{ \begin{array}{l} S^2 + 2_\eta S s \\ + 2 S T' + \frac{4}{3} S U \varrho^2 \end{array} \right\} \quad \ldots \quad (f)$$

Er giebt bei einerlei Einrichtung des Instrumentes für das Minimum in Bezug auf die in S enthaltene willkührliche Grösse die Gleichung

$$0 = S + \eta s + T' + \frac{2}{3} U \varrho^2 \ldots\ldots (g)$$

Sie tritt an die Stelle der zweiten Gleichung (n) von Nro. 122 und bewirkt zu gleicher Zeit die möglichst vollkommene Aufhebung der Farbenzerstreuung in der Axe und des farbigen Randes für das ganze Gesichtsfeld im Mittel. Nach dem in Nro. 96 erhaltenen Resultate und dem in (f) von Nro. 122 gegebenen Werthe von s kann das davon abhängige Glied in der vorhergehenden Gleichung weggelassen werden, wenn man bei Berechnung von S das corrigirte Zerstreuungsverhältniss gebraucht; jene Gleichung reducirt sich daher auf die folgende:

$$0 = S + T' + \frac{2}{3} U \varrho^2 \ldots\ldots (h)$$

Wir können jetzt noch die Bedeutung der Gleichung (g) aufsuchen, ebenso wie es bei sehr kleinen Werthen von K geschehen ist.

Substituiren wir statt $(S + T')$, s und U die oben in (b) gegebenen Werthe:

$$S + T' = \frac{T}{K}$$

$$s = \frac{t}{K}$$

$$U = \frac{W}{K^3}$$

so verwandelt sich jene Gleichung in die folgende:

$$0 = T + \eta t + \frac{2}{3} W \left(\frac{\varrho}{K}\right)^2 \ldots\ldots (i)$$

Die Vergleichung derselben mit (l) und (p) von Nro. 121 zeigt, dass sie aus den letzteren folgt, wenn man $\Delta \frac{1}{c_1}$, y und $(\delta tg \overset{\prime\prime}{\omega} - \delta tg \overset{\prime\prime}{\omega_{,}})$ $= 0$ setzt und φ mit $\left(\frac{\varrho}{K}\right)$ verwechselt. Da nun dieselben allgemein und ohne besondere Supposition über den Werth von K gefunden wurden, mithin auch hier anwendbar sind, so können wir daraus den Schluss machen, dass es in dem vorliegenden Falle zur möglichst vollkommenen Aufhebung der Farbenzerstreuung in der Axe und des farbigen Randes erforderlich ist, entweder den letzteren für denjenigen Strahl zu vernichten, welcher dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und $\left(\frac{\varrho}{K}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$ bestimmten Punkte des Gegenstandes zugehört, durch die Mitte der Hauptblendung geht und das Brechungsverhältniss $(\nu + \eta)$ hat, oder zu bewirken, dass zwei Strahlen, welche ebenfalls dem erwähnten Punkte zugehören und durch die Mitte der Hauptblendung gehen, sich aber durch die Brechungsverhältnisse

$$\left(\nu + \frac{\eta}{2} + \delta\nu'\right) \text{ und } \left(\nu + \frac{\eta}{2} - \delta\nu'\right)$$

unterscheiden, mit der Axe des Instrumentes einerlei Winkel machen.

124) Sollen bei dem Instrumente mehrere Oculareinsätze angebracht werden, so gilt in Bezug auf die Gleichung (l) von Nro. 122 dieselbe Bemerkung, welche wir daselbst in Ansehung des Werthes von $\Delta\frac{1}{c_1}$ gemacht haben, indem auch hier die Grösse

$$\left[G-H+(N)\Delta\frac{1}{c_1}\right]$$

ohne Rücksicht auf das Zeichen die Grenze $-2QK^2R^2$ bei keinem Oculareinsatze übersteigen darf.

Bei der Farbenzerstreuung dagegen müssen wir uns einer ähnlichen Methode wie in Nro. 103 bedienen. Da nach der oben gebrauchten Bezeichnung T' die von dem Objective und den Ocularen herrührenden Glieder der dritten Ordnung bezeichnet, welche in $\frac{T}{K}$ vorkommen, bei der gegenwärtigen Untersuchung aber beiderlei Glieder von einander getrennt werden müssen, so substituire ich $(T_{\prime}+T_{\prime\prime})$ statt T' und verstehe unter $T_{\prime}$ die Glieder, welche sich auf die Oculare beziehen, unter $T_{\prime\prime}$ dagegen diejenigen, welche dem Objective zugehören. Hiernach sind in dem Ausdrucke von Π, den wir in (f) der vorhergehenden Nummer gefunden haben, nur V, R und $T_{\prime}$ bei den verschiedenen Oculareinsätzen veränderlich. Multiplicirt man nun Π wie in der allegirten Nummer mit einem Factor (V), welcher das einem jeden Oculareinsatze beigelegte Gewicht ausdrückt, nimmt die Summe für sämmtliche Oculareinsätze und behält für dieselbe den Buchstaben Π bei, so wird

$$\Pi=\left(\frac{V_{\prime}z}{\nu\nu_{\prime}}\right)^2\varrho^4\left\{\begin{array}{l}\left[S^2+2_{\eta}Ss+2ST_{\prime\prime}+\frac{4}{3}SU\varrho^2\right]\Sigma(V)V^2R^2\\+2S\Sigma(V)V^2R^2T_{\prime}\end{array}\right\}\quad\text{(a)}$$

woraus für das Minimum in Bezug auf die in S enthaltene willkührliche Grösse die Gleichung folgt:

$$0=S+{}_{\eta}s+\frac{\Sigma(V)V^2R^2T_{\prime}}{\Sigma(V)V^2R^2}+T_{\prime\prime}+\frac{2}{3}U\varrho^2\;.\;.\;.\;.\quad\text{(b)}$$

Die Vergleichung derselben mit (g) der vorhergehenden Nummer zeigt, dass in der letzteren nur statt T' der folgende Werth genommen werden muss, um sie auf die sämmtlichen Oculareinsätze im Mittel anzuwenden, nämlich

$$T'=\frac{\Sigma(V)V^2R^2T_{\prime}}{\Sigma(V)V^2R^2}+T_{\prime\prime}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad\text{(c)}$$

Vermöge (a) von Nro. 99 ist

$$R=Vr$$

wobei r den Oeffnungshalbmesser der letzten brechenden Fläche des Instrumentes wegen der Helligkeit bezeichnet, welcher in Bezug auf das Zeichen Σ als constant zu betrachten ist, wenn die Pupille die Hauptblendung bildet. In diesem Falle ist daher

$$T'=\frac{\Sigma(V)V^4T_{\prime}}{\Sigma(V)V^4}+T_{\prime\prime}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad\text{(d)}$$

Soll statt der absoluten Deutlichkeit die relative in Betracht kommen, so muss in (a)

$$V^2 = \frac{v^2 v_{,}^2 c_1^2}{V_{,}^2 z^2}$$

gesetzt werden. Da dieser Werth constant ist, so verwandeln sich die vorhergehenden Ausdrücke von T', auf die relative Deutlickkeit angewandt, in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} T' &= \frac{\Sigma(V) R^2 T_{,}}{\Sigma(V) R^2} + T_{,,} \\ T' &= \frac{\Sigma(V) V^2 T_{,}}{\Sigma(V) V^2} + T_{,,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Instrumente ohne achromatische Objective.

125) Ist das Instrument mit keinem achromatischen Objective versehen und so eingerichtet, dass der farbige Rand nicht aufgehoben werden kann, so fallen in dem Ausdrucke von Π alle Glieder weg, welche ursprünglich zur dritten Ordnung gehören, indem diese nur unter der Voraussetzung entwickelt wurden, dass die ursprünglich zur zweiten Ordnung gehörigen Glieder durch das achromatische Objectiv und die zur Vernichtung des farbigen Randes getroffene Einrichtung auf Grössen der dritten Ordnung reducirt worden seyen, eine Voraussetzung, welche in dem vorliegenden Falle nicht stattfindet. Es genügt auch um so mehr, nur die Glieder der zweiten Ordnung zu berücksichtigen, da keine der verschiedenen Abweichungen vollkommen aufgehoben werden kann, mithin eine genäherte Berechnung derselben hinreicht, um diejenige Einrichtung zu finden, bei welcher die Fehler, im Ganzen genommen, so klein als möglich werden.

Hierdurch reducirt sich die Formel (d) von Nro. 93 nach vorheriger Verwechselung von $\frac{Vz}{v}$ mit $\frac{VV_{,}z}{vv_{,}}$ auf die folgende:

$$\Pi = \left(\frac{VV_{,}z}{vv_{,}}\right)^2 \left\{\begin{aligned} &\frac{L^2 R^6}{36} + \frac{M^2 R^4 \varphi^2}{12} \\ &+ \frac{R^2 \varphi^4}{3}(G^2 + H^2) \\ &+ \frac{{}_{\varepsilon}S^2 R^2}{2} + \frac{{}_{\varepsilon}T^2 \varphi^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

welche durch die am Ende von Nro. 99 angegebene Methode auch in dem Falle Anwendung findet, wenn r und Φ statt R und φ gebraucht werden sollen.

Ferner verwandeln sich die Formeln (b) von Nro. 98 und (c) von Nro. 100 in die beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} n &= \left(\frac{V_{,}z}{v_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{L^2 V^2 R^6}{36\,v^2} + \frac{M^2 R^4 \Phi^2}{12} \\ &+ \frac{v^2 R^2 \Phi^4}{3 V^2}(G^2 + H^2) \\ &+ \frac{\varepsilon S^2 V^2 R^2}{2\,v^2} + \frac{\varepsilon T^2 \Phi^2}{2} \end{aligned} \right\} \\ n &= \left(\frac{V V_{,} z}{v v_{,}}\right)^2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{L^2 R^6}{36} + \frac{M^2 R^4 Y^2}{12 K^2} \\ &+ \frac{R^2 Y^4}{3 K^4}(G^2 + H^2) \\ &+ \frac{\varepsilon S^2 R^2}{2} + \frac{\varepsilon T^2 Y^2}{2 K^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Da das Instrument der Voraussetzung nach eine solche Einrichtung hat, dass es nicht möglich ist, die verschiedenen Abweichungen abgesondert aufzuheben, so können die Coefficienten L, M, G, H, S und T nicht verschwinden; es bleibt daher nichts anderes übrig, als den ganzen Ausdruck von n durch die Bestimmung der darin enthaltenen willkührlichen Grössen nach der oben angegebenen Methode zu einem Minimum zu machen.

Vortheilhafteste Stellung der Hauptblendung oder des Auges in Bezug auf die Deutlichkeit.

126) Die Coefficienten in dem Ausdrucke von n enthalten die Constante K, oder K_1 nach der früheren Bezeichnung, welche, wie wir in Nro. 22, 62 und 63 gesehen haben, von der Stellung der Hauptblendung oder des Auges abhängt. Ist daher die eine von beiden willkührlich, so kann man K so bestimmen, dass dadurch n zu einem Minimum gemacht, mithin die grösstmögliche Deutlichkeit in dieser Beziehung erhalten wird. In manchen Fällen bietet jene Methode ein sehr wirksames Mittel dar, um die Deutlichkeit beträchtlich zu vermehren, wozu das Auge, die seit Wollaston gebräuchlichen periscopischen Instrumente, die mit Blendungen versehenen Objective zusammengesetzter Microscope, die einfachen und zusammengesetzten Loupen etc. Beispiele geben. Entwickeln wir daher die zu dieser Bestimmung nothwendigen Formeln.

Die Instrumente, welche hierbei in Betracht kommen, sind gewöhnlich so beschaffen, dass die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen vernachlässigt werden können, daher die Formeln der vorhergehenden Nummer hier Anwendung finden. Bemerken wir nun, dass nach der in Nro. 37 enthaltenen Zusammenstellung und nach (e) von Nro. 93 nur die Coefficienten M, G und T von K abhängig sind, dass es ferner im gegenwärtigen Falle erlaubt ist, in dem Ausdrucke von n nicht nur die gemeinschaftlichen, beständigen,

positiven Factoren, sondern auch die in der Parenthese enthaltenen beständigen Glieder wegzulassen, da dieselben auf das Minimum keinen Einfluss haben, so sehen wir, dass von dem Ausdrucke (a) der vorhergehenden Nummer hier nur die folgenden Glieder in Betracht kommen:

$$\Pi = \frac{M^2 R^4}{12} + \frac{G^2 R^2 \varphi^2}{3} + \frac{\varepsilon T^2}{2} \quad \text{. (a)}$$

Für das Minimum in Bezug auf K erhalten wir hieraus die Gleichung

$$0 = \frac{d\Pi}{dK}$$

oder

$$0 = \frac{MR^4}{12}\frac{dM}{dK} + \frac{GR^2\varphi^2}{3}\frac{dG}{dK}$$
$$+ \frac{\varepsilon T}{2}\frac{dT}{dK}$$

Nach (q) von Nro. 4 ist aber

$$dK_m = dK_1 = dK$$

Die allegirten Werthe geben daher, da die Coefficienten nach der früheren Bezeichnung den unteren Index i haben, die darin enthaltenen Summen mithin von 1 bis i genommen werden müssen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dK} &= 2\sum_1^i \left(\frac{A\nu}{V^4}\right)_m = 2L \\ \frac{dG}{dK} &= \sum_1^i \left(\frac{2A\nu K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m = M \\ \frac{dT}{dK} &= \sum_1^i S^{(m)} = S \end{aligned}\right\} \quad \text{. (b)}$$

Hierdurch wird die vorhergehende Gleichung des Minimums

$$0 = \frac{LMR^4}{6} + \frac{MGR^2\varphi^2}{3} + \frac{\varepsilon ST}{2} \quad \text{. (c)}$$

welche zur Bestimmung von K dient. Da M und T von der ersten, G dagegen von der zweiten Dimension in Bezug auf K sind, so ist jene Gleichung vom dritten Grade. Um sie zu entwickeln, setze ich

$$K_m = K + K'_m \quad \text{. (d)}$$

wobei K'_m die Summe der von K unabhängigen Glieder bezeichnet. Ferner nenne ich M', G' und T' diejenigen Werthe, welche M, G und T dadurch erhalten, dass in denselben K_m mit K'_m verwechselt wird. Substituirt man nun in den allegirten Ausdrücken von M, G T den vorhergehenden Werth von K_m und setzt K aus dem Summationszeichen heraus, da sich dieses bloss auf m bezieht, K aber hiervon unabhängig ist, so wird

$$\left.\begin{aligned}
M &= \sum_1^i \left(\frac{2AvK'}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m + 2K\sum_1^i \left(\frac{Av}{V^4}\right)_m \\
&= M' + 2KL \\
G &= \sum_1^i \left(\frac{AvK'^2}{V^4} + \frac{BK'}{V^2} + \frac{3D-C}{8v}\right)_m \\
&\quad + K\sum_1^i \left(\frac{2AvK'}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m + K^2\sum_1^i \left(\frac{Av}{V^4}\right)_m \\
&= G' + KM' + K^2 L \\
T &= \sum_1^i \left[K'_m S^{(m)} - \left(\frac{\alpha_m}{v_m} - \frac{\alpha_{m-1}}{v_{m-1}}\right)\right] + K\sum_1^i S^{(m)} \\
&= T' + KS
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (e)$$

Setzen wir ausserdem zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{3M'}{2L} \\
\mathfrak{B} &= \frac{R^2}{2\varphi^2} + \frac{M'^2}{2L^2} + \frac{G'}{L} + \frac{3\varepsilon S^2}{4L^2R^2\varphi^2} \\
\mathfrak{C} &= \frac{M'R^2}{4L\varphi^2} + \frac{M'G'}{2L^2} + \frac{3\varepsilon ST'}{4L^2R^2\varphi^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

so verwandelt sich die Gleichung (c) durch Substitution der vorhergehende Werthe in die folgende:

$$0 = K^3 + \mathfrak{A}K^2 + \mathfrak{B}K + \mathfrak{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

deren Auflösung den vortheilhaftesten Werth von K bestimmt.

Da die Coefficienten der Gleichung (g) etwas complicirt sind, so ist es oft einfacher, sich zur Auflösung unmittelbar der Gleichung (c) zu bedienen, indem man statt K mehrere, in der Nähe des Minimums liegende Werthe nach Willkühr annimmt, für jeden derselben die Summe der in jener Gleichung enthaltenen Glieder berechnet und hieraus nach der bei der Auflösung der Gleichungen gebräuchlichen Methode denjenigen Werth von K ableitet, welcher die erwähnte Summe $= 0$ macht. Auch kann hierzu der in (a) gegebene Ausdruck von Π gebraucht werden, wenn man den Werth dieser Grösse für mehrere willkührliche, in der Nähe des Minimums liegende Werthe berechnet und dann das letztere nach der in Nro. 112 angegebenen Methode bestimmt.

Wir müssen übrigens bemerken, dass manche Wurzeln der Gleichungen (c) und (g) Maxima geben und daher ausgeschlossen werden müssen. Um sie zu unterscheiden, ist es erforderlich, den Werth von $\frac{d^2\Pi}{dK^2}$ zu berechnen.

Da jene Gleichungen weiter nichts sind, als die $= 0$ gesetzten Werthe von $\frac{d\Pi}{dK}$, bei der zweiten derselben mit einem beständigen,

positiven Factor multiplicirt, welcher auch in $\frac{d^2\Pi}{dK^2}$ beibehalten werden kann, so finden wir die letztere Grösse dadurch, dass wir die zweiten Theile der erwähnten Gleichungen nach K differentiiren und durch dK dividiren. Hierdurch giebt die Gleichung (c)

$$\frac{d^2\Pi}{dK^2} = \frac{LR^4}{6}\frac{dM}{dK} + \frac{MR^2\varphi^2}{3}\frac{dG}{dK} + \frac{GR^2\varphi^2}{3}\frac{dM}{dK} + \frac{\varepsilon S}{2}\frac{dT}{dK}$$

und mit Rücksicht auf die Werthe (b)

$$\frac{d^2\Pi}{dK^2} = \frac{L^2R^4}{3} + \frac{R^2\varphi^2}{3}(M^2 + 2LG) + \frac{\varepsilon S^2}{2} \quad \ldots \quad \text{(h)}$$

Aus der Gleichung (g) dagegen erhalten wir

$$\frac{d^2\Pi}{dK^2} = 3K^2 + 2\mathfrak{A}K + \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

Je nachdem daher diese Ausdrücke durch die aus den allegirten Gleichungen gefundenen Werthe von K positiv oder negativ werden, gehören diese einem Minimum oder Maximum zu.

Können die mit ε multiplicirten, von der Farbenzerstreuung herrührenden Glieder vernachlässigt werden, so reduciren sich die Gleichungen (c) und (h) auf die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= M(LR^2 + 2G\varphi^2) \\ \frac{d^2\Pi}{dK^2} &= \frac{R^2}{3}\left[L^2R^2 + (M^2 + 2LG)\varphi^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(k)}$$

Der ersten Gleichung wird Genüge geleistet, wenn einer ihrer beiden Factoren $= 0$ wird. Der erste derselben giebt

$$M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

Hieraus folgt durch Substitution der in (e) erhaltenen Werthe

$$\left.\begin{aligned} K &= -\frac{M'}{2L} \\ \frac{d^2\Pi}{dK^2} &= \frac{R^2}{3}\left[L^2R^2 + 2LG\varphi^2\right] \\ &= \frac{R^2}{3}\left[L^2R^2 + \left(2LG' - \frac{M'^2}{2}\right)\varphi^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{(m)}$$

Der vorhergehende Werth von K gehört daher einem Minimum oder Maximum zu, jenachdem der inclavirte Factor des letzten Ausdruckes positiv oder negativ ist.

Setzt man in der ersten Gleichung (k) den zweiten Factor $= 0$, so entsteht daraus die quadratische Gleichung

$$0 = LR^2 + 2\varphi^2(G' + KM' + K^2L)$$

deren Wurzeln

$$K = -\frac{M'}{2L} \pm \sqrt{-\frac{1}{2L^2\varphi^2}\left[L^2R^2 + \left(2LG' - \frac{M'^2}{2}\right)\varphi^2\right]} \,.\, \text{(n)}$$

sind. Sie sind nur möglich, wenn der inclavirte Factor unter dem Wurzelzeichen verneint ist, der in (m) gefundene Werth von K mithin einem Maximum zugehört. Da ferner hierdurch

$$\frac{d^2 \Pi}{dK^2} = \frac{M^2 R^2 \varphi^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

wird, so geben die letzten Werthe von K, so oft sie möglich sind, zwei Minima, zwischen welchen das dem ersten Werthe entsprechende Maximum liegt.

Die vorhergehenden Formeln beziehen sich zwar eigentlich nur auf die in der vorhergehenden Nummer mit (a) bezeichnete, sie können jedoch auch auf die übrigen durch die in den Nummern 98 und 99 angegebenen Werthe von R und φ angewandt werden.

Sind die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen so bedeutend, dass sie nicht vernachlässigt werden können, so werden die Formeln, wenn man sie nach der vorhergehenden Methode entwickelt, sehr complicirt, daher es in diesem Falle einfacher ist, die ursprüngliche Formel für Π zu gebrauchen und daraus das Minimum nach Nro. 112 zu berechnen.

Sobald der vortheilhafteste Werth von K nach dem Vorhergehenden berechnet worden ist, bleibt nur noch übrig, die jenem Werthe entsprechende Stellung der Hauptblendung oder des Auges zu bestimmen, welches nach den in Nro. 22, 62 und 63 gegebenen Formeln keinen Schwierigkeiten unterworfen ist.

Coefficienten, welche von der Farbenzerstreuung abhängen.

127) Um die Ausdrücke von Θ und Π gebrauchen zu können, müssen die von der Farbenzerstreuung abhängigen Coefficienten ε, η und θ, mithin auch die Grösse λ bekannt seyn, da jene Functionen der letzteren sind.

Wären alle farbige Strahlen von einerlei Art, so würde das Natürlichste seyn, die Grösse λ dem Quadrate der Lichtstärke der verschiedenen Strahlen gleich zu setzen, welche ich mit Λ bezeichnen werde. In Nro. 79 wurde nämlich das Quadrat des Fehlers, welcher durch einen der Strahlen hervorgebracht wird, mit Rücksicht auf die Wirksamkeit desselben, dem Producte $\lambda r'^2$ proportional gesetzt, welches sich bei jener Voraussetzung in $\Lambda^2 r'^2$ verwandelt. Hierdurch wird der Fehler selbst dem Producte $\Lambda r'$ proportional, welches der einfachste Ausdruck dafür ist, da er mit Λ und r' zugleich verschwinden und mit jeder von beiden Grössen zunehmen muss.

Diese Betrachtung giebt zu der Idee Veranlassung, auch bei den verschiedenen farbigen Strahlen

$$\lambda = \Lambda^2$$

zu setzen und die hierdurch erhaltenen Resultate mit den Beobachtungen zu vergleichen, um zu sehen, ob jene Hypothese zulässig ist.

Ich wähle hierzu die Beobachtungen von Fraunhofer, welche in den Denkschriften der Academie der Wissenschaften zu München für die Jahre 1814 und 1815, pag. 193 und in Gilberts Annalen der Physik Bd. 56, pag. 264 abgedruckt sind.

Er hat für die von ihm mit Nro. 13 bezeichnete Gattung von Flintglas die Lichtstärke an sieben Stellen des prismatischen Farbenbildes, welche durch die von ihm entdeckten Linien leicht kenntlich sind, und mit den Buchstaben *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* bezeichnet werden, sodann in dem zwischen *D* und *E* liegenden Maximum gemessen. Die folgende Tafel enthält die Resultate dieser Messungen und das arithmetische Mittel derselben, wobei die Lichtstärke im Maximum = 1 gesetzt ist

	Nummer der Beobachtung.				Licht-stärke im Mittel.
	I	II	III	IV	
B	0.0100	0.0440	0.0530	0.0200	0.0318
C	0.0480	0.0960	0.1500	0.0840	0.0945
D	0.6100	0.5900	0.7200	0.6200	0.6350
max.	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
E	0.4400	0.3800	0.6100	0.4900	0.4800
F	0.0840	0.1400	0.2500	0.1900	0.1660
G	0.0100	0.0290	0.0530	0.0320	0.0310
H	0.0011	0.0072	0.0090	0.0050	0.0056

. . (a)

Bei der folgenden Rechnung werde ich diejenige Gattung von Crownglas, welche Fraunhofer mit Nro. 13 bezeichnet, als den Körper betrachten, der zur Vergleichung der übrigen gebraucht wird, so dass $\delta\nu$ in Bezug auf jenes Glas als absolute veränderliche Grösse angesehen werden muss, von welcher sowohl die den übrigen Körpern zugehörigen $\delta\nu$, als auch die Grössen λ und Λ Functionen sind.

Nach dieser Voraussetzung bedürfen die beobachteten Werthe der Lichtstärke einer kleinen Correction, um sie von Flintglas auf Crownglas zu reduciren.

Nennt man den Winkel, welchen zwei unendlich nahe bei einander liegende Strahlen von verschiedener Tinte mit einander machen, für eine beliebige Stelle des prismatischen Farbenbildes

bei Crownglas c

bei Flintglas f

so verhält sich die Lichtstärke an jener Stelle umgekehrt wie die Winkel c und f, weil sie desto kleiner seyn muss, je grösser der Raum ist, in welchen dieselbe Menge von Licht zerstreut wird, dieser Raum aber den Winkeln c und f proportional gesetzt werden kann. Um daher die Lichtstärke von Flintglas auf Crownglas zu reduciren, ist weiter nichts erforderlich, als sie mit dem ihr zugehörigen Werthe

von $\frac{f}{c}$ zu multipliciren. Fraunhofers Beobachtungen geben die Mittel an die Hand, diesen Bruch mit hinlänglicher Genauigkeit zu berechnen. Er hat nämlich für verschiedene Gattungen von Glas die Winkel gemessen, welche die den Stellen *B*, *C*, *D* etc. zugehörigen Strahlen mit einander machen. Die Resultate in Bezug auf Crownglas Nro. 13 und Flintglas Nro. 13 sind in der folgenden Tafel enthalten, in welcher jene Winkel mit *c* und *f* bezeichnet und in Secunden ausgedrückt sind.

	Crownglas Nro. 13 *c*	Flintglas Nro. 13 *f*
BC	185″.0	196″.0
CD	494.4	544.2
DE	628.2	710.0
EF	550.0	633.9
FG	1034.8	1223.9
GH	888.4	1098.0

. (b)

Nimmt man an, dass diese Werthe von *c* und *f* dem Mittel der Bogen *BC*, *CD* etc. zugehören und berechnet daraus durch Interpolation $\frac{f}{c}$ für die Punkte *B*, *C*, *D* etc., so sind diese Grössen als die Factoren zu betrachten, mit welchen die jenen Punkten entsprechenden Lichtstärken multiplicirt werden müssen, um sie von Flintglas auf Crownglas zu reduciren. Damit jedoch der dem Maximum zugehörige Werth = 1 bleibt, dividire ich sämmtliche Lichtstärken durch denjenigen Werth von $\frac{f}{c}$, welcher sich auf das Maximum bezieht, und nehme dabei an, dass dieses um den dritten Theil des Bogens *DE* von dem Punkte *D* entfernt ist. Die folgende Tafel enthält die hiernach reducirten Werthe von Λ

	Lichtstärke auf Crownglas Nro. 13 reducirt $= \Lambda$
B	0.0297
C	0.0900
D	0.6297
max.	1.0000
E	0.4881
F	0.1719
G	0.0334
H	0.0063

. (c)

Da Λ als eine Function von $\delta\nu$ betrachtet wird, welche an den beiden Grenzen des prismatischen Farbenbildes verschwinden muss,

so ist es erforderlich, die Brechungsverhältnisse zu kennen, welche nicht nur den Punkten *B*, *C*, *D* etc., sondern auch den Grenzen des Farbenbildes entsprechen. Die ersteren sind bereits von Fraunhofer berechnet, die letzteren dagegen nicht angegeben und wegen der Schwäche des Lichtes an diesen Stellen sehr unsicher; die folgende Methode zu ihrer Bestimmung mag daher für den vorliegenden Zweck genügen.

Ich bezeichne die Grenze des prismatischen Farbenbildes
nach der Seite der rothen Strahlen mit *A*
nach der Seite der violetten Strahlen mit *J*.

Nach der Figur, welche sich bei der ersten der allegirten Abhandlungen befindet, bestimme ich die Bogen *AB* und *HJ*, reducire dieselben nach der oben angegebenen Methode auf Crownglas und berechne sodann die ihnen correspondirenden Unterschiede zwischen den Brechungsverhältnissen der Punkte *A* und *B* und der Punkte *H* und *J*. Dieses kann sehr leicht vermittelst der bekannten Brechungsverhältnisse geschehen, die den Punkten *B*, *C*, *D* etc. zugehören, indem ohne merklichen Fehler die Unterschiede der Brechungsverhältnisse den Unterschieden der Bogen proportional sind. Die folgende Tafel enthält die hiernach gefundenen Werthe des Brechungsverhältnisses $(\nu + \delta\nu)$ an den verschiedenen Punkten des prismatischen Farbenbildes für Crownglas Nro. 13

	Brechungsverhältniss für Crownglas Nro. 13 $= \nu + \delta\nu$
Grenze *A*	1.522322
B	1.524312
C	1.525299
D	1.527982
E	1.531372
F	1.534337
G	1.539908
H	1.544684
Grenze *J*	1.548844

. (d)

Wäre das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles $= \nu$ bekannt, so hätte man dasselbe nur von den in der vorhergehenden Tafel enthaltenen Werthen von $(\nu + \delta\nu)$ abzuziehen, um die correspondirenden Werthe von $\delta\nu$ zu erhalten. Da aber ν zuerst durch diese Rechnung bestimmt werden soll, so zähle ich einstweilen die $\delta\nu$ von einem nach Willkühr angenommenen Strahle an und drücke sie in Einheiten der zweiten Decimalstelle aus, um während der Rechnung die vielen Decimalstellen zu vermeiden, welche sonst ent-

stehen, indem dieselben bei den zuletzt erhaltenen Resultaten leicht wieder hergestellt werden können. Bezeichnet man daher mit

x den auf diese Art berechneten Werth von $\delta\nu$,

ν' das Brechungsverhältniss des nach Willkühr angenommenen Strahles,

$(\nu' + \delta\nu')$ das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles,

so ist

$$\nu' + \delta\nu' = \nu + \delta\nu$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \delta\nu' &= \nu + \delta\nu - \nu' \\ x &= 100\,\delta\nu' \\ &= 100\,(\nu + \delta\nu - \nu') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Denkt man sich die den verschiedenen farbigen Strahlen entsprechenden Werthe von x als Abscissen, die correspondirenden Werthe von Λ als Ordinaten aufgetragen und ihre Endpunkte mit einer krummen Linie verbunden, so stellt diese die Lichtstärke in allen Punkten des prismatischen Farbenbildes dar.

Um die in den Ausdrücken der Coefficienten δ_m angedeuteten Integrationen ausführen zu können, ist es erforderlich, Λ in Function von x auszudrücken, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung der angegebenen krummen Linie zu finden. Da aber der eigentliche analytische Ausdruck von Λ nicht bekannt ist, so suche ich diesen Zweck durch experimentelle Formeln zu erreichen, indem ich das prismatische Farbenbild in mehrere Theilen theile und für jeden derselben eine besondere Formel annehme, welche die beobachteten Werthe von Λ so genau darstellt, als es die Genauigkeit der Beobachtungen erfordert. Da jedoch in den Integralen Λ^2 statt λ genommen werden soll, so ist es zur Erleichterung der Integration zweckmässig, den experimentellen Formeln eine solche Gestalt zu geben, dass der Ausdruck von Λ^2 so einfach als möglich wird.

Bezeichnen wir durch

x_1 die Abscisse des Punktes *A* oder der Grenze des Farbenbildes nach der Seite der rothen Strahlen,

x_4 die Abscisse des Punktes *J* oder der Grenze des Farbenbildes nach der Seite der violetten Strahlen,

so werden die beobachteten Lichtstärken mit hinlänglicher Genauigkeit durch die beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^2 &= A_1\,(x - x_1)^6 \\ \Lambda^2 &= A_2\,(x_4 - x)^{\frac{9}{2}} + A_3\,(x_4 - x)^{13} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

dargestellt, wenn wir die erste von *A* bis *D*, die zweite von *E* bis *J* gebrauchen und den Coefficienten die folgenden Werthe geben:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 3.4783 \\ A_2 &= 0.0019024 \\ A_3 &= 0.00015250 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Die Vergleichung der hiernach berechneten Werthe von λ mit den beobachteten ist in der folgenden Tafel enthalten:

	$\nu + \delta\nu$	$x - x_1$	$x_4 - x$	λ berechnet	λ beobachtet	Diff.
A	1.522322	0.	—	0.	0.	—
B	1.524312	0.1990	—	0.0274	0.0297	— 0.0023
C	1.525299	0.2977	—	0.0918	0.0900	+ 18
D	1.527982	0.5660	—	0.6307	0.6297	+ 10
E	1.531372	—	1.7472	0.4889	0.4881	+ 08
F	1.534337	—	1.4507	0.1714	0.1719	— 05
G	1.539908	—	0.8936	0.0344	0.0334	+ 10
H	1.544684	—	0.4160	0.0061	0.0063	— 02
J	1.548844	—	0.	0.	0.	—

(h)

Die Unterschiede, welche zwischen den in der Tafel (a) angegebenen vier Reihen von Beobachtungen stattfinden, zeigen, dass die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Werthen von λ bei weitem innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Es ist daher zwecklos, die Genauigkeit der experimentellen Formeln weiter zu treiben, was übrigens keinen Schwierigkeiten unterliegt, wenn man für λ^2 Ausdrücke von den Formen

$$\lambda^2 = A(x - x_1)^a + B(x - x_1)^b$$
$$\lambda^2 = C(x_4 - x)^c + D(x_4 - x)^d$$

annimmt und die unbestimmten Coefficienten und Exponenten so bestimmt, dass die Formeln die Beobachtungen genau darstellen.

Um den Zwischenraum zwischen *D* und *E* auszufüllen, könnte man eine nach der Abscissenaxe concave krumme Linie annehmen und zur Bedingung machen, dass sie die beiden durch die Gleichungen (f) bestimmten Curven berührte und den grössten Werth von $\lambda^2 = 1$ gäbe. Da aber der Bogen dieser Curve sehr klein wird, und dieselbe sehr nahe bei dem mittleren Strahle liegt, so bringt der dazu gehörige Theil des Farbenbildes nur kleine Glieder in den Integralen hervor. Es genügt daher zu dem gegenwärtigen Zwecke, wenn man die Curven (f) so weit verlängert, bis ihre Ordinaten = 1 werden, und diesen Werth in dem alsdann noch übrig bleibenden Zwischenraume beibehält.

Bezeichnen wir daher durch

x_2 denjenigen Westh von x, welcher in der ersten Gleichung (f) dem Werthe $\lambda = 1$ zugehört,

x_3 denjenigen Werth von x, welcher in der zweiten Gleichung (f) dem Werthe $\lambda = 1$ zugehört,

so wird das prismatische Farbenbild in drei Theile getheilt, in welchen λ^2 verschiedene Werthe erhält.

Der erste Theil liegt innerhalb der Grenzen

$$x = x_1 \text{ und } x = x_2$$

und es ist für denselben

$$\Lambda^2 = A_1 (x - x_1)^6$$

Für den zweiten Theil sind die Grenzen $x = x_2$ und $x = x_3$ und es ist beständig

$$\Lambda^2 = 1$$

Für den dritten Theil endlich sind die Grenzen $x = x_3$ und $x = x_4$ und

$$\Lambda^2 = A_2 (x_4 - x)^{\frac{9}{2}} + A_3 (x_4 - x)^{13}$$

Nach den in (g) angegebenen Werthen der Coefficienten ist

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 0.6600 \\ x_3 &= x_1 + 0.6920 \\ x_4 &= x_1 + 2.6520 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

128) Berechnen wir jetzt die in (c) von Nro. 79 gefundenen Coefficienten unter der Voraussetzung, dass $\delta\nu$ nicht von dem mittleren, sondern von einem nach Willkühr angenommenen Strahle des Farbenbildes an gezählt wird. In diesem Falle ist der m^{te} jener Coefficienten, wenn er mit einem Accente bezeichnet wird,

$$\delta'_m = \int \lambda\, \delta\nu'^m\, d\,\delta\nu'$$

Es ist aber vermöge (e) der vorhergehenden Nummer

$$\delta\nu' = \frac{x}{100}$$

folglich

$$\delta'_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \int \lambda\, x^m\, dx \quad \ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Nehmen wir statt λ den durch die experimentellen Formeln gegebenen Werth von Λ^2, so muss das Integral in drei Theile getheilt und jeder derselben innerhalb der Grenzen genommen werden, innerhalb welcher der jedesmalige Ausdruck von Λ^2 gültig ist. Hierdurch wird

$$\delta'_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} A_1 (x - x_1)^6 x^m\, dx \\ &+ \int_{x_2}^{x_3} x^m\, dx \\ &+ \int_{x_3}^{x_4} A_2 (x_4 - x)^{\frac{9}{2}} x^m\, dx \\ &+ \int_{x_3}^{x_4} A_3 (x_4 - x)^{13} x^m\, dx \end{aligned} \right\} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

Um die hierin enthaltenen Integrale auf eine zur Rechnung bequeme Weise auszudrücken, betrachte ich das Integral

$$\int A_1 (x - x_1)^p\, x^m\, dx$$

und nehme an, dass dasselbe durch den folgenden Ausdruck gegeben sey:

$$\int A_1 (x-x_1)^p x^m dx =$$

$$= A_1 (x-x_1)^{p+1} x^m \left\{ \begin{array}{l} C_0^{(p,m)} \left(\frac{x}{x_1}\right)^m + \\ \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x}{x_1}\right)^{m-r} \ldots\ldots \end{array} \right\} \quad . \text{(c)}$$

wobei $C_0^{(p,m)} \ldots C_r^{(p,m)}$ unbestimmte Coefficienten bezeichnen. Der obere Index derselben (p, m) giebt an, dass in der Integralformel die p^{te} Potenz von $(x-x_1)$ und die m^{te} Potenz von x vorkommen, der untere Index dagegen bezieht sich auf die Stelle, welche das Glied in der angenommenen Reihe hat.

Differentiirt man diesen Ausdruck, dividirt ihn sodann durch $A_1 (x-x_1)^p dx$ und behält bloss das erste und das allgemeine Glied bei, so entsteht daraus die Gleichung

$$x^m = x_1^m \left\{ \begin{array}{l} (p+m+1)\, C_0^{(p,m)} \left(\frac{x}{x_1}\right)^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + [(p+m+1-r)\, C_r^{(p,m)} - (m-r+1)\, C_{r-1}^{(p,m)}] \left(\frac{x}{x_1}\right)^{m-r} \ldots \end{array} \right\} . \text{(d)}$$

welche zur Bestimmung der Coefficienten dient. Sie giebt

$$\begin{array}{l} 1 = (p+m+1)\, C_0^{(p,m)} \\ \vdots \\ 0 = (p+m+1-r)\, C_r^{(p,m)} - (m-r+1)\, C_{r-1}^{(p,m)} \end{array}$$

folglich

$$\left. \begin{array}{l} C_0^{(p,m)} = \dfrac{1}{p+m+1} \\ \vdots \\ C_r^{(p,m)} = \dfrac{(m-r+1)\, C_{r-1}^{(p,m)}}{p+m+1-r} \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

woraus durch fortgesetzte Substitution die folgenden Werthe der Coefficienten erhalten werden:

$$\left. \begin{array}{l} C_0^{(p,m)} = \dfrac{1}{p+m+1} \\ C_1^{(p,m)} = \dfrac{m}{(p+m+1)(p+m)} \\ \vdots \\ C_r^{(p,m)} = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{(p+m+1)(p+m)\ldots(p+m+1-r)} \\ \vdots \\ C_m^{(p,m)} = \dfrac{m(m-1)\ldots 2.1}{(p+m+1)(p+m)\ldots(p+1)} \end{array} \right\} . \text{(f)}$$

Die folgenden Glieder fallen weg.

Nehmen wir nun das Integral innerhalb der Grenzen $x = x_1$ und $x = x_2$, so wird

$$\int_{x_1}^{x_2} A_1 (x-x_1)^p x^m dx =$$

$$= A_1 (x_2-x_1)^{p+1} x_1^m \left[C_0^{(p,m)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m-r} \ldots + C_m^{(p,m)} \right] . \text{(g)}$$

Die zwei letzten Integrale, welche in dem Ausdrucke von δ'_m vorkommen, sind unter der Form

$$\int A_q (x_4 - x)^p x^m dx$$

begriffen. Nimmt man hierfür den Ausdruck an:

$$\int A_q (x_4 - x)^p x^m dx =$$

$$= -A_q (x_4 - x)^{p+1} x_4^m \left[C_0^{(p,m)} \left(\frac{x}{x_4}\right)^m \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x}{x_4}\right)^{m-r} \ldots \right] . \text{(h)}$$

so giebt derselbe, wenn er auf ähnliche Weise, wie der Ausdruck (c) behandelt wird, zur Bestimmung der Coefficienten eine Gleichung, welche sich von (d) nur dadurch unterscheidet, dass x_1 mit x_4 verwechselt ist. Die Coefficienten $C_0^{(p,m)} \ldots C_r^{(p,m)}$ erhalten in beiden Fällen einerlei Werthe.

Innerhalb der Grenzen $x = x_3$ und $x = x_4$ genommen, giebt nunmehr das Integral (h)

$$\int_{x_3}^{x_4} A_q (x_4 - x)^p x^m dx =$$

$$= A_q (x_4 - x_3)^{p+1} x_4^m \left[C_0^{(p,m)} \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^m \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^{m-r} \ldots + C_m^{(p,m)} \right] \text{(i)}$$

Setzen wir daher zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} D^{(p,m)} &= C_0^{(p,m)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m-r} \ldots + C_m^{(p,m)} \\ E^{(p,m)} &= C_0^{(p,m)} \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^m \ldots + C_r^{(p,m)} \left(\frac{x_3}{x_4}\right)^{m-r} \ldots + C_m^{(p,m)} \end{aligned} \right\} . \text{(k)}$$

so nehmen die beiden vorhergehenden Integrale die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} A_1 (x - x_1)^p x^m dx &= D^{(p,m)} A_1 (x_2 - x_1)^{p+1} x_1^m \\ \int_{x_3}^{x_4} A_q (x_4 - x)^p x^m dx &= E^{(p,m)} A_q (x_4 - x_3)^{p+1} x_4^m \end{aligned} \right\} . \text{(l)}$$

Da die Grössen $D^{(p,m)}$ und $E^{(p,m)}$ für mehrere auf einander folgende Werthe von m berechnet werden müssen, so ist es bequemer, die Formeln so umzuändern, dass jedesmal die folgende aus der vorhergehenden berechnet werden kann. Es ist

$$D^{(p,m+1)} = C_0^{(p,m+1)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m+1}$$

$$+ C_1^{(p,m+1)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^m \ldots + C_{r+1}^{(p,m+1)} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m-r} \ldots + C_{m+1}^{(p,m+1)}$$

Nach den oben angegebenen Werthen der Coefficienten ist aber allgemein

$$C_{r+1}^{(p,m+1)} = \frac{(m+1)\, m\, (m-1) \ldots (m-r+1)}{(p+m+2)(p+m+1) \ldots (p+m+1-r)}$$

$$C_r^{(p,m)} = \frac{m\, (m-1) \ldots (m-r+1)}{(p+m+1) \ldots (p+m+1-r)}$$

folglich

$$C_{r+1}^{(p,m+1)} = \frac{(m+1)\,C_r^{(p,m)}}{p+m+2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (m)$$

Ausserdem ist

$$C_0^{(p,m+1)} = \frac{1}{p+m+2}$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von $D^{(p,m+1)}$ in den folgenden:

$$D^{(p,m+1)} = \frac{1}{(p+m+2)}\left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{m+1} + (m+1)\,D^{(p,m)}\right] \quad . \quad (n)$$

Ebenso ist

$$E^{(p,m+1)} = \frac{1}{(p+m+2)}\left[\left(\frac{x_3}{x_4}\right)^{m+1} + (m+1)\,E^{(p,m)}\right] \quad . \quad (o)$$

Da nun

$$D^{(p,0)} = E^{(p,0)} = C_0^{(p,0)} = \frac{1}{p+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (p)$$

ist, so können die Werthe von $D^{(p,m)}$ und $E^{(p,m)}$ für die auf einander folgenden Werthe von m vermittelst der vorhergehenden Formeln sehr leicht berechnet werden.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, in den Integralen (l) statt p und q diejenigen Werthe zu nehmen, welche in dem Ausdrucke (b) von δ'_m vorkommen, sie in demselben zu substituiren und die Integration des zweiten Gliedes auszuführen. Bemerkt man, dass $A_1\,(x_2 - x_1)^6$ der der Abscisse x_2 entsprechende Werth von λ^2, mithin $= 1$ ist, so wird

$$\delta'_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \left\{ \begin{array}{l} D^{(6,m)}\,(x_2 - x_1)\,x_1^m \\ + \left(\dfrac{1}{m+1}\right)(x_3^{m+1} - x_2^{m+1}) \\ + E^{(\frac{9}{2},m)}\,A_2\,(x_4 - x_3)^{\frac{11}{2}}\,x_4^m \\ + E^{(13,m)}\,A_3\,(x_4 - x_3)^{14}\,x_4^m \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \quad (q)$$

129) Nachdem auf diese Weise die von der Farbenzerstreuung abhängigen Coefficienten gefunden worden sind, können wir die Lage des mittleren Strahles berechnen. Sie wurde in Nro. 79 durch die Bedingung bestimmt, dass $\delta_1 = 0$ seyn sollte, vorausgesetzt, dass alle $\delta\nu$ von dem mittleren Strahle an gezählt werden. Dieses ist jedoch bei δ'_m nicht der Fall, indem hierbei ein nach Willkühr angenommener Strahl als Ursprung der $\delta\nu$ gebraucht wird. Es ist daher nothwendig, δ_m durch δ'_m auszudrücken. Nach (a) der vorhergehenden Nummer ist

$$\delta'_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \int \lambda\, x^m\, dx$$

Von diesem Ausdrucke können wir sogleich zu dem von δ_m übergehen, wenn wir den Ursprung der x von dem nach Willkühr angenommenen Strahle in den mittleren Strahl verlegen. Nennen wir daher

x' den dem mittleren Strahle entsprechenden Werth von x,

so muss in dem vorhergehenden Ausdrucke x mit $(x - x')$ verwechselt werden, um von δ'_m auf δ_m überzugehen. Diess giebt

$$\delta_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \int \lambda (x - x')^m \, dx \ \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

Entwickelt man $(x - x')^m$ nach dem binomischen Lehrsatze und bezeichnet durch

$B_r^{(m)}$ den r^{ten} Binomialcoefficienten der m^{ten} Potenz, so wird

$$\left.\begin{aligned} \delta_m &= \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \int \lambda \left[x^m \ldots \pm B_r^{(m)} x^{m-r} x'^r \ldots\right] dx \\ &= \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \left[\int \lambda x^m \, dx \ldots \pm B_r^{(m)} x'^r \int \lambda x^{m-r} \, dx \ldots\right] \\ &= \delta'_m \ldots \pm B_r^{(m)} \left(\frac{x'}{100}\right)^r \delta'_{m-r} \ldots \ldots \end{aligned}\right\} . \quad (b)$$

Diese Formel auf den ersten Coefficienten angewandt, giebt

$$\delta_1 = \delta'_1 - \frac{x' \delta'_0}{100}$$

Da nun $\delta_1 = 0$ seyn soll, so hat man zur Bestimmung von x' die Gleichung

$$0 = \delta'_1 - \frac{x' \delta'_0}{100}$$

Sie giebt

$$x' = \frac{100 \, \delta'_1}{\delta'_0} \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

und den dem mittleren Strahle entsprechenden Werth von $\delta \nu'$, welchen ich mit $\delta \nu''$ bezeichne, durch den Ausdruck

$$\delta \nu'' = \frac{x'}{100} = \frac{\delta'_1}{\delta'_0} \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

Dieselben Ausdrücke von x' und $\delta \nu''$ würde man erhalten, wenn man eine krumme Linie construirte, deren Abscisse = x oder $\delta \nu'$ und deren Ordinate = λ wäre, und dann die Abscisse x' oder $\delta \nu''$ suchte, welche dem Schwerpunkte der durch die krumme Linie und die Abscissenaxe begrenzten Fläche zugehört. Der mittlere Strahl ist daher derjenige, welcher jenem Schwerpunkte entspricht.

130) Führt man die Rechnung nach den vorhergehenden Formeln aus, indem man den Ursprung der x in den Punkt A legt, so ist

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.6600 \\ x_3 &= 0.6920 \\ x_4 &= 2.6520 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Das erste Glied von δ'_m muss in diesem Falle auf eine andere Art ausgedrückt werden, da $D^{(6,m)} = \infty$ wird, wenn $x_1 = 0$ ist. Für diesen Werth von x_1 ist aber

$$D^{(6,m)} x_1^m = C_0^{(6,m)} x_2^m = \frac{x_2^m}{7+m}$$

Hierdurch wird

$$\delta'_0 = 0.0027480$$
$$\delta'_1 = 0.000020064$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0.7301 \\ \delta\nu'' &= 0.007301 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Nach der Tafel (d) von Nro. 127 ist das dem Punkte A entsprechende Brechungsverhältniss

$$\nu' = 1.522322$$

mithin das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles =

$$\nu = \nu' + \delta\nu'' = 1.529623 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Da jetzt die Lage des mittleren Strahles bekannt ist, so können wir die übrigen von der Farbenzerstreuung abhängigen Coefficienten berechnen.

Der für δ'_m gefundene Ausdruck (q) von Nro. 128 giebt die Werthe der Coefficienten δ_m, wenn darin der Ursprung der x in den mittleren Strahl verlegt, d. h. x mit $(x - x')$ verwechselt wird.

In Bezug auf diesen neuen Ursprung erhalten wir daher durch die in (a) und (b) gefundenen Werthe

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\,0.7301 \\ x_2 &= -\,0.0701 \\ x_3 &= -\,0.0381 \\ x_4 &= +\,1.9219 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

sodann vermittelst der allegirten Formel

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &= 0.002748 \\ \delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= 0.000000007859 \\ \delta_3 &= 0.00000000001741 \\ \delta_4 &= 0.0000000000001666 \\ \delta_5 &= 0.000000000000001138 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

und hierdurch nach (h) von Nro. 80

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= 0.000002860 \\ \eta &= 0.002215 \\ \theta &= 0.00000000003842 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

131) In Nro. 17 wurde angenommen, dass, in Bezug auf einen beliebigen mit dem Index i bezeichneten brechenden Körper, $\delta\nu_i$ eine Function von dem als absolute veränderliche Grösse betrachteten $\delta\nu$ sey, welche wegen der Kleinheit von $\delta\nu$ in eine Reihe von der Form

$$\delta\nu_i = \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 \text{ etc.}$$

entwickelt werden könne.

Hierbei bezeichnen α_i, β_i etc. Coefficienten, welche von der Natur des brechenden Körpers abhängen, für alle farbige Strahlen aber einerlei sind. Da nun das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles ν_i genannt wurde, so ist das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles =

$$\nu_i + \delta\nu_i = \nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Die folgenden Glieder dieser Reihe wurden vernachlässigt, weil die Rechnung überhaupt nur bis zum Quadrate von $\delta\nu$ fortgesetzt wurde.

In Bezug auf denjenigen Körper, welcher zur Vergleichung der übrigen dienen soll, ist nach der angenommenen Bezeichnung

das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles = ν,
das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles = $\nu + \delta\nu$.

Ist nun bei dem letzteren Körper die Lage des mittleren Strahles, mithin ν, bekannt und hat man bei beiden Körpern die Brechungsverhältnisse $(\nu_i + \delta\nu_i)$ und $(\nu + \delta\nu)$, welche einerlei Farbentinte entsprechen, an verschiedenen Slellen des prismatischen Farbenbildes beobachtet, so ist für jede dieser Beobachtungen $\delta\nu$ bekannt; der Ausdruck (a) enthält daher nur die unbekannten Grössen ν_i, α_i und β_i, welche dadurch bestimmt werden können, wenn wenigstens drei Paare von Beobachtungen vorhanden sind.

Bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungen findet man jene Grössen am sichersten durch die Methode der kleinsten Quadrate. Wird nämlich das beobachtete Brechungsverhältniss $(\nu_i + \delta\nu_i)$ durch N_i bezeichnet, so ist der Beobachtungsfehler =

$$\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 - N_i$$

und die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler =

$$\Sigma\,[\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 - N_i]^2$$

wobei sich das Summationszeichen auf die verschiedenen Beobachtungen bezieht.

Damit dieser Ausdruck ein Minimum wird, müssen die Differentialcoefficienten in Bezug auf die zu bestimmenden Grössen ν_i, α_i und β_i = 0 gesetzt werden, wodurch die drei Gleichungen entstehen

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\quad&[\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 - N_i] = 0\\ \Sigma\,\delta\nu\ &[\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 - N_i] = 0\\ \Sigma\,\delta\nu^2&[\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 - N_i] = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt die wahrscheinlichsten Werthe der Grössen ν_i, α_i und β_i.

Zur Vermeidung der vielen Decimalstellen, welche die numerische Rechnung nach den vorhergehenden Formeln mit sich bringt, kann man die ersten Ziffern von ν_i und N_i, welche bei allen Beobachtungen einerlei sind, weglassen, indem es bloss auf den Unterschied beider Grössen ankommt. Bezeichnet man diese Ziffern mit $\mathfrak{N}$ und substituirt ausserdem statt $\delta\nu$ den oben angenommenen Werth

$$\delta\nu = \frac{x}{100}$$

so nehmen die drei Gleichungen (b) die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\ \ &\left[100(\nu_i-\mathfrak{N})+\alpha_i x+\frac{\beta_i}{100}x^2-100(N_i-\mathfrak{N})\right]=0\\ \Sigma x\ &\left[100(\nu_i-\mathfrak{N})+\alpha_i x+\frac{\beta_i}{100}x^2-100(N_i-\mathfrak{N})\right]=0\\ \Sigma x^2&\left[100(\nu_i-\mathfrak{N})+\alpha_i x+\frac{\beta_i}{100}x^2-100(N_i-\mathfrak{N})\right]=0\end{aligned}\right\}.\text{(c)}$$

worin nunmehr

$$100(\nu_i-\mathfrak{N}),\ \alpha_i \text{ und } \frac{\beta_i}{100}$$

als die unbekannten Grössen angesehen werden können.

Ich führe diese Rechnung nur für diejenige Gatttung von Flintglas aus, welche Fraunhofer mit Nro. 30 bezeichnet, und nehme dabei das Crwonglas Nro. 13, so wie es oben geschehen ist, als denjenigen brechenden Körper an, der zur Vergleichung der übrigen dient. Die von Fraunhofer beobachteten Brechungsverhältnisse von beiden Glasarten an den mit *B*, *C*, *D* etc. bezeichneten Stellen des Farbenbildes sind in der folgenden Tafel enthalten:

	Brechungsverhältniss für	
	Crownglas Nro. 13 $= \nu + \delta\nu$	Flintglas Nro. 30 $= N_i$
B	1.524312	1.623570
C	1.525299	1.625477
D	1.527982	1.630585
E	1.531372	1.637356
F	1.534337	1.643466
G	1.539908	1.655406
H	1.544684	1.666072

. . . . (d)

In (c) der vorhergehenden Nummer wurde gefunden

$$\nu = 1.529623 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Setzen wir ausserdem

$$\mathfrak{N} = 1.6 \quad \ldots\ldots \quad (f)$$

so erhalten wir die folgenden Werthe der zur Rechnung erforderlichen Grössen:

	x	$100\,(N_i - \mathfrak{N})$
B	− 0.5311	2.3570
C	− 0.4324	2.5477
D	− 0.1641	3.0585
E	+ 0.1749	3.7356
F	+ 0.4714	4.3466
G	+ 1.0285	5.5406
H	+ 1.5061	6.6072

. . . . (g)

Hierdurch geben die Gleichungen (c)

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &= 1.6338586 \\ \alpha_i &= 1.98954 \\ \beta_i &= 9.9876 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (h)$$

Um zu untersuchen, wie genau die Formel (a) die Beobachtungen darstellt, lege ich die in der Tafel (d) angegebenen Brechungsverhältnisse des Crownglases zu Grunde und berechne daraus vermittelst jener Formel und der vorhergehenden Werthe von ν, ν_i, α_i und β_i die correspondirenden Brechungsverhältnisse des Flintglases.

Die folgende Tafel enthält die Vergleichung der so gefundenen Resultate mit den Beobachtungen:

	Brechungsverhältniss des Flintglases		Diff.
	berechnet $= \nu_i + \delta\nu_i$	beobachtet $= N_i$	
B	1.623574	1.623570	+ 0.000004
C	1.625443	1.625477	— 34
D	1.630621	1.630585	+ 36
E	1.637369	1.637356	+ 13
F	1.643459	1.643466	— 7
G	1.655378	1.655406	— 28
H	1.666089	1.666072	+ 17

. . (i)

Die Beobachtungen, welche Fraunhofer an zwei Prismen von einerlei Glasart, (Flintglas Nro. 23) mit verschiedenen brechenden Winkeln angestellt hat, geben ähnliche Unterschiede, wie die in der vorhergehenden Tafel enthaltenen, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist:

	Brechungsverhältniss nach dem		Diff.
	Prisma von 60°	Prisma von 45°	
B	1.626596	1.626564	+ 0.000032
C	1.628469	1.628451	+ 18
D	1.633667	1.633666	+ 1
E	1.640495	1.640544	— 49
F	1.646756	1.646780	— 24
G	1.658848	1.658849	— 1
H	1.669686	1.669680	+ 6

. . (k)

Die Formel (a) stellt daher die Beobachtungen so genau dar, dass es unnütz seyn würde, noch mehrere Glieder der Reihe beizubehalten, selbst in dem Falle, wenn die hier vernachlässigten höheren Potenzen von $\delta\nu$ berücksichtigt werden sollten.

Bei der vorhergehenden Rechnung wurden $\delta\nu$ und $\delta\nu_i$ vom mittleren Strahle an gezählt; es kann jedoch auch ein anderer beliebiger Strahl als Ursprung angenommen werden, und es ist leicht, die bei der einen Voraussetzung gefundenen Resultate auf die andere zu reduciren.

Behalten wir die bisherigen Bezeichnungen bei, wenn der mittlere Strahl als Ursprung angenommen wird, accentuiren dagegen alle Buchstaben, wenn wir einen anderen beliebigen Strahl hierzu wählen, so ist das Brechungsverhältniss des allgemeinen farbigen Strahles im ersten Falle

$$\nu_i + \delta\nu_i = \nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 \quad \text{(l)}$$

im zweiten Falle

$$\nu_i' + \delta\nu_i' = \nu_i' + \alpha_i'\,\delta\nu' + \beta_i'\,\delta\nu'^2 \quad \text{(m)}$$

Da nun jener Strahl in beiden Fällen derselbe ist, mithin einerlei Brechungsverhältniss, sowohl in Bezug auf denjenigen Körper, welcher zur Vergleichung der übrigen dient, als auch auf den mit dem Index *i* bezeichneten hat, so ist

$$\nu + \delta\nu = \nu' + \delta\nu'$$

$$\nu_i + \delta\nu_i = \nu_i' + \delta\nu_i'$$

Die erste dieser Gleichungen giebt

$$\delta\nu' = (\nu - \nu') + \delta\nu$$

die letzte dagegen giebt, wenn statt $(\nu_i + \delta\nu_i)$ und $(\nu_i' + \delta\nu_i')$ die obigen Werthe substituirt werden,

$$\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 = \nu_i' + \alpha_i'\,\delta\nu' + \beta_i'\,\delta\nu'^2$$

Substituiren wir hierin statt $\delta\nu'$ den vorhergehenden Werth, so wird

$$\begin{aligned}\nu_i + \alpha_i\,\delta\nu + \beta_i\,\delta\nu^2 = {} & \nu_i' + \alpha_i'(\nu - \nu') + \beta_i'(\nu - \nu')^2 \\ & + [\alpha_i' + 2\beta_i'(\nu - \nu')]\,\delta\nu \\ & + \beta_i'\,\delta\nu^2\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch die Vergleichung der Glieder, welche einerlei Potenzen von $\delta \nu$ enthalten:

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &= \nu'_i + \alpha'_i (\nu - \nu') + \beta'_i (\nu - \nu')^2 \\ \alpha_i &= \alpha'_i + 2\beta'_i (\nu - \nu') \\ \beta_i &= \beta'_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

Da die Ausdrücke (l) und (m) in Bezug auf die accentuirten und nicht accentuirten Buchstaben symmetrisch sind, so geben die vorhergehenden Formeln durch Verwechselung von beiderlei Buchstaben auch umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} \nu'_i &= \nu_i + \alpha_i (\nu' - \nu) + \beta_i (\nu' - \nu)^2 \\ \alpha'_i &= \alpha_i + 2\beta_i (\nu' - \nu) \\ \beta'_i &= \beta_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

wodurch die bei einer Voraussetzung gefundenen Resultate leicht auf die andere zurückgeführt werden können.

132) Nach Nro. 96 ist das zur Berechnung der Instrumente corrigirte Zerstreuungsverhältniss durch den Ausdruck gegeben:

$$\sigma_i = \alpha_i + \eta \beta_i$$

Substituirt man hierin statt η, α_i und β_i die oben gefundenen Werthe, so wird das Zerstreuungsverhältniss für das Fraunhoferische Flintglas Nro. 30:

$$\sigma_i = 2.01167$$

wobei das Zerstreuungsverhältniss des Crownglases Nro. 13 als Einheit angenommen ist.

Dagegen findet Fraunhofer durch Erfahrung, dass die aus den genannten Glasarten construirten Objective dann am besten werden, wenn

$$\sigma_i = 1.98$$

angenommen wird.

Sieht man dieses von Fraunhofer gefundene Resultat als genau an, so folgt daraus, dass die Gewichte nach der violetten Seite des prismatischen Farbenbildes mehr abnehmen müssen, als bei der vorhergehenden Rechnung vorausgesetzt wurde.

Wir können zu diesem Zwecke gelangen, wenn wir den bisher gebrauchten Werth von $\lambda = \Lambda^2$ mit einem Factor multipliciren, welcher von der rothen Seite des Farbenbildes bis zu der violetten beständig abnimmt und als eine Function des Brechungsverhältnisses der verschiedenen farbigen Strahlen zu betrachten ist. Untersuchen wir daher, welche Aenderung hierdurch in den bisher gefundenen Resultaten entsteht.

Da derjenige Strahl, welcher bei der bisherigen Rechnung als der mittlere angesehen wurde, nun nicht mehr der mittlere ist, indem er der Bedingung $\delta_1 = 0$ nicht entspricht, sobald statt λ eine andere Function angenommen wird, so ist ebenso wie in (a) von Nro. 129

$$\delta_m = \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} \int \lambda (x - x')^m \, dx$$

wobei der Ursprung der x in dem bisherigen mittleren Strahle liegt und x' denjenigen Werth von x bezeichnet, welcher dem neuen mittleren Strahle entspricht

Multipliciren wir nun den bisherigen Werth von λ mit einem veränderlichen Factor, wozu ich eine ganze rationale Function von x von der Form

$$C_0 \ldots . + C_r \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots . \qquad \text{(a)}$$

wähle, so wird

$$\delta_m = \left(\frac{1}{100}\right) \int \lambda \left(\frac{x - x'}{100}\right)^m \left[C_0 \ldots . + C_r \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots .\right] dx \,. \qquad \text{(b)}$$

Das Product

$$\left(\frac{x - x'}{100}\right)^m \left[C_0 \ldots . + C_r \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots .\right]$$

giebt entwickelt eine ganze rationale Function von x, für welche ich die Gestalt annehme:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{x - x'}{100}\right)^m \left[C_0 \ldots . + C_r \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots .\right] &= \\ = D_0^{(m)} \ldots . + D_r^{(m)} \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots \ldots &\end{aligned}\right\} \qquad \text{(c)}$$

folglich, wenn dieser Werth in dem vorhergehenden Ausdrucke von δ_m substituirt wird,

$$\delta_m = \frac{1}{100} D_0^{(m)} \int \lambda \, dx \ldots . + \left(\frac{1}{100}\right)^{r+1} D_r^{(m)} \int \lambda \, x^r \, dx \ldots .$$

$\left(\frac{1}{100}\right)^{r+1} \int \lambda \, x^r \, dx$ ist der Werth von δ_r nach der bisherigen Annahme, welchen ich mit δ'_r bezeichne, daher ist

$$\delta_m = D_0^{(m)} \delta'_0 \ldots . + D_r^{(m)} \delta'_r \ldots . \qquad \text{(d)}$$

In diesem Ausdrucke kann das von δ'_1 abhängige Glied weggelassen werden, da die Lage des bisherigen mittleren Strahles durch die Bedingung $\delta'_1 = 0$ bestimmt wurde. Dagegen ist für den neuen mittleren Strahl $\delta_1 = 0$.

Der Ausdruck (b) giebt aber

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \left(\frac{1}{100}\right) \int \lambda \left(\frac{x - x'}{100}\right) \left[C_0 \ldots . + C_r \left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots .\right] dx \\ &= \left(\frac{1}{100}\right)^2 C_0 \int \lambda \, x \, dx \ldots . + \left(\frac{1}{100}\right)^{r+2} C_r \int \lambda \, x^{r+1} \, dx \ldots . \\ &\quad - \frac{x'}{100} \left[\frac{1}{100} C_0 \int \lambda \, dx \ldots . + \left(\frac{1}{100}\right)^{r+1} C_r \int \lambda \, x^r \, dx \ldots .\right] \\ &= C_0 \delta'_1 \ldots . + C_r \delta'_{r+1} \ldots . \\ &\quad - \frac{x'}{100} \left[C_0 \delta'_0 \ldots . + C_r \delta'_r \ldots .\right]\end{aligned}$$

Da nun $\delta_1 = \delta_1' = 0$ ist, so wird hierdurch x' bestimmt. Es ist nämlich

$$\frac{x'}{100} = \frac{C_1\,\delta_2' \ldots + C_r\,\delta_{r+1}' \ldots}{C_0\,\delta_0' \ldots + C_r\,\delta_r' \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

worauf die Coefficienten $D_0^{(m)} \ldots D_r^{(m)}$ vermittelst (c), sodann δ_m durch den Ausdruck (d) berechnet werden können.

Die Formeln (n) von Nro. 131 geben endlich, da

$$\nu - \nu' = \frac{x'}{100}$$

ist,

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &= \nu_i' + \alpha_i' \frac{x'}{100} + \beta_i' \left(\frac{x'}{100}\right)^2 \\ \alpha_i &= \alpha_i' + 2\beta_i' \frac{x'}{100} \\ \beta_i &= \beta_i' \\ \sigma_i &= \alpha_i + \eta\beta_i = \alpha_i + \frac{\delta_3}{\delta_2}\beta_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(f)}$$

Nehmen wir z. B. $\left(1 - \frac{x}{x_4}\right)^2$ als Factor an, mit welchem der bisherige Werth von λ multiplicirt werden soll, so wird

$$C_0 + \ldots + C_r\left(\frac{x}{100}\right)^r \ldots = \left(1 - \frac{x}{x_4}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0.002769 \\ \delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= 0.000000006283 \\ \delta_3 &= 0.00000000000846 \\ \frac{x'}{100} &= -0.00002784 \\ \alpha_i &= 1.98398 \\ \sigma_i &= 1.99743 \end{aligned}$$

Aus diesem Resultate ist ersichtlich, dass eine äusserst bedeutende Abnahme der Gewichte nach der violetten Seite des prismatischen Farbenbildes stattfinden müsste, wenn dadurch Fraunhofers Erfahrung Genüge geleistet werden sollte.

Farbiger Rand bei Instrumenten, welche denselben oder die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich vernichten.

133) Wir haben bereits in Nro. 89 gesehen, dass der farbige Rand wegen der in seinem Ausdrucke enthaltenen Glieder höherer Ordnungen nicht für alle farbige Strahlen zugleich gehoben werden kann, wovon eine Folge ist, dass die Gegenstände selbst bei denjenigen Instrumenten, welche denselben so vollkommen als möglich vernichten, mit schwach gefärbten Rändern erscheinen, die durch

Mischungen der von einander getrennten farbigen Strahlen hervorgebracht werden. Die Bestimmung der hieraus entstehenden Farbentinten bietet nicht nur eine interessante Vergleichung der oben entwickelten Theorie mit der Erfahrung dar, sondern sie giebt uns auch ein Mittel an die Hand, um über die grössere oder geringere Vollkommenheit der Instrumente in dieser Beziehung urtheilen zu können, wesshalb es nicht am unrechten Orte seyn wird, uns näher hiermit zu beschäftigen.

Nehmen wir zu dem Ende die Gleichung (n) von Nro. 121 wieder vor, wodurch die Aenderung bestimmt wird, welche der mit $\overset{''}{\omega}$ bezeichnete Winkel zwischen dem allgemeinen farbigen Strahle und der Axe des Instrumentes dadurch erleidet, dass sich das mittlere Brechungsverhältniss ν in $(\nu + \delta\nu)$ verwandelt. Sie ist

$$\delta tg\overset{''}{\omega} = \frac{V\varphi'}{\nu}\left[T\delta\nu + t\delta\nu^2 + W\varphi'^2\delta\nu - (u)\,\Delta\frac{1}{c_1}\,\delta\nu\right]. \quad (a)$$

Wird ferner ein Instrument mit einem gewöhnlichen achromatischen Objective vorausgesetzt, bei welchem der farbige Rand so vollkommen als möglich vernichtet ist, so findet ausserdem die Gleichung (a) von Nro. 116 statt, nämlich

$$0 = T + {}_\eta t + \frac{2}{3}W\varphi^2 - (u)\,\Delta' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Setzt man nun in der ersteren Gleichung

$$\Delta\frac{1}{c_1} = \Delta'$$

um bei ihr dieselbe Entfernung wie bei der zweiten Gleichung zu berücksichtigen, eliminirt man sodann T vermittelst der letzteren, so wird

$$\delta tg\overset{''}{\omega} = \frac{V\varphi'}{\nu}\left[t\delta\nu^2 - {}_\eta t\,\delta\nu + W\left(\varphi'^2 - \frac{2}{3}\varphi^2\right)\delta\nu\right]. \quad (c)$$

wobei sich φ auf die Grenze des Gesichtsfeldes, φ' dagegen auf einen beliebigen Punkt innerhalb desselben bezieht.

Der vorhergehende Ausdruck von $\delta tg\overset{''}{\omega}$ zeigt, dass diese Grösse von $\delta\nu$, mithin von der Farbentinte des Strahles abhängt, welchem sie zugehört. Je nachdem Vt positiv oder negativ ist, wird $\delta tg\overset{''}{\omega}$ ein Minimum oder Maximum in Bezug auf $\delta\nu$ bei derjenigen Farbentinte, für welche

$$\delta\nu = \frac{\eta}{2} - \frac{W}{2t}\left(\varphi'^2 - \frac{2}{3}\varphi^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

ist. Zählen wir daher den allgemeinen Werth von $\delta\nu$ von jenem Minimum oder Maximum an und setzen sonach

$$\delta\nu = \frac{\eta}{2} - \frac{W}{2t}\left(\varphi'^2 - \frac{2}{3}\varphi^2\right) + \delta\nu' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

so wird

$$\delta tg\overset{''}{\omega} = \frac{V\varphi'}{\nu}\left\{-\left[\frac{\eta}{2} - \frac{W}{2t}\left(\varphi'^2 - \frac{2}{3}\varphi^2\right)\right]^2 + t\delta\nu'^2\right\}. \quad (f)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass $\delta tg \ddot{\omega}$ für gleiche und entgegengesetzte Werthe von $\delta\nu'$ einerlei wird, daher je zwei farbige Strahlen zusammenfallen, welche im Spectrum gleichweit von dem, dem Minimum oder Maximum entsprechenden Strahle entfernt sind und auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen.

Betrachten wir insbesondere denjenigen Punkt des Gesichtsfeldes, für welchen

$$\varphi' = \varphi\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

und bei dem der farbige Rand am vollkommensten gehoben ist. In Bezug auf diesen Punkt ist das dem Minimum oder Maximum entsprechende Brechungsverhältniss =

$$\nu + \delta\nu = \nu + \frac{\eta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

ferner die Brechungsverhältnisse zweier im farbigen Rande zusammenfallenden Strahlen

$$\nu + \delta\nu = \nu + \frac{\eta}{2} \pm \delta\nu' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

und der ihnen entsprechende Werth von $\delta tg \ddot{\omega}$ =

$$\delta tg \ddot{\omega} = \frac{V\varphi}{\nu}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[-\frac{\eta^2}{4} + t\delta\nu'^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (k)$$

Da ν das Brechungsverhältniss des mittleren Strahles bezeichnet, so ist nach den in (c) und (f) von Nro. 130 gefundenen Werthen

$$\nu + \frac{\eta}{2} = 1.530730$$

welchem Brechungsverhältnisse im Spectrum die grüne Farbe zugehört. Nehmen wir sodann statt $\pm\,\delta\nu'$ die den sieben Hauptfarben correspondirenden Werthe, so finden wir, dass die in der nachfolgenden Tafel unter einander stehenden farbigen Strahlen zusammenfallen

grün	gelb	orange	roth	
	bläulich-grün	blau	indigo	violett

Da eine Mischung von gelb und bläulichgrün eine grüne Farbe hervorbringt, eine Mischung von roth und indigo dagegen eine violette, so ist aus der vorhergehenden Tafel ersichtlich, dass das Bild eines weissen Punktes auf der einen Seite einen grünen, auf der entgegengesetzten Seite aber einen violetten Rand erhält.

Nehmen wir jetzt eine weisse Fläche an, welche nach der Seite des grünen Randes von schwarz begrenzt wird, so fallen die Bilder der verschiedenen Punkte jener Fläche desto weiter nach der violetten Seite hin, je weiter die Punkte von der Grenze entfernt

sind. An der letzteren bleibt daher das Grün unvermischt, bei weiterem Abstande von derselben vermischen sich aber die Farben immer mehr und mehr, so dass die Farbe allmählig vom Grünen ins Weisse übergeht, mithin nur ein grüner Rand an der Grenze sichtbar ist. Auf ähnliche Weisse bildet sich nur ein violetter Rand, wenn die weisse Fläche auf der entgegengesetzten Seite von schwarz begrenzt wird.

Die vorhergehenden Resultate beziehen sich bloss auf diejenigen Punkte des Gesichtsfeldes, für welche φ' den in (g) angegebenen Werth erhält. Bei allen Punkten, welche näher an der Grenze des Gesichtsfeldes liegen, ist $\varphi'^2 > \frac{2}{3} \varphi^2$; haben daher W und t einerlei Zeichen, so folgt aus (d), dass der dem Minimum oder Maximum entsprechende Werth von $\nu + \delta\nu$ kleiner, als in dem vorhergehenden Falle wird. Die dazu gehörige Farbe nähert sich daher dem Gelben und das Roth, welches nach der obigen Tafel mit dem Indigo zusammenfiel, liegt jetzt weiter nach dem Blau hin. Der grüne Rand der angenommenen weissen Fläche wird mithin gelber, der violette dagegen blauer.

Bei denjenigen Punkten endlich, welche mehr nach der Mitte des Gesichtsfeldes hin liegen, ist der dem Minimum oder Maximum entsprechende Werth von $\nu + \delta\nu$ grösser, als in dem zuerst betrachteten Falle; die dazu gehörige Farbe nähert sich daher dem Blauen und das Roth liegt weiter nach dem Violetten hin. Der grüne Rand der weissen Fläche wird mithin blauer, der violette dagegen röther.

Ist der Gleichung (b) nicht Genüge geleistet worden, so kann man annehmen, dass an die Stelle derselben die folgende tritt:

$$0 = T + \eta t + \frac{2}{3} W \varphi^2 - (u)\Delta' + \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

wobei τ eine willkührliche Grösse bezeichnet. Sie entsteht aus der ersteren, wenn man darin η mit $\left(\eta + \frac{\tau}{t}\right)$ verwechselt.

Es ist hieraus ersichtlich, dass das Minimum oder Maximum in jede Farbe des Spectrums fallen kann, je nachdem τ einen anderen Werth erhält. Ist der farbige Rand beinahe gehoben, τ mithin sehr klein, so wird der grüne Rand blauer oder gelber und der violette röther oder blauer, jenachdem t und τ einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Das Erstere findet statt, wenn der farbige Rand zu stark corrigirt ist, das Letztere im entgegengesetzten Falle.

Die angegebenen Erscheinungen können sehr gut an Fernröhren beobachtet werden, in denen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen und welche mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven und sogenannten achromatischen Ocularen versehen sind,

d. h. mit solchen Ocularen, wodurch der farbige Rand so vollkommen als möglich vernichtet werden soll. Nur ist hierbei die Veränderung in der Färbung der Ränder, je nachdem der Gegenstand näher bei dem Rande oder der Mitte des Gesichtsfeldes liegt, wegen des kleinen Werthes, welchen $\frac{W}{t}$ bei den Instrumenten der Art erhält, wenig bemerkbar, zumal da der farbige Rand desto schwächer wird, je mehr man sich der Mitte des Gesichtsfeldes nähert. Wir erhalten aber hierdurch ein sehr brauchbares Mittel, um uns zu überzeugen, ob bei einem gegebenen Instrumente der farbige Rand möglichst gehoben ist und um nöthigenfalls die Einrichtung desselben so lange abzuändern, bis dieses auf das vollkommenste bewirkt wird.

Als Gegenstand bedient man sich bei diesen Beobachtungen am besten eines schmalen dunkelen Körpers auf hellem Grunde, z. B. eines entfernten dunkelen Gewitterableiters, welcher sich auf dem erleuchteten Himmel projicirt, oder eines schmalen, schwarzen Streifens auf weissem Papier, von der Sonne erleuchtet. Bringt man das Bild dieses Gegenstandes nahe an den Rand des Gesichtsfeldes, so muss es auf der einen Seite mit einem schwachen grünen, auf der entgegengesetzten Seite mit einem schwachen violetten Rande erscheinen, wenn der farbige Rand so vollkommen als möglich vernichtet ist, wobei die Farben sehr nahe die des Spectrums sind. Zeigt sich der grüne Rand blauer und der violette röther, oder gehen sie gar in blau und roth über, so ist diess ein Beweis, dass die wegen des farbigen Randes angebrachte Correction zu stark wirkt. Ist dagegen der grüne Rand gelber, der violette blauer, oder gehen sie gar in gelb und blau über, so ist die Correction zu schwach.

Die Gleichung (i) von Nro. 123 zeigt, dass die oben gefundenen Resultate durch Verwechselung von φ mit $\frac{\varrho}{K}$ auch bei denjenigen Instrumenten mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven anwendbar sind, bei denen K einen bedeutenden Werth erhält und es lässt sich hier auch die Veränderung in der Färbung der Ränder an den verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes deutlich wahrnehmen, da $\frac{W}{t}$ beträchtlich genug ist, um eine bemerkbare Wirkung zu äussern. Wir haben in der allegirten Nummer gesehen, dass in diesem Falle der farbige Rand hauptsächlich durch das Objectiv hervorgebracht wird und dass die daselbst gefundene Anordnung desselben nicht nur jenen Fehler, sondern auch die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen aufhebt, als diess bei beiden zusammengenommen möglich ist. Die erhaltenen Resultate geben uns daher ein Mittel an die Hand, die Vollkommenheit des Objectivs in dieser Beziehung zu prüfen.

Um die Beobachtungen an einem Galileischen Fernrohre auf unzweideutige Weise anzustellen, ist es zweckmässig, das Ocular

mit einer Blendung von etwa zwei Linien Oeffnung zu versehen, damit das Auge so genau als möglich in die Axe des Fernrohres gebracht wird, indem eine Verrückung desselben nach der Seite den farbigen Rand bedeutend abändert. Genauer lässt sich alsdann der Ort des Auges durch die Beobachtung des farbigen Randes reguliren, indem dieser in zwei entgegengesetzten Punkten an der Grenze des Gesichtsfeldes gleich gefärbt erscheinen muss, wenn sich das Auge in der Axe befindet. Bei schwachen Vergrösserungen, wie sie die Galileischen Fernröhre meistens haben, gebraucht man am besten einen wenig entfernten, schmalen, dunkelen Gegenstand auf hellem Grunde, z. B. einen schmalen Fenstersparren, welcher sich am erleuchteten Himmel projicirt. Bringt man zuerst das Bild desselben in diejenige Entfernung von der Grenze des Gesichtsfeldes, in welcher der farbige Rand so vollkommen als möglich gehoben ist und die etwas mehr als den sechsten Theil von dem Halbmesser des Gesichtsfeldes beträgt, so müssen die gegenüberstehenden Ränder nach dem oben Gesagten bei einem vollkommenen Objective schwach grün und violett gefärbt seyn. Nähert man sodann das Bild der Grenze des Gesichtsfeldes, so wird der grüne Rand gelber, der violette blauer, bringt man dagegen dasselbe mehr nach der Mitte des Gesichtsfeldes, so wird der grüne Rand blauer, der violette röther. Bei einem unvollkommenen Objective zeigen sich an der Stelle, wo der farbige Rand so vollkommen als möglich gehoben seyn sollte, die zuerst oder zuletzt genannten veränderten Farben, je nachdem das Flintglas, welches hier die Correction hervorbringt, zu schwach oder zu stark wirkend ist.

Obgleich die Wirkung, welche das Ocular auf den farbigen Rand äussert, in Vergleichung mit der des Objectivs klein ist, so kann sie doch keineswegs vernachlässigt werden. Hieraus folgt, dass ein Objectiv, welches bei einem gewissen Oculare möglichst vollkommen ist, bei anderen Ocularen an seiner Güte verliert. Verbindet man mit demselben Objective ein stärker vergrösserndes Ocular, so haben t und τ in der Gleichung (l) einerlei Zeichen, die grünen und violetten Ränder werden daher blauer und röther; bei schwächeren Ocularen dagegen erhalten die erwähnten Grössen entgegengesetzte Zeichen, jene Ränder werden daher gelber und blauer.

134) Auf die Farbenzerstreuung in der Axe ist die vorhergehende Methode bei Instrumenten, in welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder entstehen, nicht unmittelbar anwendbar, weil, wie wir in Nro. 89 gesehen haben, hierdurch keine farbige Ränder hervorgebracht werden. Fraunhofer [1]) hat jedoch bereits ein Mittel angegeben, um zu erkennen, bei welchem aus mehreren Objectiven von denselben Glasarten, bei gleicher Brennweite und Oeffnung, die Farbenzerstreuung am besten gehoben ist. Dieses Mittel besteht

[1]) Denkschriften der Academie der Wissenschaften zu München. Band V., pag. 216.

darin, dass man jedes Objectiv halb, die Mitte durchschneidend, zudeckt; bei demjenigen, wo die Linien eines entfernten Gegenstandes, die mit der Durchschnittslinie des Objectivs parallel laufen, am deutlichsten gesehen werden, ist die Farbenzerstreuung am vollkommensten gehoben. Er bemerkt aber, dass man sich dabei von den Farben, welche entstehen, nicht irre führen lassen darf und nur auf Präcision Rücksicht nehmen muss, weil man bei einem Objective weniger Farben sehen kann, als bei einem anderen, während die Präcision doch geringer ist.

Die erwähnten Farben bieten indessen ebenfalls ein brauchbares Mittel dar, um zu beurtheilen, ob bei einem gegebenen Fernrohre die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich gehoben ist, oder nicht; untersuchen wir daher, auf welche Weise jene Farben bei der angegebenen Vorrichtung entstehen. Zu dem Ende nehme ich die in (d) von Nro. 68 gefundenen Ausdrücke der Seitenabweichungen wieder vor, indem ich bloss diejenigen Glieder berücksichtige, welche sich auf die Farbenzerstreuung in der Axe beziehen. Nach Nro. 78 müssen wir darin $\left(\frac{z-g}{gz}\right)$ mit $\mathfrak{z}$ verwechseln, um auf die kleinen Veränderungen Rücksicht zu nehmen, welche zur genauen Einstellung des Instrumentes erforderlich sind. Setzen wir ferner ein gewöhnliches achromatisches Objectiv voraus, dessen Fassung die Stelle der Hauptblendung vertritt, so ist in den Gliedern der dritten Ordnung

$$K = 0$$

Endlich verwechsele ich R mit R', um die Formeln auf einen beliebigen Werth dieser Grösse zu beziehen, da R gegenwärtig den äussersten Werth bezeichnet. Hiernach sind die Seitenabweichungen durch die Formeln gegeben:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{Vz R' \cos\Psi}{v}\left[S\delta v + s\delta v^2 + UR'^2\delta v + J\mathfrak{z}\right] \\ x' &= \frac{Vz R' \sin\Psi}{v}\left[S\delta v + s\delta v^2 + UR'^2\delta v + J\mathfrak{z}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (a)$$

Nach demjenigen, was in Nro. 69 angeführt wurde, bilden alle Strahlen von einerlei Farbe, welche in gleicher Entfernung vom Hauptstrahle auf die erste brechende Fläche fallen, bei denen mithin δv und R' einerlei sind, auf der Projectionsfläche einen Kreis, dessen Halbmesser r' durch den Ausdruck gegeben ist:

$$r' = \frac{Vz R'}{v}\left[S\delta v + s\delta v^2 + UR'^2\delta v + J\mathfrak{z}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt in dem Durchschnittspunkte des dazu gehörigen Hauptstrahles mit der Projectionsfläche. Wird daher die Hälfte des Objectivs auf eine solche Weise bedeckt, dass

die Halbirungslinie sich in der Ebene der yz befindet, in welcher der leuchtende Punkt angenommen ist, dass ferner die unbedeckte Hälfte auf der Seite der positiven Ordinaten $\acute{x}$ liegt, so kommt nur die Hälfte des erwähnten Kreises wirklich zu Stande. Sie liegt auf der Seite der positiven oder der negativen $\acute{x}$, je nachdem der nach der vorhergehenden Formel berechnete Werth von $\acute{r}$ positiv oder negativ ist, indem derselbe zugleich die grösste Ordinate des Halbkreises ausdrückt, welche man erhält, wenn man in der zweiten Formel (a) den Winkel $\Psi = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Ist bei dem Objective die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich gehoben, so ist dadurch der zweiten Gleichung (c) von Nro. 117 Genüge geleistet. Die bei derselben gebrauchten Bezeichnungen stimmen jedoch nicht mit den gegenwärtigen überein. Es wurden nämlich daselbst die von den Ocularen herrührenden Glieder von den übrigen abgesondert und mit S' bezeichnet, statt dass dieselben bei den obigen Formeln unter S begriffen sind. Dagegen wurde nach der in Nro. 96 gebrauchten Methode der von γ abhängende Theil des Gliedes ${}_{\eta}s$, welcher allein einen bemerkbaren Werth erhält, mit S vereinigt. Hiernach muss in der allegirten Gleichung $(S + S')$ mit $(S + {}_{\eta}s)$ verwechselt werden, um sie auf die gegenwärtige Bezeichnung zurück zu führen; sie wird mithin

$$0 = S + {}_{\eta}s + \frac{2}{3} U R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

wobei R den äussersten Werth von $\acute{R}$ bezeichnet.

Die Gleichungen (b) und (c) sind den Gleichungen (a) und (b) der vorhergehenden Nummer analog, welche wir in Bezug auf den farbigen Rand erhalten haben, und entstehen aus den letzteren, wenn man darin

$$\left.\begin{array}{lll}
\delta\, tg\, \omega'' & \text{mit} & \acute{r} - \frac{V z \acute{R} J_{\mathfrak{z}}}{\nu} \\
\frac{V}{\nu} & \ldots\ldots & \frac{V z}{\nu} \\
\varphi' & \ldots\ldots & \acute{R} \\
\varphi & \ldots\ldots & R \\
T & \ldots\ldots & S \\
t & \ldots\ldots & s \\
W & \ldots\ldots & U \\
(u) & \ldots\ldots & 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(d)}$$

verwechselt. Durch diese Verwechselungen sind daher die oben gefundenen Resultate auch hier anwendbar.

Demnach wird der Halbmesser ein Minimum oder Maximum bei derjenigen Farbentinte, für welche

$$\delta \nu = \frac{\eta}{2} - \frac{U}{2s}\left(\acute{R}^2 - \frac{2}{3} R^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

Sodann fallen zwei Halbkreise zusammen, bei denen

$$\delta\nu = \frac{\eta}{2} - \frac{U}{2s}\left(\acute{R}^2 - \frac{2}{3}R^2\right) \pm \delta\nu' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

und ihr gemeinschaftlicher Halbmesser ist

$$\acute{r} = \frac{V z \acute{R}}{\nu}\left\{J_3 - \left[\frac{\eta}{2} - \frac{U}{2s}\left(\acute{R}^2 - \frac{2}{3}R^2\right)\right]^2 + s\,\delta\nu'^2\right\} . \; (g)$$

Haben

$$\frac{V z \acute{R}}{\nu}\left\{J_3 - \left[\frac{\eta}{2} - \frac{U}{2s}\left(\acute{R}^2 - \frac{2}{3}R^2\right)\right]^2\right\}$$

und

$$\frac{V z \acute{R}}{\nu}\, s\,\delta\nu'^2$$

einerlei Zeichen, so liegen alle Halbkreise auf einer Seite der Ebene der yz. Derjenige unter ihnen, welcher dem in (e) gegebenen Werthe von $\delta\nu$ entspricht, ist der absoluten Grösse nach und ohne Rücksicht auf das Zeichen der kleinste. Seine Farbe ist zwar etwas verschieden, je nachdem $\acute{R}$ einen anderen Werth erhält; da jedoch diese Grösse bei den Instrumenten, von welchen hier die Rede ist, jederzeit sehr klein wird, so ist $\delta\nu$ nur äusserst wenig von $\frac{\eta}{2}$ verschieden, so dass die Farbe des kleinsten Halbkreises bei allen Werthen von $\acute{R}$ in das Grüne des Spectrums fällt. Für die verschiedenen Werthe von $\acute{R}$ ist jener Halbmesser ebenfalls verschieden und verschwindet zugleich mit $\acute{R}$. Nehmen wir daher alle Strahlen zusammen, welche innerhalb der Entfernung R auf die erste brechende Fläche fallen, so ist ihr gemeinschaftliches Bild ein Kalbkreis, dessen Fläche zwischen dem Umfange und dem in der Ebene der yz liegenden Durchmesser von grünem Lichte erleuchtet ist.

Lassen wir $\delta\nu'$ nach und nach zunehmen, so entsteht Anfangs für jeden Werth desselben auf ähnliche Weise ein Halbkreis, dessen Fläche von einer Mischung derjenigen farbigen Strahlen erleuchtet ist, welchen die Werthe $\pm\delta\nu'$ zugehören, und dessen Halbmesser mit $\delta\nu'$ zunimmt. Diess dauert so lange fort, bis $-\delta\nu'$ den der äussersten Grenze des Roths entsprechenden Werth erlangt hat, welches der grösste negative des Spectrums ist. Da sich nun das letztere nach der Seite der positiven $\delta\nu'$ noch viel weiter erstreckt, so bilden sich bei fortwährender Zunahme von $\delta\nu'$ zuletzt Halbkreise, in denen bloss die den letzten positiven Werthen von $\delta\nu'$ correspondirenden Strahlen vorkommen, und welche daher auf ihrer ganzen Fläche violett gefärbt sind.

Die Mittelpunkte sämmtlicher Halbkreise fallen in einen Punkt zusammen; ihr gemeinschaftliches Bild ist daher ein Halbkreis, dessen

Halbmesser dem grössten der violetten Strahlen gleich und dessen Fläche von dem Umfange nach dem Mittelpunkte hin verschiedenartig gefärbt ist. In der Nähe des Umfanges ist das Violett rein enthalten; je mehr man sich aber dem Mittelpunkte nähert, desto mehrere Farben des Spectrums vermischen sich mit einander, so dass sie in dem kleinsten Halbkreise alle vorkommen. Dieser würde daher weiss erscheinen, wenn das hierzu erforderliche Mischungsverhältniss vorhanden wäre, welches jedoch nur der Fall seyn würde, wenn das sämmtliche in den einzelnen Halbkreisen befindliche Licht im kleinsten derselben vereinigt wäre. Wegen der verschiedenen Halbmesser der ersteren fällt aber auf den letzteren desto weniger von jeder Farbe, je weiter dieselbe im Spectrum vom Grün entfernt ist, daher nur ein Theil von diesem neutralisirt wird und im Wesentlichen die grüne Farbe vorherrschend bleibt. Das ganze Bild ist daher ein Halbkreis, welcher am Umfange violett, in der Nähe des Mittelpunktes dagegen grün gefärbt ist.

Haben die beiden oben angegebenen Theile, woraus der Ausdruck von r' besteht, entgegengesetzte Zeichen und solche Werthe, dass r' bei keiner Farbe des Spectrums verschwinden kann, so liegen die verschiedenfarbigen Halbkreise ebenfalls auf derselben Seite der Ebene der yz; nur ist der grösste nunmehr grün, der kleinste dagegen violett gefärbt. Wenden wir daher hier dasselbe Raisonnement, wie im vorhergehenden Falle an, so müssen wir schliessen, dass das ganze Bild nunmehr aus einem Halbkreise besteht, dessen Fläche am Umfange grün, gegen den Mittelpunkt hin aber violett gefärbt ist.

Sind endlich im letzteren Falle die beiden Theile von r' so beschaffen, dass dieser Halbmesser bei irgend einer Farbe des Spectrums verschwindet, so ist der grösste Halbkreis, welcher auf der einen Seite der Ebene der yz liegt, grün, bei den folgenden nehmen die Halbmesser nach und nach bis zu 0 ab, ihr gemeinschaftliches Bild ist daher ein, am Umfange grün gefärbter Halbkreis. Bei fernerer Zunahme von $\delta\nu'$ bekommt r' das entgegengesetzte Zeichen; die folgenden Halbkreise liegen daher auf der entgegengesetzten Seite der Ebene der yz und ihre Halbmesser wachsen von 0 bis zu demjenigen Werthe, welcher dem äussersten Violett entspricht; ihr gemeinschaftliches Bild ist daher ein, am Umfange violett gefärbter Halbkreis. Das ganze Bild von sämmtlichen farbigen Strahlen besteht demnach aus zwei, auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der yz liegenden Halbkreisen von verschiedenen Halbmessern, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben und von denen der eine am Umfange grün, der andere violett gefärbt ist. Im Innern haben beide Farben, welche aus Mischungen von verschiedenen Farben des Spectrums bestehen.

Nehmen wir jetzt statt des leuchtenden Punktes eine in der Ebene der yz liegende weisse Linie an, welche als eine Reihe von leuchtenden Punkten angesehen werden kann, so ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich, dass das Bild jener Linie auf der einen Seite mit einem grünen, auf der entgegengesetzten Seite dagegen mit einem violetten Rande versehen ist, im Innern aber Farben hat, welche aus verschiedenen Mischungen der prismatischen Farben bestehen. In den beiden ersten, oben betrachteten Fällen hat zwar der, nach der Seite der kleinsten Halbkreise liegende farbige Rand nicht die reine Farbe des Spectrums, indem diese noch mit den übrigen Farben desselben gemischt ist, sie sind aber verhältnissmässig in zu geringer Menge vorhanden, als dass nicht die angegebene Farbe daraus entstehen sollte.

Setzen wir endlich an die Stelle der weissen Linie eine von schwarz begrenzte weisse Fläche, welche als eine Folge von weissen, unendlich nahe bei einander liegenden Parallellinien betrachtet werden kann, so vermischen sich im Innern der Fläche die zu den verschiedenen Linien gehörigen Farben so mit einander, dass dadurch die weisse Farbe hervorgebracht wird, und nur an der Grenze bleibt die nach der Seite derselben liegende Farbe unvermischt, so dass sich daselbst ein schwacher grüner oder violetter Rand bildet, je nachdem die Grenze nach der einen oder der anderen Seite liegt.

Wenn daher durch ein Fernrohr von der angegebenen Einrichtung ein entfernter schmaler, dunkeler, von Parallellinien begrenzter Gegenstand auf hellem Grunde betrachtet wird, so wie es oben bei dem farbigen Rande angeführt wurde, indem man die Hälfte des Objectivs auf eine solche Weise bedeckt, dass die Halbirungslinie mit den Grenzen des Gegenstandes parallel lauft, und indem man diesen in die Mitte des Gesichtsfeldes bringt, um von dem Einflusse des farbigen Randes unabhängig zu seyn, so muss derselbe auf den entgegengesetzten Seiten mit einem schwachen grünen und violetten Rande erscheinen, wofern die Farbenzerstreuung in der Axe so vollkommen als möglich gehoben ist.

Uebrigens gelten auch hier die Schlüsse, welche wir oben bei dem farbigen Rande in Bezug auf eine unvollkommene Aufhebung desselben und auf die Anwendung stärkerer oder schwächerer Vergrösserungen gemacht haben. Nur findet der Unterschied statt, dass die Oculare bei den hier betrachteten Fernröhren convex, bei dem Galileischen Fernrohre dagegen concav sind, daher die von den Ocularen herrührenden Glieder bei den ersteren Instrumenten das entgegengesetzte Zeichen erhalten und dem zu Folge die entgegengesetzte Wirkung hervorbringen.

Je nachdem daher bei der erwähnten Beobachtung der grüne und violette Rand entweder ins Gelbe und Blaue, oder ins Blaue

und Rothe übergeht, ist die Vorrichtung, wodurch die Farbenzerstreuung corrigirt wird, und welche hier in dem Flintglase des Objectivs besteht, zu schwach oder zu stark wirkend.

Werden endlich an einem Instrumente, welches bei einer gewissen Vergrösserung die Farbenzerstreuung so vollkommen, als möglich, aufhebt, stärkere oder schwächere Vergrösserungen angebracht, so wird der grüne und violette Rand bei den ersteren gelber und blauer, bei den letzteren dagegen blauer und röther.

Zehntes Kapitel.

Gestalt des von dem Instrumente hervorgebrachten Bildes.

Die in den vorhergehenden Kapiteln enthaltenen Untersuchungen bezogen sich bloss auf die Deutlichkeit des von dem Instrumente hervorgebrachten Bildes. Es bleibt nun noch übrig, die Gestalt desselben mit der des Gegenstandes zu vergleichen, um die Fehler kennen zu lernen, welche sich auf jene beziehen. Wir werden hierdurch in den Stand gesetzt werden, nicht nur die Mittel anzugeben, durch welche das Bild dem Gegenstande so ähnlich als möglich gemacht werden kann, sondern auch die Gestalt zu bestimmen, unter welcher eine beliebige, auf dem Gegenstande gezogene Curve im Bilde erscheint.

Verzerrung des durch das Instrument hervorgebrachten Bildes.

135) Ausser der Undeutlichkeit kommt bei den optischen Werkzeugen noch ein anderer Fehler in Betracht, welcher von jener unabhängig ist und eine besondere Untersuchung erfordert, nämlich der, dass im Allgemeinen die Gegenstände durch die Instrumente mehr oder weniger verzerrt erscheinen. Nach demjenigen, was oben angeführt worden ist, hängt die Deutlichkeit bei unveränderter Grösse des ganzen Bildes allein davon ab, wie nahe die von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen an derjenigen Stelle bei einander liegen, wo sie entweder von der Projectionsfläche durchschnitten werden, oder wo sich das letzte von dem Instrumente entworfene Bild befindet, wenn man dieses unmittelbar untersucht. Dagegen hat es auf die Deutlichkeit keinen Einfluss, welche Lage die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder gegen einander haben. Diese letztere Lage bestimmt die Gestalt des von dem ganzen Gegenstande entworfenen Bildes; man kann daher aus derselben nicht nur beurtheilen, ob jener durch das Instrument verzerrt erscheint, sondern auch die Grösse der Verzerrung berechnen, wenn sie stattfindet.

Da die bei dem Instrumente vorkommenden willkührlichen Grössen durch die vorhergehende Methode so bestimmt werden, dass die von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen in seinem Bilde so nahe wie möglich bei der Axe des Strahlenbündels liegen,

so kann der in jenem Bilde befindliche Punkt der letzteren, wie wir bereits oben bemerkt haben, als der Mittelpunkt des Bildes betrachtet werden, welchen wir mit dem Bilde selbst verwechseln können, wenn wir von dessen Grösse abstrahiren, die bloss auf die Deutlichkeit Einfluss hat.

Nehmen wir ferner den Gegenstand, wie bisher, als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene an, so können wir die Lage seiner verschiedenen Punkte durch Polarcoordinaten bestimmen, so wie es früher geschehen ist. Da wir jedoch in der Folge bisweilen auch die rechtwinkeligen Coordinaten gebrauchen werden, welche aus den Polarcoordinaten hergeleitet werden müssen, so ändere ich, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, die früheren Bezeichnungen dahin ab, dass ich durch

$\acute{r}$ die Polarordinate von einem beliebigen Punkte des Gegenstandes, deren Ursprung in der Axe des Instrumentes liegt,

ψ' den Winkel zwischen $\acute{r}$ und der Linie, in welcher die Ebene des Gegenstandes von der als fix angenommenen Ebene der yz durchschnitten wird,

bezeichne. Wir haben in Nro. 81 gesehen, dass die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entsprechenden Axen der Strahlenbündel in Ebenen liegen, welche durch ihre Polarordinaten und die Axe des Instrumentes gehen; die Abscissen ψ' drücken daher auch die Neigungswinkel jener Ebenen mit der Ebene der yz aus.

136) Nach diesen Prämissen fange ich die Untersuchung mit den Instrumenten der ersten Art an, welche ein Bild des Gegenstandes auf einer Projectionsebene entwerfen.

Die Lage der verschiedenen Punkte dieses Bildes bestimme ich auf dieselbe Weise, wie bei dem Gegenstande, durch die Polarcoordinaten r und ψ.

Soll nun das Bild dem Gegenstande ähnlich seyn, so wird erfordert, dass für alle correspondirende Punkte die Abscissen ψ' und ψ einander gleich sind, die Ordinaten $\acute{r}$ und r aber ein beständiges Verhältniss zu einander haben.

Die erste Bedingung wird in allen Fällen strenge erfüllt. Da nämlich der Gegenstand sowohl, als die Projectionsebene senkrecht auf der Axe stehen, so werden sie von allen durch die Axe gelegten Ebenen unter gleichen Winkeln durchschnitten, woraus die Gleichheit der Winkel ψ' und ψ folgt, indem sich die Axen der Strahlenbündel und folglich auch die von ihnen auf der Projectionsebene entworfenen Bilder jederzeit in Ebenen befinden, welche durch die Axe des Instrumentes und die entsprechenden Polarordinaten des Gegenstandes gelegt sind. Es bleibt daher nur übrig, zu untersuchen, in wie fern der zweiten Bedingung Genüge geleistet wird.

Nach der in (k) von Nro. 4 eingeführten Bezeichnung ist die Polarordinate von einem Punkte des Gegenstandes, wenn man das dortige b_1 mit r' verwechselt, durch den Ausdruck gegeben:

$$r' = c_1 \varphi_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(a)}$$

Dagegen finden wir die Polarordinate von dem correspondirenden Punkte des Bildes durch die Formel (i) von Nro. 81, wenn wir darin y'' mit r verwechseln, nämlich

$$r = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ \left(\begin{array}{l} 1 + \dfrac{M_i R^2}{2} + Q_e^{s} R^4 K_1 \\ + \left[\dfrac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1 \right] \Delta \dfrac{1}{c_1} \\ + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta \dfrac{1}{c_1} \right)^2 \\ + \dfrac{D V_i z_i}{V_i z_i} - \dfrac{v_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} + {}_s t_i \end{array} \right) \varphi_1 \begin{array}{l} \\ + \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta \dfrac{1}{c_1} \right] \varphi_1^3 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{array} \right\} \quad \ldots \quad \text{(b)}$$

In diesem Ausdrucke muss statt $\mathfrak{z}_i$ derjenige Werth substituirt werden, welcher der grössten Deutlichkeit entspricht. Da jedoch derselbe, ebenso wie $D . V_i z_i$, von der einmaligen Stellung des Instrumentes oder der Projectionsebene abhängt, so sind beide für alle Punkte des Bildes einerlei, d. h. von φ_1 unabhängig.

Wären die mit φ_1^3 und φ_1^5 multiplicirten Glieder nicht vorhanden, so könnte der vorhergehende Ausdruck von r unter die Form gebracht werden:

$$r = V' c_1 \varphi_1 = V' r' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(c)}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$V' = \frac{V_i z_i}{v_i c_1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ + \left[\dfrac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1 \right] \Delta \dfrac{1}{c_1} \\ + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta \dfrac{1}{c_1} \right)^2 \\ + \dfrac{D V_i z_i}{V_i z_i} - \dfrac{v_i K_i \mathfrak{z}_i}{V_i^2} + {}_s t_i \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

setzen.

Die sämmtlichen Polarordinaten des Gegenstandes und des Bildes würden daher in dem beständigen Verhältnisse $1 : V'$ stehen, so dass also das Bild dem Gegenstande vollkommen ähnlich wäre und seine Vergrösserung durch V' ausgedrückt würde.

Die folgenden Glieder in dem Ausdrucke von r zerstören diese Aehnlichkeit und bringen daher eine *Verzerrung* des Bildes hervor.

Bezeichnen wir sie mit Ω, so ist

$$\Omega = \frac{V_i z_i}{v_i} \left\{ \begin{array}{l} \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta \frac{1}{c_1} \right] \varphi_1^3 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \text{(e)}$$

Die Verzerrung ist hierdurch in absolutem Maasse gegeben; sie lässt sich aber auch in aliquoten Theilen der jedesmaligen Polarordinate ausdrücken. Bemerken wir nämlich, dass die Producte von $\left(\frac{z-g}{g z}\right)_i$ in andere Abweichungen vernachlässigt werden, so können wir in dem Ausdrucke von Ω

$$\frac{V_i z_i}{v_i} \varphi_1 = r$$

setzen, wonach

$$\Omega = r \left\{ \begin{array}{l} \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta \frac{1}{c_1} \right] \varphi_1^2 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^4 \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \text{(f)}$$

wird. Nennen wir daher Ω' die Verzerrung in aliquoten Theilen der Polarordinate ausgedrückt, so ist

$$\Omega' = \frac{\Omega}{r}$$

folglich

$$\Omega' = \left. \begin{array}{l} \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta \frac{1}{c_1} \right] \varphi_1^2 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^4 \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \text{(g)}$$

137) Um bei den Instrumenten der zweiten Art die Verzerrung berechnen zu können, ist es nothwendig, die Lage zu bestimmen, welche die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Axen der Strahlenbündel nach der letzten Brechung durch das Instrument erhalten. Zu diesem Ende sey

- ω der Winkel, welchen die Axe des der Polarordinate r' entsprechenden Strahlenbündels mit der Axe des Instrumentes macht,
- ψ der Neigungswinkel zwischen der Ebene, in der sich die Axe des Strahlenbündels befindet, und der Ebene der yz,

so ist nach dem oben Angeführten $\psi = \psi'$.

Den Winkel ω findet man durch den Ausdruck (n) von Nro. 81, wenn man darin $\overset{''}{\omega}$ mit ω verwechselt. Diess giebt

$$tg\,\omega = \frac{V_i}{v_i} \left(\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ + \left[\frac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1 \right] \Delta \frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta \frac{1}{c_1} \right)^2 \\ - \frac{v_i K_i}{V_i^2 g_i} + \frac{1}{V_i} D \left(V_i - \frac{v_i K_i}{V_i g_i} \right) + \varepsilon\, t_i \end{array} \right\} \varphi_1 \\ + \left[P_i + 3 Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta \frac{1}{c_1} \right] \varphi_1^3 \\ + Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{array} \right) \quad \text{(a)}$$

Denkt man sich das Instrument und den Gegenstand, welcher durch dasselbe betrachtet wird, weg, und nimmt an deren Stelle in einer beliebigen Entfernung (c) einen anderen, $\acute{V}$ mal vergrösserten Gegenstand an, welcher dem wirklichen ähnlich ist, mit demselben eine parallele Lage hat und mit blossen Augen betrachtet wird, so hat ψ' bei jenem Gegenstande denselben Werth wie bei dem wirklichen. Nennen wir ferner in Bezug auf den hypothetischen Gegenstand

(r) die Polarordinate, welche der Polarordinate $\acute{r}$ entspricht,

(ω) den Winkel, welchen der von dem Endpunkte derselben in das Auge fallende Hauptstrahl mit der Axe macht, so ist

$$\left.\begin{aligned} (r) &= \acute{V}\acute{r} = \acute{V} c_1 \varphi_1 \\ tg(\omega) &= \frac{(r)}{(c)} = \frac{\acute{V} c_1 \varphi_1}{(c)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Wären nun die mit φ_1^3 und φ_1^5 multiplicirten Glieder in dem Ausdrucke von $tg\,\omega$ nicht vorhanden, so könnten wir $\acute{V}$ so bestimmen, dass $tg\,\omega$ und $tg(\omega)$ einerlei Werth erhielten, nämlich

$$\acute{V} = \frac{V_i\,(c)}{\nu_i\, c_1} \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{M_i R^2}{2} + Q_e R^4 K_1 \\ & + \left[\frac{(M)_e R^2}{2} + (K)_e - K_1\right] \Delta\frac{1}{c_1} + [(K)_e - K_1]^2 \left(\Delta\frac{1}{c_1}\right)^2 \\ & - \frac{\nu_i K_i}{V_i^2 g_i} + \frac{1}{V_i} D\left(V_i - \frac{\nu_i K_i}{V_i g_i}\right) + {}_s t_i \end{aligned} \right\} . \quad (c)$$

Die Axe des Strahlenbündels würde daher nach derselben Richtung in das Auge fallen, wie der correspondirende Hauptstrahl, welcher dem hypothetischen Gegenstande zugehört, d. h. der Gegenstand würde durch das Instrument dem wirklichen Gegenstande ähnlich erscheinen. Die von φ_1^3 und φ_1^5 abhängigen Glieder zerstören auch hier, wie bei den Instrumenten der ersten Art, die Aehnlichkeit. Bezeichnen wir die Verzerrung, wie bei diesen, mit Ω und schätzen sie nach der Veränderung, welche sie an der Polarordinate (r) des hypothetischen Gegenstandes oder an $tg(\omega)$ hervorbringt, da beide einander proportional sind, so wird

$$\Omega = \frac{V_i}{\nu_i} \left\{ \begin{aligned} & \left[P_i + 3\,Q_e R^2 K_1^3 + (P)_e \Delta\frac{1}{c_1}\right] \varphi_1^3 \\ & + Q_e K_1^5 \varphi_1^5 \end{aligned} \right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (d)$$

Soll sie in aliquoten Theilen von $tg(\omega)$ oder $tg\,\omega$ ausgedrückt werden, so ist mit Vernachlässigung der Glieder, welche in den Producten mit Abweichungen nicht beibehalten werden,

$$tg\,\omega = \frac{V_i}{\nu_i} \varphi_1$$

folglich die Verzerrung in aliquoten Theilen von $tg\,\omega$ =

$$\left.\begin{aligned}\Omega' &= \frac{\Omega}{tg\,\omega}\\ &= \left[P_1 + 3\,Q_0 R^2 K_1^3 + (P)_0\,\Delta\frac{1}{c_1}\right]\varphi_1^2\\ &\quad + Q_0 K_1^5\,\varphi_1^4\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

Methoden zur Erhaltung der grösstmöglichen Aehnlichkeit zwischen dem Bilde und dem Gegenstande.

138) Nachdem wir in den vorhergehenden Nummern die Grösse der Verzerrung bestimmt haben, welche in Bezug auf die verschiedenen Punkte des Gegenstandes sowohl bei den Instrumenten der ersten als der zweiten Art stattfindet, so können wir die Methoden aufsuchen, welche angewendet werden müssen, um jene Verzerrung aufzuheben oder wenigstens möglichst zu vermindern.

Gebrauchen wir, wie in Nro. 68, statt der Coefficienten einfache Buchstaben und setzen zu dem Ende

$$\left.\begin{aligned}P &= P_1 + 3\,Q_0 R^2 K_1^3 + (P)_0\,\Delta\frac{1}{c_1}\\ Q &= Q_0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

lassen wir ferner den Index, ebenso wie es an dem angeführten Orte geschehen ist, weg, so können die in (e) von Nro. 136 und (d) von Nro. 137 gefundenen Ausdrucke von Ω unter die Gestalt gebracht werden:

$$\Omega = \frac{Vz}{v}\left[P\varphi^3 + QK^5\varphi^5\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

mit der Bedingung, dass bei den Instrumenten der zweiten Art der gemeinschaftliche Factor z weggelassen wird.

Die Formel (b) zeigt, dass die Verzerrung nur dann wegfallen, mithin eine vollkommene Aehnlichkeit erhalten werden kann, wenn Ω für alle Werthe von φ verschwindet, wozu erfordert wird, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von φ abgesondert $= 0$ sind. Hierdurch entstehen daher die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}P &= 0\\ Q &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

welchen zugleich Genüge geleistet werden muss, wenn eine vollkommene Aehnlichkeit stattfinden soll.

Kann der Coefficient P, welcher dem beträchlichsten, mit φ^3 multiplicirten Gliede von Ω zugehört, nicht verschwinden, so bleibt nichts Anderes übrig, als die willkührlichen Grössen des Instrumentes so zu bestimmen, dass jener Coefficient so klein wird, als es geschehen kann, ohne der Deutlichkeit bedeutend zu schaden. Man erreicht dieses gewöhnlich am leichtesten, wenn man sowohl P, als die Grössen, welche sich auf die Undeutlichkeit beziehen, für mehrere

Einrichtungen des Instrumentes numerisch berechnet, welche nahe bei dem Minimum der letzteren liegen, wie es bereits in Nro. 111 bemerkt wurde.

Ist das Instrument so beschaffen, dass $P = 0$ werden kann, ohne dass dieses zugleich bei Q stattfindet, so können wir diejenige Einrichtung des Instrumentes suchen, bei welcher die von den verschiedenen Punkten des Gegenstandes entstehenden Bilder im Mittel so wenig wie möglich aus derjenigen Lage gebracht sind, welche der vollkommenen Aehnlichkeit entspricht.

Die Grösse Ω ist nämlich als ein Fehler zu betrachten, welcher dem durch die Coordinaten $\frac{1}{c_1}$ und φ_1 bestimmten leuchtenden Punkte des Gegenstandes zugehört. Wenden wir daher auf diesen Fall dieselbe Methode an, welche in Nro. 90 gebraucht wurde, um von Θ auf Π überzugehen, und verwechseln wir zu dem Ende Θ mit Ω^2, so erhalten wir das arithmetische Mittel aus den sämmtlichen Werthen von Ω^2, welche den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehören. Bezeichnen wir dieses arithmetische Mittel mit Ω''^2, so muss in (b) der allegirten Nummer Θ mit Ω^2 und Π mit Ω''^2 verwechselt werden. Diess giebt

$$\Omega''^2 = \frac{\int_0^{\varphi} \Omega^2\, d.\varphi^2}{\varphi^2}$$

Substituirt man hierin statt Ω den vorhergehenden Werth, so wird

$$\Omega''^2 = \left(\frac{Vz}{\nu\varphi}\right)^2 \int_0^{\varphi} d.\varphi^2 \left\{\begin{matrix} P^2\varphi^6 + 2PQK^5\varphi^8 \\ + Q^2K^{10}\varphi^{10} \end{matrix}\right\}$$
$$= \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left[\frac{P^2\varphi^6}{4} + \frac{2}{5}PQK^5\varphi^8 + \frac{Q^2K^{10}\varphi^{10}}{6}\right]$$

wobei φ nunmehr den der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechenden Werth jener Grösse bezeichnet.

Dieser Ausdruck von Ω''^2 kann nach der früher gebrauchten Methode so umgeändert werden, dass er aus zwei vollständigen Quadraten besteht, wodurch er die Gestalt erhält:

$$\Omega''^2 = \left(\frac{Vz}{\nu}\right)^2 \left[\frac{\varphi^6}{4}\left(P + \frac{4}{5}QK^5\varphi^2\right)^2 + \frac{Q^2K^{10}\varphi^{10}}{150}\right]. \quad \text{(d)}$$

Da Ω''^2 das arithmetische Mittel aus allen Werthen von Ω^2 ist, so können wir Ω'' die *mittlere Verzerrung* nennen. Soll dieselbe so klein als möglich werden, so muss man die willkührlichen Grössen des Instrumentes so bestimmen, dass dadurch Ω''^2 zu einem Minimum wird. Da nun der Ausdruck dieser Grösse unter der in (a) von Nro. 114 angenommenen Form ebenfalls begriffen ist, so entsteht dadurch vermöge (c) jener Nummer die Gleichung:

$$0 = P + \frac{4}{5}QK^5\varphi^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(e)}$$

Sie kann durch Multiplication mit $\frac{Vz}{v}\left(\varphi\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^3$ unter die Gestalt gebracht werden:

$$0 = \frac{Vz}{v}\left[P\left(\varphi\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^3 + QK^5\left(\varphi\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^5\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Dagegen erhalten wir aus (b), wenn wir darin φ mit φ' verwechseln, um den auf einen beliebigen Punkt des Gegenstandes sich beziehenden Werth von demjenigen zu unterscheiden, welcher in (f) unter φ verstanden wird und sich auf die Grenze des Gesichtsfeldes bezieht,

$$\Omega = \frac{Vz}{v}\left[P\varphi' + QK^5\varphi'^5\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

Die Vergleichung der beiden vorhergehenden Ausdrücke zeigt, dass bei dem Minimum von Ω''^2 die Verzerrung nur in Bezug auf diejenigen Punkte des Gegenstandes vollkommen verschwindet, für welche,

$$\varphi' = \varphi\sqrt{\frac{4}{5}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

ist, dass sie aber diesseits und jenseits dieser Punkte das entgegengesetzte Zeichen hat.

Werden die willkührlichen Grössen des Instrumentes so bestimmt, dass der Gleichung (e) Genüge geleistet wird, so erhält dadurch jenes die Eigenschaft, dass in dem letzten, von ihm entworfenen Bilde die verschiedenen Punkte im Mittel sich so wenig wie möglich von derjenigen Lage entfernen, welche sie bei einer vollkommenen Aehnlichkeit haben würden. Bei den Instrumenten der zweiten Art tritt aber alsdann gewöhnlich der in Nro. 86 erwähnte Nachtheil ein, dass das Bild dem Auge theils seine convexe, theils seine concave Seite zukehrt, daher man, so oft dieser Fall stattfindet, nicht weiter gehen kann, als die Gleichung (d) jener Nummer statt der obigen Gleichung (e) zu gebrauchen.

Bei den mit gewöhnlichen achromatischen Objectiven versehenen Instrumenten, in welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen, ist, wie wir oben gesehen haben, K so klein, dass es in den, ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Gliedern $= 0$ gesetzt werden kann. In diesem Falle reducirt sich mithin die Gleichung (e) auf

$$P = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)$$

Wenn daher dieser Gleichung nicht vollständig Genüge geleistet werden kann, so muss man wenigstens zu bewirken suchen, dass P keinen bedeutenden Werth erhält, wie bereits oben bemerkt wurde.

Instrumente mit inneren Micrometern.

139) Bei den Instrumenten der zweiten Art werden häufig innere Micrometer angebracht, welche den Zweck haben, die absolute oder

scheinbare Grösse von einzelnen Theilen des Gegenstandes zu messen. Welche Einrichtung auch einem solchen Micrometer gegeben werden mag, so ist dabei doch stets die Erfüllung der beiden Bedingungen nothwendig, dass in der Ebene des Micrometers ein wirkliches Bild entsteht, an welchem die Messungen vorgenommen werden, dass ferner dieses Bild dem Gegenstande ähnlich ist, weil sonst die Angaben des Micrometers unrichtig werden. In diesem Falle findet daher die Formel (e) von Nro. 136 ihre Anwendung, wenn man sie auf das in der Ebene des Micrometers hervorgebrachte Bild bezieht und diese Ebene als die Projectionsebene betrachtet. Nach demjenigen, was wir bereits im Anfange der vorhergehenden Nummer angeführt haben, muss hiernach die Einrichtung des Instrumentes so getroffen werden, dass die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ Q = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

zugleich erfüllt werden. Kann denselben nicht vollkommen Genüge geleistet werden, so ist es wenigstens erforderlich, dass die in dem Ausdrucke von Ω enthaltenen Glieder

$$\frac{V z P \varphi^3}{v} \text{ und } \frac{V z Q K^5 \varphi^5}{v}$$

bei dem grössten Werthe von φ nur solche Werthe erhalten, welche nach der durch das Micrometer zu erreichenden Genauigkeit als unmerklich zu betrachten sind. Oft wird hierdurch die Nothwendigkeit herbei geführt, etwas von der Deutlichkeit aufzuopfern, um den erwähnten Forderungen zu entsprechen.

Gestalt, unter welcher eine auf dem Gegenstande gezogene Curve durch das Instrument erscheint.

140) Die in den vorhergehenden Nummern enthaltenen Formeln geben ein Mittel an die Hand, die Gestalt zu bestimmen, unter welcher eine auf dem Gegenstande gezogene Curve erscheint, wenn sie durch das Instrument betrachtet wird.

Ich nehme dabei den Gegenstand, wie bisher, als eine auf der Axe des Instrumentes senkrecht stehende Ebene an, in welcher sich daher auch jene Curve befindet. Da sich die Gleichungen der Curven gewöhnlich einfacher durch rechtwinkelige Coordinaten, als durch Polarcoordinaten ausdrücken lassen, so bezeichne ich bei den Instrumenten der ersten Art durch:

x' und y' die rechtwinkeligen Coordinaten von einem beliebigen Punkte des Gegenstandes, welche den Polarcoordinaten r' und ψ' entsprechen,

x und y die rechtwinkeligen Coordinaten des dazu gehörigen Punktes im Bilde, dessen Polarcoordinaten r und ψ sind,

ϱ, ξ und υ die Werthe, welche r, x und y erhalten würden, wenn das Bild dem Gegenstande vollkommen ähnlich wäre.

Zuerst ist es erforderlich, die Relationen aufzusuchen, welche zwischen den verschiedenen Coordinaten stattfinden. Hierzu geben die bekannten Formeln, da die Winkel ψ' und ψ einander gleich sind und der Polarordinate ϱ derselbe Winkel zugehört:

$$\left.\begin{aligned} x' &= r' \sin\psi \\ y' &= r' \cos\psi \\ x &= r \sin\psi \\ y &= r \cos\psi \\ \xi &= \varrho \sin\psi \\ v &= \varrho \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Wir haben ferner in (c) von Nro. 136 gesehen, dass bei dem den Coordinaten ϱ, ξ und v entsprechenden Bilde, welches aus dem wirklichen Bilde durch die Weglassung der mit φ_1^3 und φ_1^5 multiplicirten Glieder in dem Ausdrucke von r entsteht,

$$\varrho = \acute{V} r' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

ist, woraus nach den vorhergehenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \acute{V} x' \\ v &= \acute{V} y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

und umgekehrt

$$\left.\begin{aligned} r' &= \frac{\varrho}{\acute{V}} \\ x' &= \frac{\xi}{\acute{V}} \\ y' &= \frac{v}{\acute{V}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

folgt.

Vermöge (b) von Nro. 136 ist sodann, wenn man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von φ_1 durch die einfachen Buchstaben A, B und C ersetzt und den Index weglässt,

$$r = A\varphi + B\varphi^3 + C\varphi^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

mithin

$$\varrho = A\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

und, wenn der aus der letzten Gleichung resultirende Werth von φ in der vorhergehenden substituirt wird,

$$r = \varrho + \frac{B}{A^3}\varrho^3 + \frac{C}{A^5}\varrho^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

wofür ich zur Abkürzung schreibe:

$$r = \varrho\,[1 + a\varrho^2 + b\varrho^4] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

Um vermittelst dieser Gleichung umgekehrt ϱ in r auszudrücken, können wir dieselben Grundsätze befolgen, welche wir bei der Entwickelung der Gleichung (i) von Nro. 83 in Anwendung gebracht haben. Das mit b multiplicirte Glied wurde nämlich nur unter der

Voraussetzung gefunden, dass der Coefficient a des vorhergehenden einen hinlänglich kleinen Werth erhält, um beide Glieder als zu einerlei Ordnung gehörig betrachten zu können, wenn man sie beide berücksichtigt; dagegen wird das erstere jederzeit vernachlässigt, so oft dieser Fall nicht eintritt. Da nun in beiden Fällen die Glieder der höheren Ordnungen nicht beibehalten werden, so ist es erlaubt, statt der in jenen Gliedern enthaltenen Grössen ihre Werthe ohne Rücksicht auf die Abweichungen zu substituiren. Verwechselt man daher in denselben ϱ mit r und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= ar^2 + br^4 \\ &= a(x^2+y^2) + b\,(x^2+y^2)^2 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \text{(i)}$$

so folgt aus (h)

$$\varrho = r(1-\alpha) \dots\dots\dots\dots\dots \text{(k)}$$

und vermittelst dieses Werthes aus (a)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x(1-\alpha) \\ v &= y\,(1-\alpha) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots \text{(l)}$$

Zur Bestimmung der Constanten a und b müssen wir bemerken, dass dieselben nur in Gliedern vorkommen, welche zur dritten Ordnung gezählt werden, daher es genügt, die darin enthaltene Grösse A ohne Rücksicht auf die Abweichungen zu berechnen; die Vergleichung von (e) mit (b) von Nro. 136 giebt folglich nach der in Nro. 138 gebrauchten Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{Vz}{v} \\ B &= \frac{Vz}{v}P \\ C &= \frac{Vz}{v}QK^5 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots \text{(m)}$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{B}{A^3} = \left(\frac{v}{Vz}\right)^2 P \\ b &= \frac{C}{A^5} = \left(\frac{v}{Vz}\right)^4 QK^5 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \text{(n)}$$

Können die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen gegen die der zweiten Ordnung vernachlässigt werden, so fallen die von Q und $\Delta\frac{1}{c_1}$ abhängigen Glieder weg und P verwandelt sich in P_1. In diesem Falle wird daher

$$\left.\begin{aligned} a &= \left(\frac{v}{Vz}\right)^2 P_1 \\ b &= 0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots \text{(o)}$$

Nachdem wir auf diese Weise die Relationen zwischen den verschiedenen Coordinaten gefunden haben, können wir zur Untersuchung über die Gestalt der im Bilde entstehenden Curve übergehen.

Ich setze dabei voraus, dass die auf dem Gegenstande gezogene Curve durch eine Gleichung gegeben ist, welche ich, je nachdem sie rechtwinkelige oder Polarcoordinaten enthält, durch

$$\left.\begin{array}{l} F'\,x', y' = 0 \\ \text{oder} \\ f'\,r', \psi = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

bezeichne. Substituirt man hierin statt x', y' und r' ihre Werthe aus (d), oder verwechselt man, was auf dasselbe hinaus kommt,

$$\begin{array}{l} x' \text{ mit } \xi \\ y' \text{ mit } \upsilon \\ r' \text{ mit } \varrho \end{array}$$

und jede in den Gleichungen enthaltene constante Linie d' mit $V d'$, wofür ich zur Abkürzung d schreibe, so entstehen daraus neue Gleichungen, welche sich auf das hypothetische, den Coordinaten ξ und υ oder ϱ und ψ entsprechende Bild beziehen und die ich durch

$$\left.\begin{array}{l} F\,\xi, \upsilon = 0 \\ \text{oder} \\ f\,\varrho, \psi = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

bezeichne. Um hiervon auf das wirkliche Bild überzugehen, ist weiter nichts erforderlich, als in den letzteren Gleichungen statt ξ, υ und ϱ ihre Werthe aus (k) und (l) zu substituiren, wodurch sie sich in

$$\begin{array}{l} F\,x\,(1-\alpha),\; y\,(1-\alpha) = 0 \\ \text{und} \\ f\,r\,(1-\alpha),\; \psi = 0 \end{array}$$

verwandeln. Da jedoch nach den angenommenen Grundsätzen die Potenzen von α vernachlässigt werden, so können wir jene Gleichungen dadurch vereinfachen, dass wir sie in Reihen entwickeln, welche nach Potenzen von α fortlaufen, und dass wir nur die erste Potenz dieser Grösse beibehalten. Diess giebt für die im wirklichen Bilde entstehende Curve, je nachdem rechtwinkelige oder Polarcoordinaten gebraucht werden, die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} F\,x, y - \alpha x \dfrac{d\,F\,x, y}{dx} - \alpha y \dfrac{d\,F\,x, y}{dy} = 0 \\ \text{oder} \\ f\,r, \psi - \alpha r \dfrac{d\,f\,r, \psi}{dr} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (r)$$

worin statt α sein Werth aus (i) zu substituiren ist. Eine weitere Vereinfachung dieser Gleichungen wird dadurch möglich, dass man in den von α abhängigen Gliedern eine der Coordinaten vermittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} F\,x, y = 0 \\ \text{oder} \\ f\,r, \psi = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s)$$

eliminirt, welches um desswillen geschehen kann, weil es erlaubt ist, die in jenen Gliedern enthaltenen Grössen ohne Rücksicht auf die Abweichungen zu berechnen.

Die obige Entwickelung zeigt übrigens, dass man von $F'x',y'$ und $f'r',\psi$ unmittelbar zu Fx,y und fr,ψ übergehen kann, wenn man

x' mit x

y' mit y

r' mit r

und jede constante Linie d' mit d verwechselt, wobei

$$d = V'd' \quad \ldots \ldots \quad (t)$$

ist.

141) Um die vorhergehende Methode auf die Instrumente der zweiten Art anzuwenden, müssen wir die Strahlen in der nach Nro. 91 bestimmten mittleren Entfernung des letzten, im Instrumente entstehenden Bildes durch eine auf der Axe von jenem senkrecht stehende Projectionsebene durchschnitten denken. Der im Gegenstande befindlichen Curve entspricht alsdann eine andere auf der Projectionsebene, deren Gestalt nach dem Vorhergehenden bestimmt werden kann. Diese Curve hat die Eigenschaft, dass ihre verschiedenen Punkte von dem Auge nach denselben Richtungen gesehen werden, wie die correspondirenden Punkte des wirklichen Bildes. Sie würde mit der im letzteren entstehenden Curve vollkommen zusammenfallen, wenn sich dasselbe in einer Ebene befände, was aber nach dem oben Entwickelten nicht stattfindet. Hiernach verhält sich die auf der Projectionsebene entworfene Curve zu der im wirklichen Bilde entstehenden, wie eine prespectivische Zeichnung zu dem Gegenstande, welchen sie darstellt.

Setzt man nun, wie wir oben gethan haben, voraus, dass die Verzerrung bei einem ebenen, vergrösserten Bilde, welches mit dem ebenfalls als eben betrachteten Gegenstande eine parallele Lage hat, wegfällt, wenn dasselbe dem letzteren vollkommen ähnlich ist, so giebt die auf der hypothetischen Projectionsebene entworfene Curve die Gestalt an, unter welcher sie, und mithin auch die entsprechende Curve des Gegenstandes, durch das Instrument betrachtet, dem Auge erscheint. Diese Gestalt kann daher durch die vorhergehenden Formeln leicht bestimmt werden, wenn man sie auf die erwähnte Projectionsebene anwendet.

Gestalt einer durch das Instrument betrachteten geraden Linie.

142) Die Verzerrung ist am auffallendsten bei geraden Linien; beschäftigen wir uns daher zuerst mit diesen.

Da die Lage der Coordinatenaxen willkührlich ist, so lege ich die Ebene der yz so, dass sie die im Gegenstande befindliche gerade

Linie senkrecht durchschneidet. Unter dieser Voraussetzung wird die oben mit $F' x', y' = 0$ bezeichnete Gleichung der geraden Linie

$$y' - d' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

wobei d' den senkrechten Abstand derselben von der Mitte des Gesichtsfeldes bezeichnet.

Hieraus folgt durch Verwechselung von y' mit y und von d' mit d

$$F x, y = y - d$$

$$\frac{d F x, y}{d x} = 0$$

$$\frac{d F x, y}{d y} = 1$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die erste Gleichung (r) von Nro. 140 in die folgende:

$$y - d - \alpha y = 0$$

und wenn man hierin statt α seinen Werth aus (i) jener Nummer substituirt, in dem davon abhängigen Gliede sodann y mit d verwechselt, wie es aus der Gleichung $F x, y = 0$ folgt, so wird

$$y = d + d\left[a(x^2 + d^2) + b(x^2 + d^2)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Diese Gleichung gehört mithin der Curve zu, welche in dem wirklichen Bilde der durch die Gleichung (a) bestimmten geraden Linie des Gegenstandes entspricht.

Für den Scheitel der Curve, in welchem sie die Ebene der yz durchschneidet, ist

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = d + d\left[a d^2 + b d^4\right] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Wird daher der Scheitel als Ursprung der Coordinaten angenommen und in diesem Falle y mit $y_{,}$ verwechselt, so ist

$$y_{,} = y - d - d\left[a d^2 + b d^4\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

und die Gleichung der Curve

$$y_{,} = d\left[(a + 2 b d^2) x^2 + b x^4\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Eine an den Scheitel gezogene Tangente hat zur Gleichung

$$y_{,} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

der vorhergehende Werth von $y_{,}$ bestimmt daher den Abstand der verschiedenen Punkte der Curve von jener Tangente.

Können die ursprünglich zur dritten Ordnung gehörigen Grössen gegen die der zweiten Ordnung vernachlässigt werden, so ist $b = 0$ und die Gleichung (e) reducirt sich auf die folgende:

$$y_{,} = d a x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

Das Bild der geraden Linie ist daher in diesem Falle sehr nahe eine Parabel, deren Parameter =

$$= \frac{1}{d a} = \frac{V^2 z^2}{v^2 d P_{\text{i}}}$$

und deren Concavität nach aussen oder nach innen gekehrt ist, je nachdem P_{i} positiv oder negativ wird.

Hat dagegen das von a abhängige Glied einen so kleinen Werth, dass die mit b multiplicirten Glieder beibehalten werden müssen, so treten nach der Beschaffenheit der Zeichen jener Coefficienten verschiedene Umstände ein, welche denen analog sind, die wir in Nro. 83 bei der erzeugenden Curve der Bildfläche gefunden haben.

Bei gleichen Zeichen von a und b hat nämlich die Curve zwar dieselbe Lage, welche sie erhalten würde, wenn $b = 0$ wäre, aber eine verschiedene Natur, indem sie wegen des von x^4 abhängigen Gliedes keine Parabel mehr ist.

Erhält b das entgegengesetzte Zeichen von a, so ändert sich die Gestalt der Curve mit dem Werthe von d, d. h. mit ihrem Abstande von der Mitte des Gesichtsfeldes.

Ist in diesem Falle d^2 kleiner als $-\frac{a}{2b}$, so haben die mit x^2 und x^4 multiplicirten Glieder in dem Ausdrucke von y, entgegengesetzte Zeichen. Die Curve hat alsdann, je nachdem a positiv oder negativ ist, im Scheitel ein Minimum oder Maximum von y, ferner zwei Wendungspunkte diesseits und jenseits des Scheitels, welchen die Abscissen

$$x = \pm\sqrt{-\left(\frac{a+2bd^2}{6b}\right)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

zugehören. Hierauf folgen zwei Maxima oder Minima, deren Abscissen

$$x = \pm\sqrt{-\left(\frac{a+2bd^2}{2b}\right)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

sind. Von da an nähert sich die Curve wieder der an ihren Scheitel gezogenen Tangente, durchschneidet sie in den beiden Punkten, welche den Abscissen

$$x = \pm\sqrt{-\left(\frac{a+2bd^2}{b}\right)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(k)}$$

entsprechen, und geht endlich auf die entgegengesetzte Seite jener Tangente über, von der sie sich bei fortwährender Zunahme von x immer mehr entfernt.

Wenn dagegen d^2 grösser als $-\frac{a}{2b}$ ist, so fallen die beiden Wendungspunkte, die Maxima oder Minima und die Durchschnitte der Curve mit der Tangente des Scheitels weg. Die Curve hat alsdann die umgekehrte Lage von der, welche stattfinden würde, wenn das von a abhängige Glied allein vorhanden wäre, so dass die Curve ganz auf einer Seite jener Tangente liegt und sich von dieser bei fortgesetzter Zunahme von x immer mehr entfernt.

Wir haben in (e) von Nro. 138 die Gleichung gefunden, welche erfüllt werden muss, wenn sich die verschiedenen Punkte des Bildes im Mittel so wenig wie möglich von derjenigen Lage entfernen sollen, welche sie bei einer vollkommenen Aehnlichkeit haben würden. Untersuchen wir jetzt, welche Gestalt in diesem Falle das Bild der

oben betrachteten geraden Linie erhält. Substituirt man in der allegirten Gleichung die Werthe, welche aus (e), (m) und (n) von Nro. 140 folgen, nämlich

$$\varphi = \frac{r}{A} = \frac{rv}{Vz}$$

$$P = \left(\frac{Vz}{v}\right)^2 a$$

$$QK^5 = \left(\frac{Vz}{v}\right)^4 b$$

so wird dieselbe

$$0 = a + \frac{4}{5} b r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (l)$$

worin r den der Grenze des Gesichtsfeldes entsprechenden Werth, mithin den Halbmesser des vergrösserten Gesichtsfeldes bezeichnet. Vermittelst der vorhergehenden Gleichung können wir a aus der oben gefundenen Gleichung (e) eliminiren, wodurch wir für das Bild der geraden Linie die Gleichung erhalten:

$$y_{\prime} = bd\left[\left(-\frac{4}{5}r^2 + 2d^2\right)x^2 + x^4\right] \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

Je nachdem daher d^2 kleiner oder grösser als $\frac{2}{5} r^2$ ist, hat die Curve die eine, oder die andere der oben angegebenen Eigenschaften.

Gestalt eines durch das Instrument betrachteten Kreises.

143) Nächst den geraden Linien geben die Kreise eine Verzerrung am leichtesten zu erkennen; untersuchen wir daher auch bei diesen die Gestalt des Bildes. Zu dem Ende sey

h' der Halbmesser eines auf dem Gegenstande gezogenen Kreises,

d' der Abstand seines Mittelpunktes von dem Mittelpunkte des Gesichtsfeldes.

Legen wir nun die Ebene der yz durch jenen Mittelpunkt, so ist die Gleichung des Kreises

$$x'^2 + (y' - d')^2 - h'^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

folglich

$$Fx,y = x^2 + (y - d)^2 - h^2$$

$$\frac{dFx,y}{dx} = 2x$$

$$\frac{dFx,y}{dy} = 2(y - d)$$

Substituirt man diese Werthe in der ersten Gleichung (r) von Nro. 140, statt α aber seinen Werth aus (i) derselben Nummer, so wird jene Gleichung

$$0 = x^2 + (y - d)^2 - h^2$$
$$-2\left[a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)^2\right]\left[x^2 + y(y - d)\right]$$

In den von a und b abhängigen Gliedern kann x vermittelst der Gleichung $Fx, y = 0$ eliminirt werden, wonach in denselben

$$x^2 + y^2 = 2\,d\,(y - d) + d^2 + h^2$$
$$x^2 + y\,(y - d) = d\,(y - d) + h^2$$

ist. Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in die folgende:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x^2 + (y-d)^2 - h^2 \\ &- 2\left[a\left(2\,d(y-d)+d^2+h^2\right)+b\left(2\,d(y-d)+d^2+h^2\right)^2\right]\times \\ &\times\left[d(y-d)+h^2\right] \end{aligned}\right\} \quad . \, (b)$$

wodurch die Curve bestimmt wird, welche im Bilde dem auf dem Gegenstande gezogenen Kreise entspricht.

Die Gleichung wird einfacher, wenn man den Ursprung der Coordinaten in denjenigen Punkt verlegt, für welchen

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= d + a\,d\,(d^2 + 3h^2) + b\,d\,(d^2 + h^2)\,(d^2 + 5h^2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (c)$$

ist. Verwechselt man in diesem Falle y mit $y_{\prime}$, so wird

$$y_{\prime} = y - d - a\,d\,(d^2 + 3h^2) - b\,d\,(d^2 + h^2)\,(d^2 + 5h^2) \quad . \; . \quad (d)$$

und die Gleichung der Curve

$$\left.\begin{aligned} 0 = x^2 + y_{\prime}^2\left[1 - 4\,a\,d^2 - 8\,b\,d^2\,(d^2 + 2h^2)\right] - 8\,b\,d^3 y_{\prime}^3 \\ - h^2\left[1 + 2\,a\,(d^2 + h^2) + 2\,b\,(d^2 + h^2)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (e)$$

Ist es erlaubt, die mit b multiplicirten Glieder zu vernachlässigen, so kann die letztere Gleichung unter die Gestalt gebracht werden:

$$\frac{x^2}{h^2\left[1 + a\,(d^2 + h^2)\right]^2} + \frac{y_{\prime}^2}{h^2\left[1 + a\,(3\,d^2 + h^2)\right]^2} = 1 \quad . \quad . \quad (f)$$

Die Curve ist daher in diesem Falle sehr nahe eine Ellipse, deren halbe Axen $h\left[1 + a\,(d^2 + h^2)\right]$ und $h\left[1 + a\,(3\,d^2 + h^2)\right]$ sind und mit denen der x und $y_{\prime}$ zusammenfallen.

Die erstere ist kleiner oder grösser als die letztere, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Müssen die von b abhängigen Glieder beibehalten werden, so würde demungeachtet die Curve eine Ellipse bleiben, wenn das Glied $-8\,b\,d^3\,y_{\prime}^3$ nicht vorhanden wäre. Durch dieses wird aber auf der einen Seite der Axe der $y_{\prime}$ eine Verlängerung und auf der entgegengesetzte Seite eine Abplattung der Curve hervorgebracht, so dass sie eine Gestalt erhält, welche sich dem Durchschnitte eines Eies oder der Crystallinse eines Ochsenauges nähert, je nachdem jene Axe die grössere oder die kleinere ist. Die der Gleichung zugehörige Curve hat ausserdem zwei ins Unendliche fortlaufende Aeste, die sich bei grösseren Werthen von b mit dem sonst geschlossenen Ovale vereinigen, hier aber nicht in Betracht kommen, da nach der bei der Entwickelung der Formeln gebrauchten Methode nur kleine Werthe der Coordinaten zulässig sind und b bei der zweckmässigen Einrichtung der Instrumente stets klein werden muss.

Schleiermacher, Ludwig J.

Analytische Optik

Bd.: 1

Darmstadt (1842)

Math.a. 213 h-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081127-6